Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, О сравнении линейных дифференциальных операторов, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 426–440

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:39:57

О сравнении линейных дифференциальных операторов

Р. М. Тригуб

В статье исследуется вопрос о существовании неравенства

$$\|Q(D)f\|_{L_q} \leq \gamma_0 \|P(D)f\|_{L_p},$$

где P и Q – алгебраические полиномы, $D = d/dx$, а γ_0 не зависит от функции f . Найдены критерии (необходимые и одновременно достаточные условия) существования таких неравенств для функций на окружности, на всей прямой и на полуоси. Кроме того, для полуоси получено неравенство при $q = \infty$ и любом $p \geq 1$ с наименьшей константой γ_0 .

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Формулировка результатов. Точное мультипликативное неравенство Колмогорова для промежуточных производных функций на прямой $\mathbb{R}$

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \gamma_0(k, r) \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/r} \|f^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/r}, \quad 1 \leq k < r$$

(с указанием наименьшей константы γ_0 , не зависящей от функции f) стало началом многочисленных работ (см. книгу [1], в которой собраны точные неравенства для функций на оси $\mathbb{R}$, полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и окружности $\mathbb{T}$ в пространствах L_p при разных $p \in [1, +\infty)$).

Легко показать, что мультипликативное неравенство Колмогорова эквивалентно следующему аддитивному:

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \gamma_0(k, r) \left(\left(1 - \frac{k}{r}\right) \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \frac{k}{r} \|f^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \right).$$

Отметим, что для функций на отрезке вещественной оси точное аддитивное неравенство в общем случае до сих пор не получено.

С другой стороны, в работах по уравнениям в частных производных широко и существенно используют, например, аддитивное неравенство Гальярдо–Ниренберга для смешанных производных функций многих переменных (см., например, [2; п. 15]).

Заметим, что в случаях функций на всем пространстве $\mathbb{R}^d$ и на торе $\mathbb{T}^d$ для сравнения, в частности, линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами применяют теоремы о мультипликаторах Фурье (для интегралов и рядов Фурье соответственно), см. [2; гл. 3] и [3; гл. VI–VII], а для доказательства точных неравенств методом мультипликаторов существенна положительная определенность некоторых функций, см. [4].

В настоящей статье изучается следующая задача.

Пусть P и Q – многочлены (алгебраические полиномы), а $D = d/dx$. Когда имеет место следующее (p, q) неравенство:

$$\|Q(D)f\|_{L_q(I)} \leq \gamma_0 \|P(D)f\|_{L_p(I)} \quad (1)$$

в трех случаях: $I = \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{T}$, и чему равна наименьшая константа γ_0 , не зависящая от функции f ?

Во-первых, при $p, q \in [1, \infty]$ получены критерии существования таких неравенств (теоремы 1, 3 и 4). Во-вторых, в случае функций на $\mathbb{R}_+$ удалось найти наименьшую константу γ_0 в (p, ∞) неравенстве (теорема 2).

Ранее получены точные (∞, ∞) неравенства на $\mathbb{R}$ в предположении, что коэффициенты полиномов P и Q вещественные с ограничением на модули мнимых частей нулей Q [5], [6]. При этом в доказательстве использовались обобщение теоремы Ролля и сплайны типа Шёнберга.

Пусть $P(z) = \sum_{k=0}^r a_k z^k$, $\deg P = r \in \mathbb{N}$, и $Q(z) = \sum_{k=0}^s b_k z^k$, $\deg Q = s \in \mathbb{N} \cup 0$, коэффициенты полиномов комплексные, а функции предполагаем комплекснозначными.

Так как норму производной нельзя оценить сверху через норму самой функции, то нужно считать, что $s \leq r$, а если рассматривать все функции, для которых правая часть в (1) конечна, то все решения дифференциального уравнения $P(D)f = 0$ должны быть решениями уравнения $Q(D)f = 0$, т.е. $Q \equiv cP$, где c – некоторая константа, и в этом случае $q = p$ на полуоси или оси, а неравенство тривиальное. Поэтому считаем далее, что $f \in W_p^r(I)$, т.е. $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и

$$\|f\|_{W_p^r(I)} = \|f\|_{L_p(I)} + \|f^{(r)}\|_{L_p(I)} < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p, q \in [1, +\infty]$. При $(p, q) \neq (1, \infty)$ для существования неравенства

$$\|Q(D)f\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \gamma \|P(D)f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}$$

для всех функций $f \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$ с константой γ , не зависящей от f , необходимо и достаточно:

$$\sup_{z: \operatorname{Re} z \leq 0} \frac{|Q(z)|}{|P(z)|} < \infty$$

и $q \geq p$ при $s < r$, $q = p$ при $s = r$.

В случае $(p, q) = (1, \infty)$ необходимо и достаточно: $s < r$ и

$$\sup_{z: \operatorname{Re} z \leq \delta} \frac{|Q(z)|}{|P(z)|} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|Q(ix)|}{|P(ix)| + |P'(ix)|} < \infty$$

при любом $\delta < 0$.

Из этого критерия следует, учитывая вид решений уравнения $P(D)f = 0$, что если все нули P лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$, то опять $Q \equiv cP$ (кроме случая $(1, \infty)$). Поэтому предполагаем далее, что существует $\lambda \in \mathbb{C}$: $P(\lambda) = 0$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $P(z) = Q(z) \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{\alpha_j}$, где $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$. Тогда для любого $p \in [1, +\infty]$ и любой функции $f \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$, $r = \deg P$,

$$\|Q(D)f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \gamma_0 \|P(D)f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)},$$

где наименьшая константа $\gamma_0 = \|g\|_{L_{p'}(\mathbb{R}_+)}$,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \overline{R(\bar{\zeta})} e^{-x\zeta} d\zeta, \quad R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)},$$

$1/p + 1/p' = 1$, а простой замкнутый гладкий контур Γ содержит внутри $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m$, а сопряженные числа к другим нулям P находятся вне Γ .

СЛЕДСТВИЕ. Если $P(z) = (z - \lambda)Q(z)$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то при любом $p \geq 1$

$$\|Q(D)f\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}_+)} \leq \left(\frac{p-1}{p \operatorname{Re} \lambda}\right)^{(p-1)/p} \|P(D)f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}$$

и неравенство точное.

Отметим, что при четном p' величину $\gamma_0^{p'}$ и в общем случае можно записать в виде конечной суммы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p, q \in [1, +\infty]$. При $(p, q) \neq (1, \infty)$ для существования неравенства (1) на прямой $\mathbb{R}$ для всех функций $f \in W_p^r(\mathbb{R})$ с константой γ , не зависящей от f , необходимо и достаточно:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|Q(ix)|}{|P(ix)|} < \infty,$$

$q \geq p$ при $s < r$ и $q = p$ при $s = r$, а в случае $(p, q) = (1, \infty)$ $|P(ix)|$ в знаменателе нужно заменить на $|P(ix)| + |P'(ix)|$ и $s < r$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p, q \in [1, +\infty]$. Для существования неравенства (1) для 2π -периодических функций из $W_p^r(\mathbb{T})$ с константой γ , не зависящей от f , необходимо и достаточно, чтобы из равенства $P(ik) = 0$ при $k \in \mathbb{Z}$ следовало $Q(ik) = 0$ и $s < r$, а при $s = r$ нужно добавить $q \leq p$.

Результаты настоящей статьи доложены на конференции в Туле (см. [7]).

2. Вспомогательные утверждения. В силу одного результата Габушина ([8], см. также, например, [1; 4.2.2] или [3; 3.5.29]) при $k \in [0, r - 1]$

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \gamma \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^{\alpha} \|f^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}^{1-\alpha} \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда $q \geq p$ и $\alpha = 1 - k/r - (1/p - 1/q)(1/r)$. Если это неравенство применить при $p < q = \infty$ к полуоси $[x, \infty)$, а затем перейти к пределу при $x \rightarrow +\infty$, то получим, что для любой функции $f \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$ при $p < \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = 0, \quad 0 \leq k \leq r - 1. \quad (3)$$

Из того же неравенства (2) следует, что при $q \geq p$ и $k \leq r - 1$

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \gamma \|f\|_{W_p^r(\mathbb{R}_+)}$$

и, значит,

$$\|f\|_{W_q^{r-1}(\mathbb{R}_+)} \leq 2\gamma \|f\|_{W_p^r(\mathbb{R}_+)}.$$

Чтобы построить пример функции из $W_p^r(\mathbb{R}_+)$, у которой r -я производная не принадлежит $L_q(\mathbb{R}_+)$ при $q > p$, достаточно взять $f_0(x) = 1/x^\delta$, $x > 0$, при $\delta \in (1/q, 1/p)$, а $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \geq 1$. Тогда функция

$$f(x) = \int_x^\infty (x-t)^{r-1} f_0(t) \varphi(t) dt$$

искомая.

ЛЕММА 1. Указанные в теоремах 1, 3 и 4 условия необходимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с теоремы 4 (периодические функции). То, что при $s = r$ должно быть $q \leq p$, следует из контрпримера перед леммой, так как финитную гладкую функцию можно продолжить до периодической гладкой. Далее, если $P(ik) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, то применяя (p, q) неравенство к функции $f_k(x) = e^{ikx}$, для которой $P(D)f_k \equiv 0$, получим, что и $Q(D)f_k \equiv 0$, а значит, и $Q(ik) = 0$.

Переходим к доказательству необходимости условий в теоремах 1 и 3 (случаи полусоси и оси).

Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 0$ вне $(0, 1)$ и $\varphi(x) \not\equiv 0$. Считая $Q \not\equiv 0$, имеем, учитывая теорему единственности решений дифференциальных уравнений, для полусоси и оси

$$0 < \|Q(D)\varphi\|_{L_q} \leq \gamma \|P(D)\varphi\|_{L_p}.$$

Положим $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x-k)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|Q(D)f_n\|_q = \left(n \int_0^1 |Q(D)\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad \|P(D)f_n\|_q = \left(n \int_0^1 |P(D)\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

и, значит, при $n \rightarrow \infty$ $n^{1/q} = O(n^{1/p})$, откуда $q \geq p$.

Пусть теперь $P(\lambda) = 0$ и $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Тогда любое соответствующее решение уравнения $P(D)f = 0$ (оно равно произведению многочлена на $e^{\lambda x}$) принадлежит $W_p^r(\mathbb{R}_+)$ при любом r и в силу неравенства (1) $Q(D)f \equiv 0$ и $Q(\lambda) = 0$, а λ является нулем Q той же кратности, что и у P , или большей. А так как еще число нулей P конечное и $\deg Q \leq \deg P$, то дробь $R(z) = Q(z)/P(z)$ ограничена при $\operatorname{Re} z \leq \delta$ при любом $\delta < 0$.

Добавим нули P на мнимой оси, если они есть.

Пусть $P(ix_0) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, и кратность этого нуля равна n . Нужно доказать, что кратность этого же нуля Q равна $m \geq n$ во всех случаях, кроме одного: $p = 1$ и $q = \infty$, когда $m \geq n - 1$.

Для этого применим неравенство (1) к функции $f_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x)e_0(x)$, где $e_0(x) = e^{ix_0x}$, а $h_\varepsilon(x) = h(\varepsilon x)$, $\varepsilon > 0$, и $h(x) = e^{-x^2}$, например. Получаем

$$\begin{aligned} P(D)f_\varepsilon &= \sum_{k=0}^r a_k f_\varepsilon^{(k)} = e_0 \sum_{k=0}^r a_k \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (ix_0)^{k-\nu} h_\varepsilon^{(\nu)} \\ &= e_0 \sum_{\nu=0}^r h_\varepsilon^{(\nu)} \sum_{k=\nu}^r a_k \binom{k}{\nu} (ix_0)^{k-\nu}. \end{aligned}$$

Но в силу предположения о кратности ix_0 при $\nu \in [0, n-1]$

$$\sum_{k=\nu}^r a_k \binom{k}{\nu} (ix_0)^{k-\nu} = \frac{1}{\nu!} P^{(\nu)}(ix_0) = 0$$

и множитель при $h_\varepsilon^{(\nu)}$, $\nu \leq n-1$, равен нулю, а при $h_\varepsilon^{(n)}$ не равен нулю. Аналогичные выводы можно сделать и для $Q(D)f_\varepsilon$.

Учитывая еще, что при $p > 0$ и любом целом $\nu \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_\varepsilon^{(\nu)}(x)|^p dx = \varepsilon^p \int_{-\infty}^{\infty} |h^{(\nu)}(\varepsilon x)|^p dx = \varepsilon^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} |h^{(\nu)}(x)|^p dx,$$

получаем $\varepsilon^{m-1/q} = O(\varepsilon^{n-1/p})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, откуда $m \geq n+1/q-1/p$. Следовательно, $m \geq n$ во всех случаях кроме одного, а при $p=1$ и $q=\infty$ $m \geq n-1$.

Если же $s=r$, то, как следует из контрпримера перед леммой 1, $q=p$.

Переходим к доказательству достаточных условий. Для этого представим $Q(D)f$ в виде свертки $P(D)f$ с некоторой функцией g .

Пусть

$$P(z) = \sum_{k=0}^r a_k z^k, \quad \text{а} \quad P^*(z) = \overline{P(-\bar{z})} = \sum_{k=0}^r (-1)^k \bar{a}_k z^k. \quad (4)$$

Если $f \in W_p^r$, а $g \in W_{p'}^r$, то в силу известной формулы Грина

$$\begin{aligned} \int_0^h \overline{g(x)} P(D) f(x) dx &= \int_0^h f(x) \overline{P^*(D) g(x)} dx \\ &+ \left[\sum_{k=1}^r \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m f^{(k-m-1)}(x) a_k \bar{g}^{(m)}(x) \right]_0^h. \end{aligned} \quad (5)$$

Она сразу следует из формулы интегрирования по частям ($k \geq 1$):

$$\int_0^h f^{(k)}(x) \overline{g(x)} dx = \left[\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m f^{(k-m-1)}(x) \bar{g}^{(m)}(x) \right]_0^h + (-1)^k \int_0^h f(x) \bar{g}^{(k)}(x) dx.$$

Перейдем к пределу при $h \rightarrow +\infty$.

В силу предположения функции f и g , как и их производные до порядка $r-1$, ограничены на $\mathbb{R}_+$ (см. (2)). Если же $p < \infty$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(\nu)}(x) = 0$, $0 \leq \nu \leq r-1$, а при $p = \infty$, $p' = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{(\nu)}(x) = 0$, $0 \leq \nu \leq r-1$, в силу (3). Так что предел суммы в квадратных скобках формулы (5) при $x = h \rightarrow +\infty$ равен нулю.

Положим

$$Q(z) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{m+1} z^{k-m-1} a_k \bar{g}^{(m)}(0) = \sum_{m=0}^{r-1} z^m \sum_{\nu=0}^{r-m-1} (-1)^{\nu+1} a_{m+1-\nu} \bar{g}^{(\nu)}(0). \quad (6)$$

Тогда формулу (5) при $h = \infty$ можно переписать в виде

$$Q(D)f(0) = \int_0^\infty \bar{g}(t) P(D)f(t) dt - \int_0^\infty f(t) \overline{P^*(D)g(t)} dt.$$

Заменяя $f(\cdot)$ на $f(\cdot+x)$, $x > 0$, получаем искомое представление

$$Q(D)f(x) = \int_0^\infty \bar{g}(t) P(D)f(x+t) dt - \int_0^\infty f(t+x) \overline{P^*(D)g(t)} dt. \quad (7)$$

Здесь $f \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$, $g \in W_{p'}^r(\mathbb{R}_+)$, а полином Q (см. (6)) однозначно определяется полиномом P и значениями функции g и ее производных в нуле до порядка $r-1$.

ЛЕММА 2. Для любых двух полиномов P и Q при $s = \deg Q < \deg P = r$, для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ при $q \geq p \geq 1$

$$\|Q(D)f\|_{L_q(\mathbb{R}_+)} \leq \varepsilon \|P(D)f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} + \gamma \varepsilon^{-\alpha} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}, \quad \alpha = \frac{s+1/p-1/q}{r-s+1/q-1/p},$$

где γ не зависит от $f \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$ и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (7) после применения неравенств Гёльдера и Минковского сразу получаем (пользуемся сокращенными обозначениями интегральных норм)

$$\|Q(D)f\|_\infty \leq \|g\|_{p'} \|P(D)f\|_p + \|P^*(D)g\|_{p'} \|f\|_p, \quad (8)$$

$$\|Q(D)f\|_p \leq \|g\|_1 \|P(D)f\|_p + \|P^*(D)g\|_1 \|f\|_p. \quad (9)$$

Осталось хорошо выбрать функцию g . Но, как видно из формулы (6), и значения $g^{(\nu)}(0)$, $0 \leq \nu \leq r-1$, однозначно определяются по коэффициентам полинома Q . В частности, если $s \leq r-2$, то $g^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq r-s-2$. Возьмем теперь какую-либо функцию h с условиями $h^{(\nu)}(0) = g^{(\nu)}(0)$, $0 \leq \nu \leq r-1$ (многочлен Тейлора, например) и функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ с условиями $\varphi(x) = 1$ на $[0, 1]$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \geq 2$. Положим при любом $\delta \in (0, 1]$ $g_\delta(x) = h(x)\varphi(x/\delta)$. Очевидно, что $g_\delta^{(\nu)}(0) = h^{(\nu)}(0) = g^{(\nu)}(0)$ при $0 \leq \nu \leq r-1$ и $g_\delta(x) = 0$ при $x \geq 2\delta$.

Через γ с разными индексами обозначаем величины, не зависящие от f и δ .

В силу формулы Тейлора при $x \in [0, 2\delta]$ и $\nu \in [0, r]$

$$|h^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_1 \min\{1, \delta^{r-s-1-\nu}\}.$$

Используя это неравенство при $\nu = 0$, получаем при любом q

$$\|g_\delta\|_q \leq \gamma_1 \delta^{r-s-1} \left(\int_0^{2\delta} \left| \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right) \right|^q dx \right)^{1/q} = \gamma_1 \delta^{r-s-1+1/q} \left(\int_0^2 |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

А так как еще

$$\begin{aligned} |g_\delta^{(r)}(x)| &= \left| \sum_{\nu=0}^r \binom{r}{\nu} h^{(\nu)}(x) \varphi^{(r-\nu)}\left(\frac{x}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^{r-\nu}} \right| \\ &\leq \gamma_2 \left(\sum_{\nu=0}^{r-s-2} \delta^{r-s-1-\nu} \left| \varphi^{(r-\nu)}\left(\frac{x}{\delta}\right) \right| \frac{1}{\delta^{r-\nu}} + \sum_{\nu=r-s-1}^r \left| \varphi^{(r-\nu)}\left(\frac{x}{\delta}\right) \right| \frac{1}{\delta^{r-\nu}} \right), \end{aligned}$$

то и

$$\|g_\delta^{(r)}\|_q \leq \gamma_3 \left(\sum_{\nu=0}^{r-s-2} \delta^{1/q-s-1} + \sum_{\nu=r-s-1}^r \delta^{1/q+\nu-r} \right) \leq (r+1) \gamma_3 \delta^{1/q-s-1}.$$

Таким же образом можно оценить нормы и других производных g_δ или просто применить теорему о промежуточных производных. Имеем

$$\|P^*(D)g_\delta\|_q = \left\| \sum_{k=0}^r (-1)^k \bar{a}_k g_\delta^{(k)} \right\|_q \leq \gamma_4 (\|g_\delta\|_q + \|g_\delta^{(r)}\|_q) \leq \gamma_5 \delta^{1/q-s-1}.$$

Подставляя в неравенства (8) и (9) функцию g_δ и используя полученные оценки норм, получаем

$$\begin{aligned}\|Q(D)f\|_\infty &\leq \gamma_6 \delta^{-s-1/p} (\delta^r \|P(D)f\|_p + \|f\|_p), \\ \|Q(D)f\|_p &\leq \gamma_7 \delta^{-s} (\delta^r \|P(D)f\|_p + \|f\|_p).\end{aligned}$$

А тогда при $q \geq p$

$$\|Q(D)f\|_q \leq \|Q(D)f\|_\infty^{1-p/q} \|Q(D)f\|_p^{p/q} \leq \gamma_8 \delta^{-s+1/q-1/p} (\delta^r \|P(D)f\|_p + \|f\|_p).$$

Выбирая теперь δ так, чтобы $\gamma_8 \delta^{r-s+1/q-1/p} = \varepsilon$, получим искомое неравенство.

Интересно было бы найти минимальное γ в неравенстве леммы 2.

Если в равенстве (7) вместо неравенства Минковского применить неравенство Юнга для свертки (см., например, [2; 2.13]), то получим более общее неравенство, чем в лемме 2 (в правой части можно поставить нормы в L_{p_1} и в L_{p_2} при любых $p_1 \leq q$ и $p_2 \leq q$).

Отметим еще, что минимизируя правую часть неравенства леммы 2 по ε , можно перейти от аддитивного неравенства к мультипликативному.

Для доказательства точного неравенства теоремы 2 понадобится одно свойство решений дифференциального уравнения $P(D)f = g$.

ЛЕММА 3. *Если у полинома P нет нулей на мнимой оси, то среди решений уравнения $P(D)f = g$ порядка r с правой частью $g \in L_p(\mathbb{R}_+)$ при некотором $p \in [1, +\infty]$ есть функция из $W_p^r(\mathbb{R}_+)$. Если же у P есть чисто мнимые нули (на $i\mathbb{R}$) максимальной кратности n , то среди решений уравнения $P(D)f = g$, где g — локально интегрируема на $\mathbb{R}_+$ с условием $g(x) = O(1/x^{n+\varepsilon})$, $x \rightarrow +\infty$, $\varepsilon > 0$, есть функция с условием $|f(x)| + |f^{(r)}(x)| = O(1/x^\varepsilon)$, $x \rightarrow +\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем далее, что старший коэффициент P равен единице.

Пусть $\{f_k\}_1^r$ — фундаментальная система решений уравнения $P(D)f = 0$. Проверим сначала, что у уравнения $P(D)f = g$ (равенство почти всюду) имеется решение вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^r c_k \int_0^x g(t) f_k(x-t) dt. \quad (10)$$

Определим числовые коэффициенты $\{c_k\}_1^r$.

Так как

$$f'(x) = g(x) \sum_{k=1}^r c_k f_k(0) + \sum_{k=1}^r c_k \int_0^x g(t) f'_k(x-t) dt,$$

считаем далее, что $\sum_{k=1}^r c_k f_k(0) = 0$. Тогда при $r \geq 2$

$$f''(x) = g(x) \sum_{k=1}^r c_k f'_k(0) + \sum_{k=1}^r c_k \int_0^x g(t) f''_k(x-t) dt.$$

Полагаем $\sum_{k=1}^r c_k f'_k(0) = 0$ и так далее. Для определения $\{c_k\}_1^r$ имеем линейную систему

$$\sum_{k=1}^r c_k f_k^{(\nu)}(0) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq r-2, \quad \sum_{k=1}^r c_k f_k^{(r-1)}(0) = 1,$$

которая однозначно разрешима, так как ее определитель (опредетитель Вронского) не равен нулю.

При таких коэффициентах $\{c_k\}_1^r$

$$f^{(\nu)}(x) = \int_0^x g(t) \sum_{k=1}^r c_k f_k^{(\nu)}(x-t) dt, \quad 0 \leq \nu \leq r-1,$$

а

$$f^{(r)}(x) = g(x) + \int_0^x g(t) \sum_{k=1}^r c_k f_k^{(r)}(x-t) dt.$$

Тогда при $a_r = 1$

$$P(D)f = \sum_{\nu=0}^r a_\nu f^{(\nu)}(x) = g(x) + \int_0^x g(t) \sum_{k=1}^r c_k \sum_{\nu=0}^r a_\nu f_k^{(\nu)}(x-t) dt.$$

Но последняя сумма по ν равна нулю тождественно при любом $k \in [1, r]$, так как $P(D)f_k \equiv 0$. Поэтому $P(D)f = g$.

Пусть $P(\lambda) = 0$ и кратность нуля равна n . Тогда все n фундаментальных решений, соответствующих λ , удовлетворяют неравенству

$$|f_k(x)| + |f_k^{(r)}(x)| \leq M(1 + x^{n-1})e^{x \operatorname{Re} \lambda}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть сначала $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Тогда соответствующее слагаемое в выбранном решении (10) уравнения $P(D)f = g$ в силу неравенства Минковского

$$\left(\int_0^\infty \left| c_k \int_0^x g(t) f_k(x-t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \leq |c_k| \|g\|_p \int_0^\infty |f_k(u)| du < \infty.$$

Аналогично доказывается подобное неравенство для его r -й производной (вместо f_k стоит $f_k^{(r)}$). Таким образом, такие слагаемые в сумме (1) принадлежат $W_p^r(\mathbb{R}_+)$.

Пусть теперь $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

В этом случае из соответствующего слагаемого $c_k \int_0^x g(t) f_k(x-t) dt$ суммы (10) вычитаем функцию $c_k \int_0^\infty g(t) f_k(x-t) dt$, которая является решением однородного уравнения $P(D)f = 0$. Поэтому и после вычитания вся сумма останется решением уравнения $P(D)f = g$.

К новому слагаемому опять применяем неравенство Минковского:

$$\left(\int_0^\infty \left| c_k \int_x^\infty g(t) f_k(x-t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \leq |c_k| \|g\|_p \int_0^\infty |f_k(-u)| du < \infty.$$

Если $\operatorname{Re} \lambda = 0$, то и при $g \in L(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+)$ может не быть решения в $L_p(\mathbb{R}_+)$, $p < \infty$, и в $L_\infty(\mathbb{R}_+)$.

В этом случае $|f_k(x)| \leq M(1 + |x|)^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, и в силу условия леммы $|g(x)| \leq M_1(1/x^{n+\varepsilon})$ при $x \geq 1$. Поэтому при $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\infty g(t) f_k(x-t) dt \right| &= \left| \int_0^\infty g(x+t) f_k(-t) dt \right| \\ &\leq M M_1 \int_0^\infty \frac{(1+t)^{n-1}}{(x+t)^{n+\varepsilon}} dt \leq M M_1 \int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^{1+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

и r -я производная того же слагаемого ведет себя так же.

3. Доказательство теорем 1–4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость в теоремах 1, 3 и 4 уже доказана (см. лемму 1).

В равенстве (7) выберем функцию g такой, что $P^*(D)g = 0$ (см. (4)). Тогда

$$Q(D)f(x) = \int_0^\infty \bar{g}(t)P(D)f(x+t) dt.$$

Как видно из доказательства леммы 2, если еще $g \in W_{p'}^r \cap W_1^r(\mathbb{R}_+)$, то при $q \geq p \geq 1$ для всех $f \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$

$$\|Q(D)f\|_q \leq \gamma \|P(D)f\|_p. \quad (11)$$

Нужно доказать еще, что за счет выбора g можно получить все пары полиномов P и Q с указанными в теореме условиями.

Если $s = r$, то вычитанием из Q полинома cP можно при $p = q$ понизить степень Q , не нарушая этих условий. Так что считаем далее $s \leq r - 1$.

В случае $P(z) = z - \lambda$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, когда $P^*(z) = -z - \bar{\lambda}$, а $g(x) = e^{-x\bar{\lambda}}$, из неравенства (11) получаем при $q \geq p \geq 1$ и $f \in W_p^1(\mathbb{R}_+)$

$$\|f\|_q \leq \gamma \|(D - \lambda)f\|_p, \quad (12)$$

откуда при $q = p$ и любом $\mu \in \mathbb{C}$

$$\|(D - \mu)f\|_p \leq \|(D - \lambda)f\|_p + |\lambda - \mu| \|f\|_p \leq (1 + |\lambda - \mu|\gamma) \|(D - \lambda)f\|_p. \quad (13)$$

А теперь рассмотрим случай $(p, q) \neq (1, \infty)$. Пусть

$$P(z) = P_1(z) \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j), \quad Q(z) = P_1(z)Q_0(z),$$

где $P_1(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, $1 \leq j \leq m$, среди чисел $\{\lambda_j\}_1^m$ могут быть одинаковые, а $\deg Q_0 < m$.

С помощью неравенства (13), где вместо p стоит q , заменяем по одному все нули Q_0 на $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, а затем недостающие нули P добавляем с помощью неравенства (12).

Осталось рассмотреть отдельно случай $(1, \infty)$, когда при наличии у P чисто мнимых нулей их кратность у Q может быть на единицу меньше.

Опять используем естественную факторизацию полиномиального дифференциального оператора.

Если $P(z) = z - i\delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, то для $f \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$ (см. еще (3))

$$f(x) = - \int_x^\infty f'(t) dt, \quad \|f\|_\infty \leq \|f'\|_1,$$

а после замены $f(x)$ на $f(x)e^{-i\delta x}$ и

$$\|f\|_\infty \leq \|f' - i\delta f\|_1, \quad \delta \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Переходим к общему случаю.

Пусть кратность нуля $i\delta_k$ полинома P равна $(\alpha_k + 1) \in \mathbb{N}$, а полинома Q – равна α_k , $1 \leq k \leq n$, $\delta_k \neq \delta_\nu$ при $\nu \neq k$.

По доказанному ранее при $p = q = \infty$

$$\|Q(D)f\|_\infty \leq \gamma \|P_1(D)f\|_\infty,$$

где у P_1 те же нули при $\operatorname{Re} z \leq 0$ и той же кратности, что и у Q , а $\deg P_1 = \deg Q$. При этом

$$P_1(z) = P_0(z) \prod_{k=1}^n (z - i\delta_k)^{\alpha_k}, \quad P_0(ix) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Существуют числа $\{c_k\}_1^n$ такие, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^n c_k \prod_{\nu \neq k} (z - i\delta_\nu) = 1.$$

Это следует, например, из интерполяционной формулы Лагранжа ($c_k = \prod_{\nu \neq k} (i\delta_\nu - i\delta_k)^{-1}$, $1 \leq k \leq n$). Но тогда

$$P_1(z) = P_0(z) \sum_{k=1}^n c_k \prod_{\nu \neq k} (z - i\delta_\nu) \prod_{k=1}^n (z - i\delta_k)^{\alpha_k}$$

и, значит,

$$\|P_1(D)f\|_\infty \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \left\| (D - i\delta_k)^{\alpha_k} \prod_{\nu \neq k} (D - i\delta_\nu)^{\alpha_\nu + 1} P_0(D)f \right\|_\infty.$$

Применяя к каждому слагаемому неравенство (14) при $\delta = \delta_k$, получим

$$\|Q(D)f\|_\infty \leq \gamma \|P_1(D)f\|_\infty \leq \gamma \sum_{k=1}^n |c_k| \|P_2(D)f\|_1,$$

где $P_2(z) = P_0(z) \prod_{k=1}^n (z - i\delta_k)^{\alpha_k + 1}$.

Так как теперь кратности нулей P_2 при $\operatorname{Re} z \leq 0$ не ниже тех же кратностей нулей P , то достаточно применить уже доказанное (1, 1) неравенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $P(z) = Q(z) \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{\alpha_j}$, где Q – произвольный полином степени $s \geq 0$, а $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$.

Положим

$$R^*(z) = \frac{Q^*(z)}{P^*(z)} = \frac{(-1)^{\sum \alpha_j}}{\prod_{j=1}^m (z + \bar{\lambda}_j)^{\alpha_j}},$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} R^*(\zeta) e^{x\zeta} d\zeta,$$

где Γ_1 – замкнутый контур, внутри которого $\{-\bar{\lambda}_j\}$, $1 \leq j \leq m$, а остальные нули P^* , если они есть, вне Γ_1 . Функция g из теоремы 2 равна $-g_1$, что видно сразу после замены в интеграле ζ на $-\zeta$.

По теореме о вычетах ($r - \sum \alpha_j = s$)

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{r-s}}{(\alpha_j - 1)!} \lim_{z \rightarrow -\bar{\lambda}_j} \frac{d^{\alpha_j-1}}{dz^{\alpha_j-1}} \left\{ e^{xz} \prod_{\nu \neq j} (z + \bar{\lambda}_\nu)^{\alpha_\nu} \right\}.$$

Очевидно, что $P^*(D)g_1 = 0$ и $g_1 \in L_p(\mathbb{R}_+)$ для любого $p \in [1, \infty]$. Применим равенство (7) при $x = 0$ и найдем соответствующий g_1 (и P) полином Q_1 (см. (6)).

Если $P(z) = \sum_{k=0}^r a_k z^k$, то

$$\begin{aligned} Q_1^*(z) &= \overline{Q_1(-\bar{z})} = \sum_{k=1}^r (-1)^k \bar{a}_k \sum_{\nu=0}^{k-1} g_1^{(\nu)}(0) z^{k-\nu-1} \\ &= \sum_{k=1}^r (-1)^k \bar{a}_k \sum_{\nu=0}^{k-1} z^{k-\nu-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} R^*(\zeta) \zeta^\nu d\zeta. \end{aligned}$$

Вычисляя сумму по ν , получаем

$$Q_1^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} R^*(\zeta) \sum_{k=1}^r (-1)^k \bar{a}_k \frac{\zeta^k - z^k}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} R^*(\zeta) \frac{P^*(\zeta) - P^*(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Таким образом,

$$Q_1^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{Q^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - P^*(z) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{R^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Но для точек z внутри Γ_1 первый интеграл по формуле Коши равен $Q^*(z)$, а второй — нулю, так как подынтегральная функция при $|\zeta| \rightarrow \infty$ есть $O(1/|\zeta|^2)$. Так что $Q_1(z) \equiv Q(z)$.

Из равенства (7) и неравенства Гёльдера следует теперь

$$|Q(D)f(0)| = |Q_1(D)f(0)| \leq \|g_1\|_{p'} \|P(D)f\|_p = \|g\|_{p'} \|P(D)f\|_p.$$

Равенство в неравенстве Гёльдера при $p < \infty$ имеет место, если существует функция $f \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$ такая, что почти всюду на $\mathbb{R}_+$ при некоторой константе $c \neq 0$ и $\text{sign } z = |z|/z$ при $z \neq 0$

$$P(D)f(x) = c|g(x)|^{p'-1} \text{sign } \bar{g}(x).$$

Но $g(x) = O(e^{-\varepsilon x})$, $x \rightarrow +\infty$, при $0 < \varepsilon < \min_{1 \leq j \leq m} \text{Re } \lambda_j$. В силу леммы 3 такая функция существует.

Пусть теперь $p = \infty$ ($p' = 1$). В силу опять же леммы 3 при любом $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in W_p^r(\mathbb{R}_+)$ такая, что $P(D)f_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x} \text{sign } \bar{g}(x)$. Тогда из равенства (7)

$$|Q(D)f_\varepsilon(0)| = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |g(x)| dx = \|P(D)f_\varepsilon\|_\infty \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |g(x)| dx.$$

Поскольку предел интеграла при $\varepsilon \rightarrow +0$ равен $\|g\|_1$, и в этом случае константу $\|g\|_1$ уменьшить нельзя.

Для доказательства следствия нужно лишь заметить, что в этом случае $P(z) = (z - \lambda)Q(z)$, где $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{-x\zeta}}{\zeta - \bar{\lambda}} d\zeta = e^{-x\bar{\lambda}},$$

$$\|g\|_{p'} = \left(\int_0^\infty e^{-xp' \operatorname{Re} \lambda} dx \right)^{1/p'} = \left(\frac{1}{p' \operatorname{Re} \lambda} \right)^{1/p'}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕРАВЕНСТВАХ С ВЕСОМ. Пусть функция h абсолютно непрерывна на $[0, a]$ при любом $a > 0$ и $h'(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$. Если теперь (p, q) неравенство теоремы 1 при $q = p$ после сдвига на x (замена $\mathbb{R}_+$ на $[x, +\infty)$) возвести в степень p , умножить на $h'(x)$ и проинтегрировать по $\mathbb{R}_+$, то после перемены порядка интегрирования получим

$$\left(\int_0^\infty (h(x) - h(0)) |Q(D)f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \gamma \left(\int_0^\infty (h(x) - h(0)) |P(D)f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Например, чтобы разделить 0 и ∞ можно взять $h(x) = x^\alpha(1+x)^{\beta-\alpha}$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$.

Таким же образом из (p, ∞) неравенства теоремы 2 получаем другое неравенство

$$\left(\int_0^\infty h'(x) |Q(D)f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \gamma_0 \left(\int_0^\infty (h(x) - h(0)) |P(D)f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

которое к тому же бывает и точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. При $p = q$ можно применить мультипликаторы рядов Фурье (см. [3; гл. 7]).

Проверим, что последовательность $\{Q(ik)/P(ik)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ при $s < r$ после произвольного определения дробей вида $0/0$ является последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Для этого нужно лишь заметить, что при $|k| \rightarrow \infty$

$$\frac{Q(ik)}{P(ik)} = \frac{c}{ik} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

а

$$\sum_{k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{ik} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = (\pi - |x|) \operatorname{sign} x, \quad x \in \mathbb{T} = [-\pi, \pi).$$

Следовательно,

$$Q(D)f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)P(D)f(t) dt,$$

а отсюда, как и ранее, получаем (p, q) неравенство при $q \geq p$. В силу неравенства Гёльдера для интегралов на $\mathbb{T}$ справедливо и (p, q) неравенство при $q \leq p$.

При $s = r$ нужно из Q вычесть cP , понижая степень Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Необходимость указанных условий содержится в лемме 1. Искомое (p, q) неравенство можно доказывать для гладких и финитных функций f . Случай $p = 1$ и $q = \infty$ рассмотрен при доказательстве теоремы 1, а в остальных случаях поступаем аналогично доказательству достаточности в теореме 4.

Очевидно, что при $s < r$ и $x \rightarrow \infty$

$$\frac{Q(ix)}{P(ix)} = \frac{c}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Если $h_o(t) = (1 - |t|)_+ \cdot \text{sign } t$, то ее преобразование Фурье

$$\widehat{h}_o(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_o(t) e^{-itx} dt = -2i \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right).$$

Тогда функция

$$\phi(x) = \frac{Q(ix)}{P(ix)} - \frac{ci}{2} \widehat{h}_o(x)$$

принадлежит $C^\infty \cap L_1(\mathbb{R})$ и $|\phi(x)| + |\phi''(x)| = O(1/x^2)$ при $x \rightarrow \infty$.

Применяя к ϕ формулу обращения преобразования Фурье (см., например, [3; 3.1.10]), получим при некоторой функции $g \in L_1 \cap L_\infty(\mathbb{R})$

$$\frac{Q(ix)}{P(ix)} = \widehat{g}(x).$$

Если еще учесть, что $\widehat{Q(D)f}(x) = Q(ix)\widehat{f}(x)$ и, значит, $\widehat{Q(D)f} = \widehat{P(D)f} \cdot \widehat{g}$, то имеем представление в виде свертки

$$Q(D)f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(D)f(t) \cdot g(x-t) dt.$$

Осталось применить неравенство Юнга для свертки.

4. Примеры. а) Если $f \in W_2^2(\mathbb{R}_+)$ и $f(0) = 0$, то

$$|f'(0)| \leq 2^{-1/4} (\|f\|_2^2 + \|f''\|_2^2)^{1/2}.$$

б) Если $h \in (0, \pi/2)$, $f \in W_2^1[0, h]$ и $f(0) = 0$, то

$$|f(h)|^2 \operatorname{ctg} h \leq \int_0^h |f'(x)|^2 dx - \int_0^h |f(x)|^2 dx.$$

В статье [9] предлагается дать прямые доказательства неравенств а) и б). Именно эти вопросы послужили толчком к выполнению этой работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. а) Берем $Q(z) = z + e^{i\alpha}$ и $P(z) = (z - e^{i\alpha})Q(z) = z^2 - e^{2i\alpha}$ при $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Применяем следствие теоремы 2 при $p = 2$ и $\lambda = e^{i\alpha}$. Имеем

$$|f'(0) + e^{i\alpha}f(0)|^2 \leq \frac{1}{2 \cos \alpha} \int_0^\infty |f''(x) - e^{2i\alpha}f(x)|^2 dx.$$

Но $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2$ и

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |f''(x) - e^{2i\alpha}f(x)|^2 dx \\ &= \int_0^\infty |f''(x)|^2 dx + \int_0^\infty |f(x)|^2 dx - 2 \operatorname{Re} e^{2i\alpha} \int_0^\infty \bar{f}''(x) f(x) dx, \end{aligned}$$

а

$$\int_0^\infty (|f'(x)|^2 + \bar{f}''(x)f(x)) dx = \int_0^\infty \frac{d}{dx}(f(x)\bar{f}'(x)) dx = -f(0)\bar{f}'(0).$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty |f''(x) - e^{2i\alpha}f(x)|^2 dx = \|f''\|_2^2 + \|f\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(e^{2i\alpha}\|f'\|_2^2 + e^{2i\alpha}f(0)\bar{f}'(0))$$

и

$$2\cos\alpha|f'(0) + e^{i\alpha}f(0)|^2 - 2\operatorname{Re}(e^{2i\alpha}f(0)\bar{f}'(0)) \leq \|f''\|_2^2 + 2\cos 2\alpha\|f'\|_2^2 + \|f\|_2^2$$

или, учитывая, что $2\cos\alpha e^{i\alpha} - e^{2i\alpha} = 1$,

$$2\cos\alpha(|f'(0)|^2 + |f(0)|^2) - 2\operatorname{Re}f(0)\bar{f}'(0) \leq \|f''\|_2^2 + 2\cos 2\alpha\|f'\|_2^2 + \|f\|_2^2.$$

Равенство имеет место для функции $f \in W_2^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей уравнению

$$P^*(D)f = f'' - e^{-2i\alpha}f = ce^{-xe^{-i\alpha}}.$$

При $\alpha = \pi/4$ и $f(0) = 0$ получаем искомое неравенство, которое превращается в равенство, если $f(x) = Ce^{-x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2})$.

б) Для любой вещественной функции $g \in W_2^1[0, h]$ и $f \in W_2^1[0, h]$

$$\begin{aligned} \int_0^h |f'(x) - g(x)f(x)|^2 dx &= \int_0^h |f'(x)|^2 dx + \int_0^h |g(x)f(x)|^2 dx - \int_0^h g(x)\frac{d}{dx}|f(x)|^2 dx \\ &= \int_0^h |f'(x)|^2 dx + \int_0^h g^2(x)|f(x)|^2 dx \\ &\quad + [g(x)|f(x)|^2]_0^h + \int_0^h g'(x)|f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|f(0)|^2g(0) - |f(h)|^2g(h) + \int_0^h (g'(x) - g^2(x))|f(x)|^2 dx \leq \int_0^h |f'(x)|^2 dx$$

и равенство имеет место лишь в случае $f'(x) - g(x)f(x) = 0$ почти всюду на $[0, h]$, т.е. $f_g(x) = C \exp \int_0^x g(t) dt$.

Выберем g так, чтобы $g' - g^2 \equiv \varepsilon^2$, $\varepsilon > 0$, т.е. $g(x) = \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$, и положим $c = \pi/(2\varepsilon)$.

При $h\varepsilon < \pi/2$ $g(x) = -\varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon x$, а $f_g(x) = C \sin \varepsilon x$. Если еще учесть, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} f^2(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (-f^2(x)/x) = 0,$$

так как

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \sqrt{x} \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} = o(\sqrt{x}),$$

то получим при $\varepsilon h \in (0, \pi/2)$

$$\varepsilon \operatorname{ctg}(\varepsilon h)|f(h)|^2 + \varepsilon^2 \int_0^h |f(x)|^2 dx \leq \int_0^h |f'(x)|^2 dx.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003.
- [2] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука. Физмалит, М., 1996.
- [3] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [4] Р. М. Тригуб, “Мультипликаторы Фурье и K -функционалы пространств гладких функций”, *Укр. матем. вистник*, **2**:2 (2005), 236–280.
- [5] A. Sharma, J. Tzimbalario, “Landau-type inequalities for some linear differential operators”, *Illinois J. Math.*, **20**:3 (1976), 443–455.
- [6] Нгуен Тхи Тхьеу Хоа, “Некоторые экстремальные задачи на классах функций, задаваемых линейными дифференциальными операторами”, *Матем. сб.*, **180**:10 (1989), 1355–1395.
- [7] Р. М. Тригуб, “Мультипликаторы Фурье и точные неравенства для дифференциальных операторов”, *Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **11**:1 (2005), 219–228.
- [8] В. Н. Габушин, “Неравенства для норм функций и их производных в метриках L_p ”, *Матем. заметки*, **1**:3 (1967), 291–298.
- [9] B. R. Cramer, V. I. Gurariy, E. R. Tsekanovskii, “Results as by-Products”, *Alabama J. Math.*, **27**:1–2 (2003), 1–8.

Р. М. Тригуб

Донецкий национальный университет

E-mail: postmaster@ok.donbass.com

Поступило

27.02.2006

Исправленный вариант

16.10.2006