Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алиев, О разрешимости начально-краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 323–339

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:14:02

О разрешимости начально-краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка

А. Р. Алиев

В работе найдены достаточные условия регулярной разрешимости начально-краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами на полуоси. Эти условия выражены только в терминах операторных коэффициентов исследуемых уравнений. При этом получены оценки норм операторов промежуточных производных через главную часть уравнений, которая терпит разрыв и указана их связь с получением условий регулярной разрешимости.

Библиография: 16 названий.

1. Постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительно-определенный оператор в H .

Через $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ ($L_2(\mathbb{R}; H)$) обозначим гильбертово пространство всех вектор-функций, определенных в $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ ($\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$) со значениями из H , которые имеют конечную норму

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} \quad \left(\|f\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} \right).$$

Далее, определим следующие гильбертовы пространства:

$$\begin{aligned} W_2^3(\mathbb{R}_+; H) &= \left\{ u(t) : \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \in L_2(\mathbb{R}_+; H), A^3 u(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H) \right\}, \\ \dot{W}_2^3(\mathbb{R}_+; H) &= \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H), \frac{d^s u(0)}{dt^s} = 0, s = 0, 1, 2 \right\}, \\ \ddot{W}_2^3(\mathbb{R}_+; H; i, j) &= \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H), \frac{d^i u(0)}{dt^i} = \frac{d^j u(0)}{dt^j} = 0 \right\} \end{aligned}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \right)^{1/2},$$

где $i < j$ – фиксированные целые числа, причем i и j могут принимать только одно из значений: $i = 0, 1, j = 1, 2$, и

$$W_2^3(\mathbb{R}; H) = \left\{ u(t) : \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \in L_2(\mathbb{R}; H), A^3 u(t) \in L_2(\mathbb{R}; H) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}; H)} = \left(\left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}; H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}; H)}^2 \right)^{1/2}$$

(об этих пространствах подробнее см. [1; гл. 1]).

Здесь и в дальнейшем, производные понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Под $L(X, Y)$ будем понимать множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства X в другое гильбертово пространство Y , а $L_\infty(\mathbb{R}_+; B)$ – множество B -значных существенно ограниченных оператор-функций в $\mathbb{R}_+$, где B – банахово пространство.

Теперь рассмотрим следующее операторно-дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) \equiv -\frac{d^3 u(t)}{dt^3} + \rho(t) A^3 u(t) + A_1(t) \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_2(t) \frac{du(t)}{dt} = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

при выполнении начально-краевых условий

$$\frac{d^i u(0)}{dt^i} = \frac{d^j u(0)}{dt^j} = 0, \quad (1.2)$$

где $i < j$ – фиксированные целые числа, принимающие лишь одно из значений: $i = 0, 1, j = 1, 2$; $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$, $A_k(t)$, $k = 1, 2$, – линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, определенные почти при всех $t \in \mathbb{R}_+$, а $\rho(t) = \alpha$, если $0 \leq t \leq T$, и $\rho(t) = \beta$, если $T < t < +\infty$, причем α, β – положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа и для определенности будем считать $\alpha \leq \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Если вектор-функция $u(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в $\mathbb{R}_+$, то ее будем называть *регулярным решением уравнения (1.1)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Если при любом $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ существует регулярное решение уравнения (1.1), которое удовлетворяет начально-краевым условиям (1.2) в смысле

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| A^{5/2-i} \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right\|_H = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left\| A^{5/2-j} \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right\|_H = 0,$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)},$$

то будем говорить, что задача (1.1), (1.2) *регулярно разрешима*.

Следует отметить, что исследованием операторно-дифференциальных уравнений занимались многие авторы. Особо необходимо подчеркнуть работу [2], в которой

изучены задача Коши для таких уравнений и асимптотическое поведение их решений. В последующем изучению начальных и краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений был посвящен целый ряд работ, из которых выделим, например, [3]–[13].

В работах [3]–[10] и имеющихся там ссылках наряду с исследованием вопросов разрешимости операторно-дифференциальных уравнений указана связь, главным образом, между этой задачей и задачами спектральной теории соответствующих операторных пучков, а в работе [12] кроме изучения корректной разрешимости задачи Коши для одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами найдены условия ограниченности ее решений на полуоси. В работе же [13], в основном, выявлена связь между задачами регулярной разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений $2k$ -го порядка на полуоси и оценками норм операторов промежуточных производных, участвующих в возмущенной части уравнения. Отметим, что в упомянутых выше работах рассматриваются уравнения, в основном, четного порядка с постоянными операторными коэффициентами. Только лишь в работах [11], [13] главная часть уравнений терпит разрыв, а в [13], кроме того, возмущенная часть содержит переменные операторы.

В данной работе найдены достаточные условия регулярной разрешимости начально-краевых задач вида (1.1), (1.2). Наряду с этим указаны точные оценки норм операторов промежуточных производных через главную часть уравнения (1.1) в подпространствах $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H)$, $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$. При оценке таких норм мы прибегаем к применению метода факторизации одного класса полиномиальных операторных пучков шестого порядка, зависящих от действительного параметра. Такой подход позволяет нам получить новые теоремы разрешимости для уравнений вида (1.1) и улучшить ранее известные (в работе [11] изучена задача вида (1.1), (1.2) в случае $i = 0$, $j = 1$ с постоянными операторными коэффициентами в возмущенной части). Нахождение точных значений постоянных в оценках норм операторов промежуточных производных обусловлен тем, что дает возможность указать наиболее широкий класс операторно-дифференциальных уравнений, для которых имеют место теоремы разрешимости. Необходимо отметить, что эти оценки имеют самостоятельный математический интерес. Подобные оценки, например, тесно связаны с задачами наилучшего приближения оператора дифференцирования ограниченными операторами одного класса функций другими (см. [14]–[16] и имеющие там ссылки).

Теперь перейдем к изучению поставленных задач.

2. Теорема об изоморфизме. Сначала исследуем главную часть уравнения (1.1)

$$\mathcal{L}_0\left(\frac{d}{dt}; A\right)u(t) \equiv -\frac{d^3 u(t)}{dt^3} + \rho(t)A^3 u(t) = f(t),$$

где $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$ оператор, действующий из пространства $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_0^{(i,j)} u(t) \equiv \mathcal{L}_0\left(\frac{d}{dt}; A\right)u(t), \quad u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j).$$

Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Оператор $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$ осуществляет изоморфизм из пространства $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ на $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде покажем, что уравнение $\mathcal{L}_0^{(i,j)} u(t) = f(t)$ имеет решение $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ при любом $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi^3 E + \alpha A^3)^{-1} \left(\int_0^{+\infty} f(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{it\xi} d\xi, & t \in \mathbb{R}, \\ v_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi^3 E + \beta A^3)^{-1} \left(\int_0^{+\infty} f(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{it\xi} d\xi, & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ясно, что вектор-функции $v_1(t)$ и $v_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{d^3 v(t)}{dt^3} + \alpha A^3 v(t) = f(t), \quad -\frac{d^3 v(t)}{dt^3} + \beta A^3 v(t) = f(t),$$

соответственно в $\mathbb{R}_+$ почти всюду. Докажем, что $v_1(t)$ и $v_2(t)$ принадлежат $W_2^3(\mathbb{R}; H)$. Отметим, что из теоремы Планшереля следует, что достаточно показать принадлежность пространству $L_2(\mathbb{R}; H)$ величин $A^3 \widehat{v}_l(\xi)$, $\xi^3 \widehat{v}_l(\xi)$, $l = 1, 2$, где $\widehat{v}_1(\xi)$ и $\widehat{v}_2(\xi)$ есть преобразования Фурье вектор-функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$, соответственно. Из спектральной теории самосопряженных операторов вытекает, что

$$\begin{aligned} \|A^3 \widehat{v}_1(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} &= \|A^3 (i\xi^3 E + \alpha A^3)^{-1} \widehat{f}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|A^3 (i\xi^3 E + \alpha A^3)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|\widehat{f}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \sup_{\sigma \in \sigma(A)} |\sigma^3 (i\xi^3 + \alpha \sigma^3)^{-1}| \|\widehat{f}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} \\ &= \text{const} \|\widehat{f}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} = \text{const} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}; H)}. \end{aligned}$$

Здесь $\widehat{f}(\xi)$ – преобразование Фурье вектор-функции $f(t)$, $\sigma(A)$ – спектр оператора A .

Аналогичным образом доказывается, что $\xi^3 \widehat{v}_1(\xi) \in L_2(\mathbb{R}; H)$. Следовательно, $v_1(t) \in W_2^3(\mathbb{R}; H)$. Таким же образом $v_2(t) \in W_2^3(\mathbb{R}; H)$. Теперь обозначим сужения вектор-функций $v_1(t)$ на $[0; T)$ и $v_2(t)$ на $(T; +\infty)$ через $u_\alpha(t)$ и $u_\beta(t)$, соответственно. Очевидно, что $u_\alpha(t) \in W_2^3([0; T); H)$, $u_\beta(t) \in W_2^3((T; +\infty); H)$. Продолжая, обозначим

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = u_\alpha(t) + e^{\sqrt[3]{\alpha}\omega_1 t A} \eta_0 + e^{\sqrt[3]{\alpha}\omega_2 t A} \eta_1 + e^{-\sqrt[3]{\alpha}(T-t)A} \eta_2, & \text{если } 0 \leq t < T, \\ u_2(t) = u_\beta(t) + e^{\sqrt[3]{\beta}\omega_1(t-T)A} \eta_3 + e^{\sqrt[3]{\beta}\omega_2(t-T)A} \eta_4, & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases}$$

где $\omega_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $\omega_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$, а e^{-tA} , $e^{\omega_1 t A}$, $e^{\omega_2 t A}$ – сильно непрерывные полугруппы ограниченных операторов, порожденных операторами $-A$, $\omega_1 A$, $\omega_2 A$, соответственно, векторы же $\eta_l \in D(A^{5/2})$, $l = 0, \dots, 4$, и их определяем из условия, что $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$, т.е. должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d^i u_1(0)}{dt^i} &= 0, & \frac{d^j u_1(0)}{dt^j} &= 0, & u_1(T) &= u_2(T), \\ \frac{du_1(T)}{dt} &= \frac{du_2(T)}{dt}, & \frac{d^2 u_1(T)}{dt^2} &= \frac{d^2 u_2(T)}{dt^2}. \end{aligned}$$

Поэтому получаем следующую систему уравнений относительно η_l , $l = 0, \dots, 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^i u_\alpha(0)}{dt^i} + \alpha^{i/3} \omega_1^i A^i \eta_0 + \alpha^{i/3} \omega_2^i A^i \eta_1 + \alpha^{i/3} A^i e^{-\sqrt[3]{\alpha} T A} \eta_2 = 0, \\ \frac{d^j u_\alpha(0)}{dt^j} + \alpha^{j/3} \omega_1^j A^j \eta_0 + \alpha^{j/3} \omega_2^j A^j \eta_1 + \alpha^{j/3} A^j e^{-\sqrt[3]{\alpha} T A} \eta_2 = 0, \\ u_\alpha(T) + e^{\sqrt[3]{\alpha} \omega_1 T A} \eta_0 + e^{\sqrt[3]{\alpha} \omega_2 T A} \eta_1 + \eta_2 = u_\beta(T) + \eta_3 + \eta_4, \\ \frac{du_\alpha(T)}{dt} + \sqrt[3]{\alpha} \omega_1 A e^{\sqrt[3]{\alpha} \omega_1 T A} \eta_0 + \sqrt[3]{\alpha} \omega_2 A e^{\sqrt[3]{\alpha} \omega_2 T A} \eta_1 + \sqrt[3]{\alpha} A \eta_2 \\ = \frac{du_\beta(T)}{dt} + \sqrt[3]{\beta} \omega_1 A \eta_3 + \sqrt[3]{\beta} \omega_2 A \eta_4, \\ \frac{d^2 u_\alpha(T)}{dt^2} + \sqrt[3]{\alpha^2} \omega_1^2 A^2 e^{\sqrt[3]{\alpha} \omega_1 T A} \eta_0 + \sqrt[3]{\alpha^2} \omega_2^2 A^2 e^{\sqrt[3]{\alpha} \omega_2 T A} \eta_1 + \sqrt[3]{\alpha^2} A^2 \eta_2 \\ = \frac{d^2 u_\beta(T)}{dt^2} + \sqrt[3]{\beta^2} \omega_1^2 A^2 \eta_3 + \sqrt[3]{\beta^2} \omega_2^2 A^2 \eta_4. \end{array} \right.$$

Отсюда получаем операторное уравнение

$$M(A)\eta = \zeta,$$

где

$$M(A) = \begin{pmatrix} \alpha^{i/3} \omega_1^i E & \alpha^{i/3} \omega_2^i E & \alpha^{i/3} e^{-\alpha^{1/3} T A} & 0 & 0 \\ \alpha^{j/3} \omega_1^j E & \alpha^{j/3} \omega_2^j E & \alpha^{j/3} e^{-\alpha^{1/3} T A} & 0 & 0 \\ e^{\alpha^{1/3} \omega_1 T A} & e^{\alpha^{1/3} \omega_2 T A} & E & -E & -E \\ \alpha^{1/3} \omega_1 e^{\alpha^{1/3} \omega_1 T A} & \alpha^{1/3} \omega_2 e^{\alpha^{1/3} \omega_2 T A} & \alpha^{1/3} E & -\beta^{1/3} \omega_1 E & -\beta^{1/3} \omega_2 E \\ \alpha^{2/3} \omega_1^2 e^{\alpha^{1/3} \omega_1 T A} & \alpha^{2/3} \omega_2^2 e^{\alpha^{1/3} \omega_2 T A} & \alpha^{2/3} E & -\beta^{2/3} \omega_1^2 E & -\beta^{2/3} \omega_2^2 E \end{pmatrix},$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} -A^{-i} \frac{d^i u_\alpha(0)}{dt^i} \\ -A^{-j} \frac{d^j u_\alpha(0)}{dt^j} \\ u_\beta(T) - u_\alpha(T) \\ A^{-1} \left(\frac{du_\beta(T)}{dt} - \frac{du_\alpha(T)}{dt} \right) \\ A^{-2} \left(\frac{d^2 u_\beta(T)}{dt^2} - \frac{d^2 u_\alpha(T)}{dt^2} \right) \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $u_\alpha(t) \in W_2^3([0; T]; H)$ и $u_\beta(t) \in W_2^3((T; +\infty); H)$, из теоремы о следах [1; гл. 1] следует, что все элементы вектора ζ принадлежат $D(A^{5/2})$. Далее, используя спектральное разложение оператора A , нетрудно видеть, что оператор-матрица $M(A)$ ограниченно обратима в $H^5 = \bigoplus_{m=1}^5 H$. Отсюда легко получается, что все $\eta_l \in D(A^{5/2})$, $l = 0, \dots, 4$. Следовательно, $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$. Повторяя те же рассуждения, имеем, что уравнение $\mathcal{L}_0^{(i,j)} u(t) = 0$ обладает лишь тривиальным решением.

Ограниченность оператора $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$ вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}_0^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &= \left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{d^3 u}{dt^3}, \rho(t) A^3 u \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \|\rho(t) A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &\leq 2 \left(\left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|\rho(t) A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \right) \\ &\leq 2 \left(\left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \beta^2 \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \right) \leq 2 \max(1; \beta^2) \|u\|_{\dot{W}_2^3(\mathbb{R}_+; H)}^2, \end{aligned}$$

ввиду того, что

$$\left(\frac{d^3 u}{dt^3}, \rho(t) A^3 u \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \left(\rho(t) A^3 u, \frac{d^3 u}{dt^3} \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{d^3 u}{dt^3}, \rho(t) A^3 u \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Таким образом, $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$ ограничен и взаимно однозначно действует из пространства $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ на пространство $L_2(\mathbb{R}_+; H)$. Далее же, применяя теорему Банаха об обратном операторе, получаем, что оператор $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$ изоморфно отображает пространство $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ на $L_2(\mathbb{R}_+; H)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В работе [11] при $i = 0, j = 1$ теорема 2.1 доказана немного иным образом.

Теперь через $\mathcal{L}_1^{(i,j)}$ обозначим оператор, действующий из пространства $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_1^{(i,j)} u(t) \equiv A_1(t) \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_2(t) \frac{du(t)}{dt}, \quad u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j).$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $A_k(t) A^{-k} \in L_\infty(\mathbb{R}_+; L(H, H))$, $k = 1, 2$. Тогда оператор $\mathcal{L}_1^{(i,j)}$ является ограниченным оператором из пространства $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любой вектор-функции $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$

$$\|\mathcal{L}_1^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \sum_{k=1}^2 \sup_t \|A_{3-k}(t) A^{-3+k}\|_{H \rightarrow H} \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}, \quad (2.1)$$

применяя теорему о промежуточных производных [1; гл. 1], из неравенства (2.1) получим, что

$$\|\mathcal{L}_1^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \operatorname{const} \|u\|_{\dot{W}_2^3(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Теорема доказана.

3. О факторизации одного класса полиномиальных операторных пучков. Изучим некоторые свойства полиномиальных операторных пучков, которые имеют важное значение в дальнейших исследованиях.

Пусть

$$q_k = \frac{2^{2/3} \beta^{k/3}}{3\alpha^{(3-k)/3}}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда рассмотрим следующие полиномиальные операторные пучки, зависящие от параметра $\gamma \in [0; q_k^{-1})$, $k = 1, 2$:

$$Q_k(\lambda; \gamma; A) = \frac{1}{\beta} (i\lambda)^6 E + \alpha A^6 - \gamma (i\lambda)^{2k} A^{6-2k}, \quad k = 1, 2,$$

характеристическими полиномами которых являются

$$Q_k(\lambda; \gamma; \sigma) = \frac{1}{\beta} (i\lambda)^6 + \alpha \sigma^6 - \gamma (i\lambda)^{2k} \sigma^{6-2k}, \quad k = 1, 2,$$

где $\sigma \in \sigma(A)$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 3.1. Пусть $\gamma \in [0; q_k^{-1})$, $k = 1, 2$. Тогда полиномиальные операторные пучки $Q_k(\lambda; \gamma; A)$, $k = 1, 2$, обратимы на мнимой оси и они допускают следующие представления:

$$Q_k(\lambda; \gamma; A) = F_k(\lambda; \gamma; A) F_k(-\lambda; \gamma; A), \quad k = 1, 2,$$

причем

$$\begin{aligned} F_k(\lambda; \gamma; A) &= \prod_{n=1}^3 \left(\frac{1}{\sqrt[6]{\beta}} \lambda E - \sqrt[6]{\alpha} \omega_{k,n}(\gamma) A \right) \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt[6]{\beta}} \lambda^3 E + d_{1,k}(\gamma) \lambda^2 A + d_{2,k}(\gamma) \lambda A^2 + \sqrt[6]{\alpha} A^3, \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} \omega_{k,n}(\gamma) < 0$, $n = 1, 2, 3$, а числа $d_{1,k}(\gamma)$, $d_{2,k}(\gamma)$ удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{при } k = 1 & 2) \quad & \text{при } k = 2 \\ \begin{cases} d_{1,1}^2(\gamma) - \frac{2d_{2,1}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} = 0, \\ 2\sqrt{\alpha} d_{1,1}(\gamma) - d_{2,1}^2(\gamma) = \gamma; \end{cases} & \begin{cases} \frac{2d_{2,2}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} - d_{1,2}^2(\gamma) = \gamma, \\ 2\sqrt{\alpha} d_{1,2}(\gamma) - d_{2,2}^2(\gamma) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. Тогда очевидно, что для характеристических полиномов имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Q_k(\lambda; \gamma; \sigma) &= Q_k(i\xi; \gamma; \sigma) = \sigma^6 \left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{\xi^2}{\sigma^2} \right)^3 + \alpha \right) \left[1 - \gamma \frac{(\xi^2/\sigma^2)^k}{(1/\beta)(\xi^2/\sigma^2)^3 + \alpha} \right] \\ &\geq \sigma^6 \left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{\xi^2}{\sigma^2} \right)^3 + \alpha \right) \left[1 - \gamma \sup_{\xi^2/\sigma^2 \geq 0} \frac{(\xi^2/\sigma^2)^k}{(1/\beta)(\xi^2/\sigma^2)^3 + \alpha} \right], \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\sup_{\xi^2/\sigma^2 \geq 0} \frac{(\xi^2/\sigma^2)^k}{(1/\beta)(\xi^2/\sigma^2)^3 + \alpha} = q_k, \quad k = 1, 2,$$

получаем

$$Q_k(i\xi; \gamma; \sigma) > 0 \quad (3.2)$$

при $\gamma \in [0; q_k^{-1})$, $k = 1, 2$. Из неравенств (3.2) следуют, что полиномы $Q_k(\lambda; \gamma; \sigma)$ не имеют корней на мнимой оси при $\gamma \in [0; q_k^{-1})$, $k = 1, 2$. Очевидно, что каждый из характеристических полиномов $Q_k(\lambda; \gamma; \sigma)$ имеет при $\sigma \in \sigma(A)$ ровно три корня из левой полуплоскости. Так как эти полиномы однородны относительно аргументов λ и σ , их можно представить следующим образом:

$$Q_k(\lambda; \gamma; \sigma) = F_k(\lambda; \gamma; \sigma)F_k(-\lambda; \gamma; \sigma), \quad k = 1, 2, \quad (3.3)$$

где

$$F_k(\lambda; \gamma; \sigma) = \prod_{n=1}^3 \left(\frac{1}{\sqrt[6]{\beta}} \lambda - \omega_{k,n}(\gamma) \sqrt[6]{\alpha} \sigma \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{\beta}} \lambda^3 + d_{1,k} \lambda^2 \sigma + d_{2,k} \lambda \sigma^2 + \sqrt{\alpha} \sigma^3,$$

причем $\operatorname{Re} \omega_{k,n}(\gamma) < 0$, $k = 1, 2, 3$, а числа $d_{1,k}(\gamma)$, $d_{2,k}(\gamma)$ удовлетворяют следующим системам уравнений, получающихся из формул (3.3) в процессе сравнений коэффициентов при одинаковых степенях:

1) при $k = 1$

$$\begin{cases} d_{1,1}^2(\gamma) - \frac{2d_{2,1}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} = 0, \\ 2\sqrt{\alpha}d_{1,1}(\gamma) - d_{2,1}^2(\gamma) = \gamma; \end{cases}$$

2) при $k = 2$

$$\begin{cases} \frac{2d_{2,2}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} - d_{1,2}^2(\gamma) = \gamma, \\ 2\sqrt{\alpha}d_{1,2}(\gamma) - d_{2,2}^2(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Далее же, используя спектральное разложение оператора A , из равенств (3.3) мы получаем доказательство леммы. Лемма доказана.

Теперь сформулируем теорему, играющую существенную роль в дальнейших исследованиях и указывающую на важность изучения спектральных свойств ранее введенных полиномиальных операторных пучков $Q_k(\lambda; \gamma; A)$ и $F_k(\lambda; \gamma; A)$, $k = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\gamma \in [0; q_k^{-1})$. Тогда для любого $u(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 - \gamma \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &= \left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + (R_k(\gamma) \varphi, \varphi)_{H^3}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$H^3 = \bigoplus_{m=1}^3 H,$$

$$R_k(\gamma) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha}d_{2,k}(\gamma) & \sqrt{\alpha}d_{1,k}(\gamma) & \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \\ \sqrt{\alpha}d_{1,k}(\gamma) & d_{1,k}(\gamma)d_{2,k}(\gamma) - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} & \frac{d_{2,k}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} \\ \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} & \frac{d_{2,k}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} & \frac{d_{1,k}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \left(\varphi_p = A^{3-p-1/2} \frac{d^p u(0)}{dt^p} \right)_{p=0}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде определим пространство $\mathscr{D}^3(\mathbb{R}_+; H)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $D(A^3)$, имеющих компактный носитель в $\mathbb{R}_+$. Так как пространство $\mathscr{D}^3(\mathbb{R}_+; H)$ плотно в $W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$ (см. [1; гл. 1]), достаточно доказать теорему для вектор-функций $u(t) \in \mathscr{D}^3(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + d_{1,k}^2(\gamma) \left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + d_{2,k}^2(\gamma) \left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &+ \alpha \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + 2 \frac{d_{1,k}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Re} \left(\frac{d^3 u}{dt^3}, A \frac{d^2 u}{dt^2} \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &+ 2 \frac{d_{2,k}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Re} \left(\frac{d^3 u}{dt^3}, A^2 \frac{du}{dt} \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Re} \left(\frac{d^3 u}{dt^3}, A^3 u \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &+ 2 d_{1,k}(\gamma) d_{2,k}(\gamma) \operatorname{Re} \left(A \frac{d^2 u}{dt^2}, A^2 \frac{du}{dt} \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &+ 2 \sqrt{\alpha} d_{1,k}(\gamma) \operatorname{Re} \left(A \frac{d^2 u}{dt^2}, A^3 u \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &+ 2 \sqrt{\alpha} d_{2,k}(\gamma) \operatorname{Re} \left(A^2 \frac{du}{dt}, A^3 u \right)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \end{aligned}$$

и, применяя здесь интегрирование по частям, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &= \frac{1}{\beta} \left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \alpha \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \left(d_{1,k}^2(\gamma) - \frac{2d_{2,k}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} \right) \left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &+ (d_{2,k}^2(\gamma) - 2\sqrt{\alpha}d_{1,k}(\gamma)) \left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 - \frac{d_{1,k}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} \|\varphi_2\|^2 - 2 \frac{d_{2,k}(\gamma)}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Re}(\varphi_2, \varphi_1) \\ &- 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Re}(\varphi_2, \varphi_0) + \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - d_{1,k}(\gamma)d_{2,k}(\gamma) \right) \|\varphi_1\|^2 \\ &- 2\sqrt{\alpha}d_{1,k}(\gamma) \operatorname{Re}(\varphi_1, \varphi_0) - \sqrt{\alpha}d_{2,k}(\gamma) \|\varphi_0\|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Если мы вычислим

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+ H)}^2$$

аналогично

$$\left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2,$$

то находим, что

$$\begin{aligned} & \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+ H)}^2 \\ &= \frac{1}{\beta} \left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+ H)}^2 + \alpha \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{Re}(\varphi_2, \varphi_0) - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \|\varphi_1\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Принимая во внимание (3.6) в (3.5), по лемме 3.1 получаем справедливость равенства (3.4). Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H)$ и $\gamma \in [0; q_k^{-1})$, то

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+ H)}^2 - \gamma \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+ H)}^2 = \left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+ H)}^2. \quad (3.7)$$

4. Об оценках норм операторов промежуточных производных. Из теоремы 2.1 вытекает, что $\|\mathcal{L}_0^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$ является нормой в пространстве $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$, эквивалентной исходной норме $\|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)}$. Так как известно, что операторы промежуточных производных

$$A^{3-k} \frac{d^k}{dt^k} : \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+; H), \quad k = 1, 2,$$

непрерывны [1; гл. 1], нормы этих операторов можно оценить через $\|\mathcal{L}_0^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$.

Отметим, что эквивалентность норм $\|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)}$ и

$$\left\| -\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$$

в пространствах $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H)$ и $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ очевидна.

Займемся вычислением следующих чисел:

$$\begin{aligned} b_{0,k} &= \sup_{0 \neq u \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H)} \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{-1}, \\ b_{i,j,k} &= \sup_{0 \neq u \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)} \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{-1}. \end{aligned}$$

Сначала вычислим $b_{0,k}$.

ЛЕММА 4.1. Числа $b_{0,k} = q_k^{1/2}$, $k = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В равенстве (3.7), переходя к пределу при $\gamma \rightarrow q_k^{-1}$, имеем, что для любой вектор-функции $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H)$ справедливо следующее неравенство:

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \geq q_k^{-1} \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2,$$

тем самым, получаем, что

$$b_{0,k} \leq q_k^{1/2}, \quad k = 1, 2.$$

Теперь нужно показать, что здесь имеет место равенство. С этой целью, для заданного $\varepsilon > 0$ необходимо показать существование такой вектор-функции $u_\varepsilon(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H)$, что функционал

$$\Phi(u_\varepsilon) \equiv \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u_\varepsilon}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u_\varepsilon \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 - (q_k^{-1} + \varepsilon) \left\| A^{3-k} \frac{d^k u_\varepsilon}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 < 0.$$

Построение такой функции $u_\varepsilon(t)$ проводится аналогично как в работе [10; доказательство теоремы 3]. Лемма доказана.

В силу того, что $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H) \subset \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$, имеем $b_{i,j,k} \geq b_{0,k} = q_k^{1/2}$, $k = 1, 2$. Следует отметить, что для любой вектор-функции $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ и $\gamma \in [0; q_k^{-1})$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 - \gamma \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &= \left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + (R_k(\gamma; i, j) \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_H, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $R_k(\gamma; i, j)$ получается из $R_k(\gamma)$ отбрасыванием $(i+1)$ -х и $(j+1)$ -х строк и столбцов, $\tilde{\varphi} = A^{5/2-r} d^r u(0)/dt^r$, $r \neq i, j$. Справедливость равенства (4.1) непосредственно следует из теоремы 3.1. Следующая же лемма показывает, когда числа $b_{i,j,k}$, $k = 1, 2$, могут равняться $q_k^{1/2}$, $k = 1, 2$.

ЛЕММА 4.2. Для того, чтобы $b_{i,j,k} = q_k^{1/2}$ необходимо и достаточно, чтобы $R_k(\gamma; i, j)$ было положительным при любом $\gamma \in [0; q_k^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $b_{i,j,k} = q_k^{1/2}$. Тогда из равенства (4.1) для любой вектор-функции $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ и $\gamma \in [0; q_k^{-1})$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + (R_k(\gamma; i, j) \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_H \\ & \geq \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 (1 - \gamma b_{i,j,k}^2) > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как полиномиальный операторный пучок $F_k(\lambda; \gamma; A)$ при $\gamma \in [0; q_k^{-1})$ имеет вид (см. лемма 3.1)

$$F_k(\lambda; \gamma; A) = \prod_{n=1}^3 \left(\frac{1}{\sqrt[6]{\beta}} \lambda E - \sqrt[6]{\alpha} \omega_{k,n}(\gamma) A \right),$$

где $\operatorname{Re} \omega_{k,n}(\gamma) < 0$, $n = 1, 2, 3$, задача Коши

$$F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u(t) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{d^i u(0)}{dt^i} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{d^j u(0)}{dt^j} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{d^r u(0)}{dt^r} = A^{-(5/2-r)} \tilde{\varphi}, \quad i \neq r, \quad j \neq r, \quad \tilde{\varphi} \in H, \quad (4.6)$$

имеет единственное решение $u_\gamma(t) \in W_2^3(\mathbb{R}_+; H)$, представимое в следующем виде:

$$u_\gamma(t) = e^{\sqrt[6]{\alpha\beta}\omega_{k,1}(\gamma)tA} \psi_0 + e^{\sqrt[6]{\alpha\beta}\omega_{k,2}(\gamma)tA} \psi_1 + e^{\sqrt[6]{\alpha\beta}\omega_{k,3}(\gamma)tA} \psi_2,$$

где $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in D(A^{5/2})$, которые подлежат однозначному определению из условий в нуле (4.4)–(4.6). Таким образом, записав неравенство (4.2) для вектор-функции $u_\gamma(t)$, получаем, что при $\gamma \in [0; q_k^{-1})$ $(R_k(\gamma; i, j) \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_H > 0$.

Достаточность. Если при любом $\gamma \in [0; q_k^{-1})$ число $R_k(\gamma; i, j)$ положительно, то из равенства (4.1) следует, что при всех $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ и $\gamma \in [0; q_k^{-1})$

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \geq \gamma \left\| A^{3-k} \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2.$$

Переходя здесь к пределу при $\gamma \rightarrow q_k^{-1}$, получаем: $b_{i,j,k} \leq q_k^{1/2}$, тем самым, имеем $b_{i,j,k} = q_k^{1/2}$. Лемма доказана.

Отметим, что при специально выбранных i, j и k может оказаться, что $b_{i,j,k} > q_k^{1/2}$.

ЛЕММА 4.3. *Тогда и только тогда $b_{i,j,k} > q_k^{1/2}$, когда уравнение $R_k(\gamma; i, j) = 0$ имеет решение из интервала $(0; q_k^{-1})$, причем этот корень равен $b_{i,j,k}^{-2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b_{i,j,k} > q_k^{1/2}$. Тогда $b_{i,j,k}^{-2} \in (0; q_k^{-1})$. Из (4.1) при $\gamma \in (0; b_{i,j,k}^{-2})$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + (R_k(\gamma; i, j) \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_H \\ & \geq \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 (1 - \gamma b_{i,j,k}^2) > 0. \end{aligned}$$

Если в последнем неравенстве взять решение задачи (4.3)–(4.6), то получим, что число $R_k(\gamma; i, j)$ положительно при $\gamma \in [0; b_{i,j,k}^{-2}]$. Из определения $b_{i,j,k}$ имеем, что при $\gamma \in (b_{i,j,k}^{-2}; q_k^{-1})$ существует вектор-функция $v_\gamma(t) \in \mathring{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ такая, что

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 v_\gamma}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 v_\gamma \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 < \gamma \left\| A^{3-k} \frac{d^k v_\gamma}{dt^k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2.$$

Учитывая последнее неравенство в (4.1), находим, что

$$\left\| F_k \left(\frac{d}{dt}; \gamma; A \right) v_\gamma \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + (R_k(\gamma; i, j) \tilde{\varphi}_\gamma, \tilde{\varphi}_\gamma)_H < 0,$$

где

$$\tilde{\varphi}_\gamma = A^{5/2-r} \frac{d^r v_\gamma(0)}{dt^r}, \quad r \neq i, j.$$

Тем самым, существует вектор $\tilde{\varphi}_\gamma \in H$ такой, что при $\gamma \in (b_{i,j,k}^{-2}; q_k^{-1})$ выполнено $(R_k(\gamma; i, j) \tilde{\varphi}_\gamma, \tilde{\varphi}_\gamma)_H < 0$. В силу того, что $R_k(\gamma; i, j)$ – непрерывная функция аргумента $\gamma \in [0; q_k^{-1}]$, имеем $R_k(b_{i,j,k}^{-2}; i, j) = 0$, а это означает, что уравнение $R_k(\gamma; i, j) = 0$ имеет корень из интервала $(0; q_k^{-1})$. Обратно, если $R_k(\gamma; i, j) = 0$ имеет корень из интервала $(0; q_k^{-1})$, то это означает, что для любого $\gamma \in [0; q_k^{-1})$ число $R_k(\gamma; i, j)$ не может быть положительным. Поэтому по лемме 4.2 $b_{i,j,k} > q_k^{1/2}$. Обозначив корень уравнения $R_k(\gamma; i, j) = 0$ через $\mu_{i,j,k}$, увидим, что $b_{i,j,k}^{-2} \leq \mu_{i,j,k}$ в силу того, что из доказательства леммы получено, что при $\gamma \in [0; b_{i,j,k}^{-2})$ число $R_k(\gamma; i, j)$ положительно. А в силу того, что $R_k(b_{i,j,k}^{-2}; i, j) = 0$, находим, что $b_{i,j,k}^{-2} = \mu_{i,j,k}$. Лемма доказана.

В результате, объединяя последние две леммы, получаем следующую теорему, которая является одной из основных целей данной работы.

ТЕОРЕМА 4.1. *Справедливо следующее равенство:*

$$b_{i,j,k} = \begin{cases} q_k^{1/2} & \text{при } R_k(\gamma; i, j) \neq 0, \quad \gamma \in (0; q_k^{-1}), \\ \mu_{i,j,k}^{-1/2} & \text{в обратном случае.} \end{cases}$$

Теперь, конкретно рассматривая случаи i, j и k , имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *Имеем*

$$\begin{aligned} b_{0,1,1} &= b_{1,2,1} = q_1^{1/2}, & b_{0,2,1} &= \frac{\beta^{1/6}}{2^{1/3} \alpha^{1/3}}, \\ b_{0,1,2} &= b_{1,2,2} = q_2^{1/2}, & b_{0,2,2} &= \frac{\beta^{1/3}}{2^{1/3} \alpha^{1/6}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая вышеизложенные, для нахождения чисел $b_{i,j,k}$ мы должны решать системы (3.1) вместе с уравнениями $R_k(\gamma; i, j) = 0$.

В случае $i = 0, j = 1, k = 1$ получаем, что $d_{1,1}(\gamma) = 0$, откуда $d_{2,1}(\gamma) = 0$ и, значит, $\gamma = 0 \notin (0; q_1^{-1})$. Поэтому $b_{0,1,1} = q_1^{1/2}$. Для нахождения числа $b_{0,2,1}$ мы должны

решать систему (3.1) при $k = 1$ вместе с уравнением $d_{1,1}(\gamma)d_{2,1}(\gamma) - 2\sqrt{\alpha}/\sqrt{\beta} = 0$. При этом

$$d_{1,1}(\gamma) = \frac{2^{2/3}\alpha^{1/6}}{\beta^{1/3}}, \quad d_{2,1}(\gamma) = \frac{2^{1/3}\alpha^{1/3}}{\beta^{1/6}};$$

следовательно, $\gamma = 2^{2/3}\alpha^{2/3}/\beta^{1/3} \in (0; q_1^{-1})$. Таким образом, $b_{0,2,1} = \beta^{1/6}/(2^{1/3}\alpha^{1/3})$. В случае $i = 1, j = 2, k = 1$ получаем, что $d_{2,1}(\gamma) = 0$, откуда $d_{1,1}(\gamma) = 0$ и, значит, $\gamma = 0 \notin (0; q_1^{-1})$. Поэтому $b_{1,2,1} = q_1^{1/2}$. Аналогичным образом находим, что $b_{0,1,2} = b_{1,2,2} = q_2^{1/2}$ и $b_{0,2,2} = \beta^{1/3}/(2^{1/3}\alpha^{1/6})$. Теорема доказана.

5. Достаточные условия разрешимости начально-краевых задач на полуоси. В дальнейшем при получении условий регулярной разрешимости начально-краевых задач вида (1.1), (1.2) нам понадобятся следующие коэрцитивные неравенства.

ЛЕММА 5.1. *Для любой вектор-функции $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} & \left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ & \leq \alpha^{-1/2} \|\mathcal{L}_0^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}, \quad i < j, \quad i = 0, 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i = 0, j = 1$. В работе [11] установлено, что если $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; 0, 1)$, то

$$\left\| \rho^{-1/2} \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|\rho^{1/2} A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \leq \alpha^{-1} \|\mathcal{L}_0^{(0,1)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{1}{\beta} \left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \alpha \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \leq \alpha^{-1} \|\mathcal{L}_0^{(0,1)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2. \quad (5.2)$$

Применяя интегрирование по частям и принимая во внимание, что $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; 0, 1)$, получаем

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 = \frac{1}{\beta} \left\| \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \alpha \|A^3 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2. \quad (5.3)$$

Учитывая (5.3) в (5.2), имеем

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d^3 u}{dt^3} + \sqrt{\alpha} A^3 u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \alpha^{-1/2} \|\mathcal{L}_0^{(0,1)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Аналогичным образом устанавливается справедливость неравенств (5.1) при $i = 0, j = 2$ и $i = 1, j = 2$. Лемма доказана.

Проведенные до сих пор исследования позволяют установить достаточные условия регулярной разрешимости начально-краевых задач вида (1.1), (1.2).

Справедлива следующая основная

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть операторы $A_k(t)A^{-k}$, $k = 1, 2$, ограничены в H и выполняется неравенство

$$c_{i,j,1} \sup_t \|A_1(t)A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + c_{i,j,2} \sup_t \|A_2(t)A^{-2}\|_{H \rightarrow H} < 1,$$

где числа $c_{i,j,1}$ и $c_{i,j,2}$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{0,1,1} = c_{1,2,1} &= \alpha^{-1/2} q_2^{1/2}, & c_{0,2,1} &= \frac{\beta^{1/3}}{2^{1/3} \alpha^{2/3}}, \\ c_{0,1,2} = c_{1,2,2} &= \alpha^{-1/2} q_1^{1/2}, & c_{0,2,2} &= \frac{\beta^{1/6}}{2^{1/3} \alpha^{5/6}}. \end{aligned}$$

Тогда каждая из начально-краевых задач вида (1.1), (1.2) ($i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$) регулярно разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что начально-краевые задачи вида (1.1), (1.2) можно представить в виде следующих операторных уравнений:

$$\mathcal{L}_0^{(i,j)} u(t) + \mathcal{L}_1^{(i,j)} u(t) = f(t), \quad i < j, \quad i = 0, 1, \quad j = 1, 2,$$

где $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in \dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$.

Из теоремы 2.1 вытекает, что операторы $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, обладают ограниченными обратными операторами $\mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}}$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, действующими из пространства $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ на пространства $\dot{W}_3^2(\mathbb{R}_+; H; i, j)$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, соответственно. Тогда после замен $u(t) = \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}} v(t)$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, где $v(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, получаем следующие уравнения:

$$(E + \mathcal{L}_1^{(i,j)} \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}}) v(t) = f(t), \quad i < j, \quad i = 0, 1, \quad j = 1, 2.$$

Теперь же необходимо показать, что при выполнении условий теоремы норма операторов $\mathcal{L}_1^{(i,j)} \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}}$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, меньше единицы. Принимая во внимание теорему 4.2 и лемму 5.1, имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}_1^{(i,j)} \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}} v(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= \|\mathcal{L}_1^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \left\| A_1(t) \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \left\| A_2(t) \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq \sup_t \|A_1(t)A^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \sup_t \|A_2(t)A^{-2}\|_{H \rightarrow H} \left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq (c_{i,j,1} \sup_t \|A_1(t)A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + c_{i,j,2} \sup_t \|A_2(t)A^{-2}\|_{H \rightarrow H}) \|\mathcal{L}_0^{(i,j)} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= (c_{i,j,1} \sup_t \|A_1(t)A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + c_{i,j,2} \sup_t \|A_2(t)A^{-2}\|_{H \rightarrow H}) \|v\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}. \end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}_1^{(i,j)} \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq c_{i,j,1} \sup_t \|A_1(t)A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + c_{i,j,2} \sup_t \|A_2(t)A^{-2}\|_{H \rightarrow H} < 1. \end{aligned}$$

Тогда при справедливости этого неравенства операторы $E + \mathcal{L}_1^{(i,j)} \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}}$, $i < j$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, обладают обратными в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ и можно определять $u(t)$ следующим образом:

$$u(t) = \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}} (E + \mathcal{L}_1^{(i,j)} \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}})^{-1} f(t),$$

причем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^3(\mathbb{R}_+; H)} &\leq \|\mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow W_2^3(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\quad \times \|(E + \mathcal{L}_1^{(i,j)} \mathcal{L}_0^{(i,j)^{-1}})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+; H)} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq \text{const} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Следует отметить, что указанные в этой работе результаты существенно улучшают соответствующие результаты работы [11] и из них при $\rho(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $A_k(t) \equiv A_k$, $k = 1, 2$, получаются некоторые результаты работ [6], [7].

Автор выражает глубокую благодарность академику НАН Азербайджана М. Г. Гасымову и профессору С. С. Мирзоеву за полезные консультации и плодотворное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971.
- [2] S. Agmon, L. Nirenberg, "Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space", *Comm. Pure Appl. Math.*, **16**:2 (1963), 121–239.
- [3] М. Г. Гасымов, "К теории полиномиальных операторных пучков", *Докл. АН СССР*, **199**:4 (1971), 747–750.
- [4] М. Г. Гасымов, "О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков", *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **6**:2-3 (1971), 131–147.
- [5] А. Г. Костюченко, А. А. Шкалик, "Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи", *Функц. анализ и его прил.*, **17**:2 (1983), 38–61.
- [6] С. С. Мирзоев, "О кратной полноте корневых векторов полиномиальных операторных пучков, отвечающих краевым задачам на полуоси", *Функц. анализ и его прил.*, **17**:2 (1983), 84–85.
- [7] С. С. Мирзоев, "Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений", *Докл. АН СССР*, **273**:2 (1983), 292–295.
- [8] А. А. Шкалик, "Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений", *Матем. сб.*, **135**:1 (1988), 96–118.
- [9] А. А. Шкалик, "Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними", Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 140–224.
- [10] М. Г. Гасымов, С. С. Мирзоев, "О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка", *Дифференц. уравнения*, **28**:4 (1992), 651–661.

- [11] А. Р. Алиев, *О корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений с разрывным коэффициентом*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, БГУ, Баку, 1998.
- [12] Н. В. Артамонов, "Оценки решений некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве", *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 3–12.
- [13] А. Р. Алиев, "Краевые задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами", *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 803–814.
- [14] С. Б. Стечкин, "Наилучшее приближение линейных операторов", *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 137–148.
- [15] Л. В. Тайков, "Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования", *Матем. заметки*, **4**:2 (1968), 233–238.
- [16] В. Н. Габушин, "О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полу-прямой", *Матем. заметки*, **6**:5 (1969), 573–582.

А. Р. Алиев

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики НАН Азербайджана
E-mail: alievaraz@yahoo.com

Поступило

02.05.2007

Исправленный вариант

13.01.2011