Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Ляпин, Усреднение траекторного аттрактора нелинейного волнового уравнения с быстро осциллирующей правой частью, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 390–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:18:04

Усреднение траекторного аттрактора нелинейного волнового уравнения с быстро осциллирующей правой частью

А. С. Ляпин

Рассматривается нелинейное неавтономное гиперболическое уравнение с диссипацией и с малым параметром при старшей производной по времени. В этом уравнении есть также быстро осциллирующая внешняя сила. Используя стандартную технику построения траекторного аттрактора, доказывается сходимость аттрактора нелинейного неавтономного гиперболического уравнения с диссипацией к аттрактору соответствующего параболического уравнения.

Библиография: 2 названия.

Рассматривается нелинейное волновое уравнение вида

$$\varepsilon^2 u_{tt} + \gamma u_t + f(t; u) = \Delta u + g(t/\varepsilon; x), \quad (1)$$

где $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ и $0 < \varepsilon \leq 1$. Предполагается, что $u|_{\partial\Omega} = 0$. В работе [1] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ при выполнении некоторых условий относительно функции $f(t; u)$ уравнение (1) имеет траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$. В настоящей работе исследуется поведение $A^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого наряду с уравнением (1) изучается предельное параболическое уравнение

$$\gamma \bar{u}_t + f(t; \bar{u}) = \Delta \bar{u} + \bar{g}(x). \quad (2)$$

Уравнение (2), как показано в [1], имеет траекторный аттрактор A . Мы докажем, что в соответствующей топологии любая окрестность A содержит $A^{(\varepsilon)}$, если ε достаточно мало.

Перейдем теперь к точным формулировкам. Относительно функции $f(t; v)$ и ее первообразной $F(t; u) = \int_0^u f(t; v) dv$ предполагается, что

$$F(t; v) \geq \gamma_1 |v|^p - C_1, \quad (3)$$

$$C_3 |v|^p - C_4 \leq f(t; v) v \leq C_5 |v|^p - C_6, \quad (4)$$

$$\alpha f(t; v) v - \frac{\partial F(t; v)}{\partial t} \geq \alpha \gamma_2 F(t; v) - C_2. \quad (5)$$

Здесь $\alpha > 0$, $C_i > 0$, $\gamma_i > 0$. Внешняя сила $g(t/\varepsilon; x)$ удовлетворяет условию

$$\int_t^{t+1} \|g(\tau/\varepsilon; x)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau < C < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (6)$$

равномерно по $0 < \varepsilon \leq 1$. Для уравнения (1) при $t = \tau$ задаются начальные условия

$$\begin{aligned} u|_{t=\tau} &= u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega), \\ u_t|_{t=\tau} &= u_1 \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (3)–(6). Тогда для любого $M > 0$ задача (1), (7) имеет хотя бы одно решение $u(x; t) \in L_\infty([0; M]; H_0^1 \cap L_p(\Omega))$, и $u_t \in L_\infty([0; M]; L_2(\Omega))$. При этом имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} Z(t) &\leq CZ(0)e^{-\kappa t} + R_\kappa, \\ Z(t) &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_p(\Omega)}^p + \|u_t\|_{L_2(\Omega \times [t; t+1])}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\kappa > 0$ и $R_\kappa \geq 0$; эти числа зависят от α, C, γ , но не зависят от ε .

Доказательство теоремы проводится как обычно методом Галеркина (см., например, [1]). Для этого рассматривается вспомогательная функция $V = u_t + \alpha u$. Умножив уравнение (1) на V , после простых преобразований получаем неравенство (8). Отсюда легко выводится существование решения задачи (1), (7).

Ввиду того, что условия (3)–(6) не гарантируют единственности решения задачи (1), (7), для изучения поведения $u(x; t)$ при $t \rightarrow \infty$ используется траекторный аттрактор, который строится ниже. Для этого нам понадобятся следующие пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2$, где

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \{\varphi(t; u) \in C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; C^{\text{loc}}(\mathbb{R})) \mid \partial\varphi/\partial t \in C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; C^{\text{loc}}(\mathbb{R}))\}, \\ \Xi_2 &= L_{2;w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}; L_{2;w}(\Omega)). \end{aligned}$$

Следует отметить, что $\sigma_k = (\varphi_k(t; u); \psi_k(t; x))$ сходится к $\sigma = (\varphi(t; u); \psi(t; x))$ в Ξ , если для любых фиксированных чисел $r > 0$ и $M > 0$

- 1) $\varphi_k(t; u) \rightarrow \varphi(t; u)$ и $\partial\varphi_k/\partial t \rightarrow \partial\varphi/\partial t$ в пространстве $C([-M; M] \times [-r; r])$;
- 2) $\psi_k(t; x)$ слабо сходится к $\psi(t; x)$ в $L_2(\Omega \times [-M; M])$.

Сформулируем теперь понятие трансляционно-компактной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(t; u)$ называется трансляционно-компактной в пространстве Ξ_1 , если оболочка $\mathcal{H}(f(t; u))$, задаваемая формулой

$$\mathcal{H}(f(t; u)) = \left[\bigcup_{h \in \mathbb{R}} \{f(t+h; u)\} \right]_{\Xi_1},$$

компактна в Ξ_1 . Здесь через $[\cdot]_{\Xi_1}$ обозначается замыкание в топологии Ξ_1 . Аналогично определяется трансляционная компактность функции $g(t; x)$ в Ξ_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Символом уравнения (1) называется пара функций

$$(f(t; u); g(t; x)) := \sigma(t).$$

Предполагается, что $\sigma(t)$ является трансляционно-компактной функцией в Ξ . Напомним, что тогда множество $\Sigma := [\bigcup_{h \in \mathbb{R}} \{f(t+h; u); g(t+h; x)\}]_{\Xi}$ компактно в Ξ . Последнее равносильно тому, что для любых фиксированных $r > 0$ и $M > 0$ семейство $\{f(t+h; u), \partial f(t+h; u)/\partial t \mid u \in [-r; r], t \in [-M; M]\}$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела, и семейство функций $\{g(t+h; x)\}$ равномерно по $h \in \mathbb{R}$ ограничено в $L_2(\Omega \times [-M; M])$, а значит, предкомпактно в слабой топологии.

Имеет место следующее очевидное предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любой пары функций $(\tilde{f}(t; u); \tilde{g}(t; x))$, принадлежащей Σ , выполняются условия (3)–(6).

Рассмотрим теперь семейство уравнений

$$\varepsilon^2 u_{tt} + \gamma u_t + \tilde{f}(t; u) = \Delta u + \tilde{g}(t/\varepsilon; x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (9)$$

Предполагается, что символ уравнения (9) $\sigma(t) = (\tilde{f}(t; u); \tilde{g}(t; x))$ принадлежит Σ . Из предложения 1 и теоремы 1 следует, что задача (9), (7) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее (8). Определим пространство, в котором строится траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Введем пространство

$$\mathcal{F}_+ = \{u \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1 \cap L_p) \mid u_t \in L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2)\},$$

норма в котором определяется по следующей формуле:

$$\|u\|^2 = \|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; L_p(\Omega))}^p + \sup_{t \geq 0} \|u_t\|_{L_2(\Omega \times [t; t+1])}^2.$$

Введем топологию Θ_+ в пространстве $\mathcal{F}_+$. Последовательность $u_k \rightarrow u$ в топологии Θ_+ , если

- 1) $u_k \rightarrow u$ *-слабо в $L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ и слабо в $L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L_p(\Omega))$;
- 2) $(u_k)_t \rightarrow u_t$ слабо в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $K_\Sigma^+(N)$ – множество всех ограниченных (в смысле неравенства (8)) решений уравнения (9):

$$K_\Sigma^+(N) = \{u(t; x) \mid Z(t) \leq R_\kappa + Ne^{-\kappa t}\}.$$

Очевидно, что $K_\Sigma^+(N)$ ограниченное подмножество $\mathcal{F}_+$ и, следовательно, замкнутое в топологии Θ_+ . На $K_\Sigma^+(N)$ действует трансляционная полугруппа $T(t)$ по следующей формуле:

$$T(h)u(t; x) = u(t+h; x).$$

Очевидно, что если $u(t; x)$ – решение уравнения (9) с символом $\sigma(t) \in \Sigma$, то $u(t+h; x)$ является решением уравнения (9) с символом $\sigma(t+h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество $P \subset K_\Sigma^+(N)$ назовем *притягивающим*, если для любой его окрестности $O(P) \subset \Theta_+$ и для любого ограниченного в $\mathcal{F}_+$ множества $B \subset K_\Sigma^+(N)$ существует $t_0 > 0$ такое, что если $t \geq t_0$, то $T(t)B \subset O(P)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Траекторным аттрактором* уравнения (1) называется множество $A^{(\varepsilon)}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $A^{(\varepsilon)}$ компактно в Θ_+ ;
- 2) $A^{(\varepsilon)}$ – притягивающее множество для $K_\Sigma^+(N)$;
- 3) множество $A^{(\varepsilon)}$ инвариантно относительно полугруппы сдвигов $T(t)$:

$$T(t)A^{(\varepsilon)} = A^{(\varepsilon)} \quad \forall t > 0.$$

Отметим, что слабая топология Θ_+ сильнее чем, например, $L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$. Поэтому, если имеет место притяжение к P в топологии Θ_+ , то оно имеет также место в $L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$.

ТЕОРЕМА 2. *Полугруппа $T(t)$ имеет траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)} \in \Theta_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы аналогично соответствующему доказательству, приведенному в [1].

Аналогичные утверждения имеют место также для уравнения (2). Для него задается начальное условие

$$\bar{u}|_{t=\tau} = u_0 \in H_0^1 \cap L_p(\Omega). \quad (10)$$

Для этой задачи предполагается выполнение условий (3)–(5) и, кроме того,

$$f(t; u + v) - f(t; u) \geq -Cv \quad \forall v \geq 0. \quad (11)$$

Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены условия (3)–(5), (11) и $\bar{g}(x) \in L_2(\Omega)$. Тогда задача (2), (10) имеет единственное решение $\bar{u}(t; x) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1 \cap L_p(\Omega))$, причем $\bar{u}_t \in L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$, и имеет место неравенство*

$$Z(t) \leq CZ(0)e^{-\kappa t} + R_\kappa,$$

где $Z(t)$ определено в (8) и κ то же число, что и в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО существования решения $\bar{u}(t; x)$ задачи (2), (10) проводится методом Галеркина, аналогично тому, как это делается в теореме 1.

Как показано в [2], уравнение (2) имеет глобальный аттрактор; следовательно, оно имеет также траекторный аттрактор A , обладающий свойствами, аналогичными свойствам траекторного аттрактора $A^{(\varepsilon)}$.

Перейдем к изучению поведения $A^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предполагается, что существует функция $\psi(z; x)$, для которой выполнено следующее условие:

$$g(t/\varepsilon; x) - \bar{g}(x) = \varepsilon \frac{\partial \psi(t/\varepsilon; x)}{\partial t}, \quad \psi(z; x) \in L_2^b(\mathbb{R}; L_2(\Omega)). \quad (12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть функция $g(t/\varepsilon; x)$ удовлетворяет условию (12). Тогда условие (12) имеет место также для любой функции $\tilde{g}(t/\varepsilon; x)$, принадлежащей $\mathcal{H}(g(t/\varepsilon; x))$, для любого $0 < \varepsilon \leq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 2 следует, что функцию $\tilde{g}(x; t/\varepsilon)$ можно представить в следующем виде:

$$\tilde{g}(x; t/\varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x; t/\varepsilon + h_k),$$

где h_k – некоторая числовая последовательность. Отсюда и из (12) следует

$$\tilde{g}(x; t/\varepsilon) - \bar{g}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (g(x; t/\varepsilon + h_k) - \bar{g}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi(x; t/\varepsilon + h_k)}{\partial t} \right).$$

Предел в правой части этого равенства существует, так как $\tilde{g}(x; z) \in L_2^b(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$. Следовательно, выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi(x; t/\varepsilon + h_k)}{\partial t} \right) = \varepsilon \frac{\partial \tilde{\psi}(x; t/\varepsilon)}{\partial t}.$$

Предложение доказано.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено условие (12), а также условия теоремы 3 и теоремы 1. Тогда траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$ уравнения (1) стремится к аттрактору A уравнения (2) в топологии Θ_+ .

В доказательстве теоремы 4 используются идеи, изложенные в книге [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, American Mathematical Society Colloquium publications, **49**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [2] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989.

А. С. Ляпин

Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ)
E-mail: andser2001@yandex.ru

Поступило

16.03.2007