Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, Замечания о сходимости (ограниченности)
в среднем частных сумм тригонометрического ряда, *Ма-
тем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 807–817

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:18:56

УДК 517.5

ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ (ОГРАНИЧЕННОСТИ) В СРЕДНЕМ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

А. С. Белов

В статье даются довольно общие условия на коэффициенты $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ как четного, так и нечетного тригонометрического ряда Фурье, при выполнении которых верно утверждение: частные суммы ряда сходятся (соответственно ограничены) в метрике L тогда и только тогда, когда $\sum_{k=[n/2]}^{2n} |a_k|/(|n-k|+1) = o(1)$ (соответственно $= O(1)$).

Библиография: 8 названий.

Пусть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1)$$

– произвольный тригонометрический ряд, записанный в действительной или комплексной форме. Далее используются обычные обозначения:

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= (c_n - c_{-n})i, \\ A_n(x) &= c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \\ S_n(x) &= c_0 + \sum_{k=1}^n A_k(x), & \tilde{S}_n(x) &= -i \sum_{k=-n}^n \operatorname{sign}(k) c_k e^{ikx}, \\ \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x) = S_n(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k A_k(x) \quad \text{при всех } n \geq 0. \end{aligned}$$

Если $f \in L_{2\pi}$, то

$$\|f\| = \|f\|_1 = \|f\|_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Квадратные скобки, как обычно, обозначают целую часть числа, а черта над числом – переход к комплексно-сопряженному числу.

Последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ называется *LC-последовательностью* (соответственно *LB-последовательностью*), если

$$\|\sigma_n - S_n\| = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00062, и фонда INTAS, грант № 99-01080.

Кратко это будем записывать в виде

$$\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}). \quad (3)$$

В (2) и во всех аналогичных соотношениях далее, конечно, предполагается, что n стремится к бесконечности.

Эта статья посвящена изучению условий на коэффициенты тригонометрического ряда (1), при которых верно соотношение (2). По определению условия (2) и (3) означают одно и то же. Поскольку понятие LC-последовательности (соответственно LB-последовательности) играет важную роль в дальнейшем изложении, то мы сначала более подробно остановимся на этом понятии, а затем изложим полученные новые результаты и их отношение к известным теоремам.

Если $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $\{c'_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ являются LC-последовательностями (соответственно LB-последовательностями), то, очевидно, для любых комплексных чисел α и α' последовательность $\{\alpha c_n + \alpha' c'_n\} \in \text{LC}$ (соответственно $\in \text{LB}$), т.е. совокупность LC-последовательностей (соответственно LB-последовательностей) образует линейное комплексное пространство (см. также замечание 1 в конце статьи).

Известно (см. [1, лемма 3] или [2, леммы 1 и 2]), что условие (2) эквивалентно каждому из следующих условий:

$$\|\tilde{\sigma}_n - \tilde{S}_n\| = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)), \quad (4)$$

$$\max_{m=n, \dots, 2n-1} \|S_m - S_{n-1}\| = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)), \quad (5)$$

$$\max_{m=n, \dots, 2n-1} \left(\left\| \sum_{k=n}^m c_{-k} e^{-ikx} \right\| + \left\| \sum_{k=n}^m c_k e^{ikx} \right\| \right) = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \quad (6)$$

Таким образом, каждое из условий (4)–(6) эквивалентно условию (3).

Отметим, что для любой $f \in L_{2\pi}$ нормы функций $f(x)$, $\bar{f}(x)$ и $f(-x)$ всегда совпадают. Поэтому если верно (3), то в силу (4) последовательности $\{-i \operatorname{sign}(n) c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{\bar{c}_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $\{c_{-n}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ также являются LC-последовательностями (соответственно LB-последовательностями).

Будем писать, что последовательность $\{c_n\}_{n=m}^{\infty} \in \text{LC}$ (соответственно $\in \text{LB}$), если, полагая $c_n = 0$ при всех $n < m$, получим последовательность, удовлетворяющую условию (3). Аналогично трактуется запись $\{c_n\}_{n=-\infty}^m \in \text{LC}$ (соответственно $\in \text{LB}$). Поэтому (3) эквивалентно условию, что последовательности

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_{-n}\}_{n=1}^{\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}), \quad (7)$$

а последнее эквивалентно условию, что последовательности

$$\{\operatorname{Re} c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\operatorname{Im} c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\operatorname{Re} c_{-n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\operatorname{Im} c_{-n}\}_{n=1}^{\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}). \quad (8)$$

Отметим также, что если ряд (1) задан в действительной форме, то условие (7) эквивалентно условию

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}),$$

а это последнее эквивалентно условию

$$\{\operatorname{Re} a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\operatorname{Re} b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\operatorname{Im} a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\operatorname{Im} b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}). \quad (9)$$

Таким образом, условия (2)–(9) эквивалентны между собой. В частности, для четного тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad A_n(x) = a_n \cos(nx) \quad \text{при } n \geq 0, \quad (10)$$

с произвольными комплексными коэффициентами, соотношение (2) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}). \quad (11)$$

Аналогично, для нечетного тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad A_n(x) = a_n \sin(nx) \quad \text{при } n \geq 0, \quad (12)$$

соотношение (2), где, конечно, частные суммы и суммы Фейера берутся для ряда (12), выполнено тогда и только тогда, когда верно (11). Поскольку (3) эквивалентно (6), то условие (11) эквивалентно условию

$$\max_{m=n, \dots, 2n-1} \left\| \sum_{k=n}^m a_k e^{ikx} \right\| = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \quad (13)$$

Из (13) вытекает, что если последовательность удовлетворяет условию (11), то $|a_n| = o(1)$ (соответственно $= O(1)$). Поэтому условие (11) эквивалентно условию

$$\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}).$$

Отсюда и из эквивалентности условий (3) и (7) следует, что для любого целого s условие (3) эквивалентно условию

$$\{c_{n+s}\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}).$$

Некоторые другие свойства LC- и LB-последовательностей изложены далее в замечании 1.

Эта статья посвящена изучению некоторых LC- и LB-последовательностей специального вида. Отметим (см. [1, лемма 3]), что условие (13), а значит и (11), эквивалентно условию

$$\max_{m=2^n, \dots, 2^{n+1}} \left\| \sum_{k=2^n+1}^m a_k e^{ikx} \right\| = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \quad (14)$$

Таким образом, удовлетворяющую условию (11) последовательность можно представлять себе сконструированной из наборов вида $\{a_k : k = 2^n + 1, \dots, 2^{n+1}\}$ так, что выполнено (14).

В статье [2] доказана следующая

ТЕОРЕМА А. Если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ является LC-последовательностью (соответственно LB-последовательностью), то выполнено условие

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|a_k|}{|k-n|+1} = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \quad (15)$$

Подчеркнем, что во всех утверждениях этой статьи переход к случаю, указанному в круглых скобках, производится во всех условиях одновременно.

Цель этой статьи – показать, что для некоторых достаточно общих последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ специального вида теорему А можно обратить.

Последовательность целых чисел

$$\{N_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad 0 < N_1 < N_2 < \dots, \quad (16)$$

называется *конечно-лакунарной*, если существует натуральное число p такое, что

$$\lambda = \inf_{n \geq 1} \frac{N_{n+p}}{N_n} > 1. \quad (17)$$

Для случая $p = 1$ последовательность (16) называется *лакунарной (по Адамару)*. Из (17) следует, что при каждом натуральном m будет верна оценка

$$\frac{N_{n+pm}}{N_n} = \prod_{k=1}^m \frac{N_{n+kp}}{N_{n+(k-1)p}} \geq \lambda^m.$$

Поэтому для конечно-лакунарной последовательности (16) всегда найдется наименьшее натуральное число q такое, что

$$\frac{N_{n+q}}{N_n} \geq 2 \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (18)$$

Условие (18) эквивалентно утверждению, что для любого натурального n на промежутке $[n, 2n]$ содержится не более q членов последовательности (16). Ясно, что конечно-лакунарная последовательность – это последовательность, которую можно разбить на конечное число лакунарных. Мы всегда далее считаем, что $N_0 = 0$.

Пусть теперь задана произвольная конечно-лакунарная последовательность (16), которая для некоторого натурального l при всех натуральных n удовлетворяет условию $N_{n+1} \leq 2^l N_n$. При некотором натуральном q верно условие (18). Тогда для любого натурального n промежутки $[n, 2n]$ покрываются не более чем $q+1$ промежутками вида $(N_{k-1}, N_k]$, и, наоборот, любой промежуток $(N_{k-1}, N_k]$ покрывается не более чем $l+1$ промежутками вида $(2^{n-1}, 2^n]$. Поэтому условие (13), а значит и (11), эквивалентно условию

$$\max_{m=N_{n-1}+1, \dots, N_n} \left\| \sum_{k=N_{n-1}+1}^m a_k e^{ikx} \right\| = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \quad (19)$$

Это означает, что последовательность, которая удовлетворяет условию (11), можно представлять себе построенной из кусков $\{a_k : k = N_{n-1} + 1, \dots, N_n\}$, $n = 1, 2, \dots$,

так, что выполнено условие (19). В частности, для любой ограниченной последовательности комплексных чисел $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой последовательности действительных чисел $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ из условия (11) следует, что последовательность

$$\{\{d_n a_k e^{ik\varphi_n}\}_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} : n = 1, 2, \dots\} \in \text{LC} \quad (\text{соответственно} \in \text{LB}).$$

Более того, это последнее условие при дополнительном предположении $\inf\{|d_n| : n \geq 1\} > 0$ оказывается эквивалентным условию (11).

Пусть $n_1 \leq n_2$ – любые целые числа и $A \geq 1$. Будем писать, что

$$\{a_n\}_{n=n_1}^{n_2} \in \text{GM}(A),$$

если выполнено либо условие

$$|a_{n_1}| + \sum_{k=n_1}^{m-1} |a_k - a_{k+1}| \leq A|a_m| \quad \text{при всех } m = n_1, \dots, n_2, \quad (20)$$

либо условие

$$|a_{n_2}| + \sum_{k=m}^{n_2-1} |a_k - a_{k+1}| \leq A|a_m| \quad \text{при всех } m = n_1, \dots, n_2. \quad (21)$$

Основной является

ТЕОРЕМА 1. Пусть для последовательности комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют конечно-лакунарная последовательность (16) и число $A \geq 1$ такие, что для каждого натурального k выполнено условие

$$\{a_n\}_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \in \text{GM}(A). \quad (22)$$

Тогда условие (11) эквивалентно условию (15).

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется

ЛЕММА 1. а) Если выполнено условие (20), то

$$\left\| \sum_{n=m}^{n_2} a_n e^{inx} \right\| \leq 2A \sum_{n=m}^{n_2} \frac{|a_n|}{n_2 - n + 1} \quad \text{при всех } m = n_1, \dots, n_2. \quad (23)$$

б) Если выполнено условие (21), то

$$\left\| \sum_{n=n_1}^m a_n e^{inx} \right\| \leq 2A \sum_{n=n_1}^m \frac{|a_n|}{n - n_1 + 1} \quad \text{при всех } m = n_1, \dots, n_2. \quad (24)$$

с) Если $\{a_n\}_{n=n_1}^{n_2} \in \text{GM}(A)$, то

$$\left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} a_n e^{inx} \right\| \leq 4A \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{|a_n|}{n_2 - n + 1} + \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{|a_n|}{n - n_1 + 1} \right) \\ \text{при всех } n_1 \leq m_1 \leq m_2 \leq n_2. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого целого q и натурального s имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=q}^{q+s-1} e^{ijx} \right\| &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/s} \left| \frac{\sin(sx/2)}{\sin(x/2)} \right| dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/s}^{\pi} \left| \frac{\sin(sx/2)}{\sin(x/2)} \right| dx \\ &\leq 1 + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/s}^{\pi} \frac{dx}{\sin(x/2)} \leq 1 + \ln s \leq 1 + \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j} \leq 2 \sum_{j=1}^s \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Отсюда, если выполнено условие (21), то при $m = n_1, \dots, n_2$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=n_1}^m a_n e^{inx} \right\| &= \left\| \sum_{n=n_1}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) \sum_{j=n_1}^n e^{ijx} + a_m \sum_{j=n_1}^m e^{ijx} \right\| \\ &\leq 2 \sum_{n=n_1}^{m-1} |a_n - a_{n+1}| \sum_{j=n_1}^n \frac{1}{j - n_1 + 1} + 2|a_m| \sum_{j=n_1}^m \frac{1}{j - n_1 + 1} \\ &= 2 \sum_{j=n_1}^m \frac{1}{j - n_1 + 1} \left(\sum_{n=j}^{m-1} |a_n - a_{n+1}| + |a_m| \right). \end{aligned}$$

Поскольку в силу (21)

$$|a_m| + \sum_{n=j}^{m-1} |a_n - a_{n+1}| \leq |a_{n_2}| + \sum_{n=j}^{n_2-1} |a_n - a_{n+1}| \leq A|a_j|,$$

то имеем (24). Аналогично, из (20) и равенства

$$\sum_{n=m}^{n_2} a_n e^{inx} = \sum_{n=m+1}^{n_2} (a_n - a_{n-1}) \sum_{j=n}^{n_2} e^{ijx} + a_m \sum_{j=m}^{n_2} e^{ijx}$$

получаем (23). Из (23) и (24) следует (25). Лемма 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По теореме А из (11) всегда вытекает (15).

Докажем обратное. Предположим, что выполнено (15). Если $\{a_n\}_{n=n_1}^{n_2} \in \text{GM}(A)$, то для любых $n_1 \leq m_1 \leq m_2 \leq n_2$, очевидно, $\{a_n\}_{n=m_1}^{m_2} \in \text{GM}(A)$. Поэтому, добавляя, если нужно, к последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ точки $\{2^k - 1\}_{k=1}^{\infty}$, можно считать, что конечно-лакунарная последовательность (16) удовлетворяет также условию $N_k \leq 2N_{k-1} + 1$ при всех $k \geq 1$. В силу (25) при всех натуральных k, m_1 и m_2 таких, что $N_{k-1} < m_1 \leq m_2 \leq N_k$, имеем

$$\left\| \sum_{n=m_1}^{m_2} a_n e^{inx} \right\| \leq 4A \left(\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \frac{|a_n|}{N_k - n + 1} + \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \frac{|a_n|}{n - N_{k-1}} \right),$$

а последняя величина в силу условия (15) при k , стремящемся к бесконечности, есть $o(1)$ (соответственно $O(1)$). Таким образом, верно условие (19), которое эквивалентно условию (11). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть для последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют конечно-лакунарная последовательность (16) и число $A \geq 1$ такие, что для каждого натурального k найдутся неотрицательная неубывающая функция $\varphi_k(n)$ и неотрицательная невозрастающая функция $\psi_k(n)$ и знак $s_k = \pm 1$, для которых

$$a_n = s_k \varphi_k(n) \psi_k(n) \quad \text{при всех } n = N_{k-1} + 1, \dots, N_k \quad (26)$$

и либо

$$\varphi_k(N_k) \leq A \varphi_k(N_{k-1} + 1), \quad (27)$$

либо

$$\psi_k(N_{k-1} + 1) \leq A \psi_k(N_k). \quad (28)$$

Тогда условие (11) эквивалентно условию (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое натуральное k . Предположим, что имеет место (27). Тогда при любых натуральных $m = N_{k-1} + 1, \dots, N_k$ имеем

$$\begin{aligned} & |a_{N_k}| + \sum_{n=m}^{N_k-1} |a_n - a_{n+1}| \\ & \leq \varphi_k(N_k) \psi_k(N_k) \\ & \quad + \sum_{n=m}^{N_k-1} (\varphi_k(n)(\psi_k(n) - \psi_k(n+1)) + \psi_k(n+1)(\varphi_k(n+1) - \varphi_k(n))) \\ & = 2\varphi_k(N_k) \psi_k(N_k) - \varphi_k(m) \psi_k(m) + 2 \sum_{n=m}^{N_k-1} \varphi_k(n)(\psi_k(n) - \psi_k(n+1)) \\ & \leq 2\varphi_k(N_k) \psi_k(N_k) + 2\varphi_k(N_k) \sum_{n=m}^{N_k-1} (\psi_k(n) - \psi_k(n+1)) \\ & = 2\varphi_k(N_k) \psi_k(m) \leq 2A |a_m|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\{a_n\}_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \in \text{GM}(2A). \quad (29)$$

Аналогично, из (28) имеем

$$|a_{N_{k-1}+1}| + \sum_{n=N_{k-1}+1}^m |a_n - a_{n+1}| \leq 2A |a_m| \quad \text{при } m = N_{k-1} + 1, \dots, N_k.$$

Поэтому и в этом случае верно (29). Таким образом, (22) выполнено с постоянной $2A$ вместо A . Осталось применить теорему 1, и теорема 2 доказана.

Отметим, что если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и неотрицательна на промежутке $n = N_{k-1} + 1, \dots, N_k$, то мы можем взять $\varphi_k(n) = a_n$, $\psi_k(n) = 1$ на этом промежутке; условие (28) будет выполнено при $A = 1$. Аналогично, если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и неотрицательна на промежутке $n = N_{k-1} + 1, \dots, N_k$, то можно взять $\varphi_k(n) = 1$, $\psi_k(n) = a_n$ на этом промежутке; в этом случае будет выполнено условие (27) при $A = 1$. В более общем случае, когда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна на промежутке $n = N_{k-1} + 1, \dots, N_k$ и не сохраняет знак, указанный промежуток можно разбить на два промежутка, на каждом из которых последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и сохраняет знак. Поэтому из теоремы 2 сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует конечно-лакунарная последовательность (16) такая, что на каждом промежутке $n = N_{k-1} + 1, \dots, N_k$ последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, т.е. либо не возрастает, либо не убывает. Тогда условие (11) эквивалентно условию (15).

Из теоремы 2 также следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть для последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют конечно-лакунарная последовательность (16), ограниченная последовательность действительных чисел $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ и неотрицательное целое число m такие, что для каждого натурального k найдется многочлен P_k степени не выше m , для которого

$$a_n = P_k(n)n^{\theta_k} \quad \text{при всех } n = N_{k-1} + 1, \dots, N_k. \quad (30)$$

Тогда условие (11) эквивалентно условию (15). Более того, если для последовательности (16) существуют положительные числа δ и ε такие, что

$$N_k - N_{k-1} \geq \delta N_k^{\varepsilon} \quad \text{при всех } k \geq 1, \quad (31)$$

то условие (11) эквивалентно условию

$$a_n \ln n = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)). \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (30). Можно считать, что $N_k \leq 2N_{k-1} + 1$ при всех $k \geq 1$. При каждом натуральном k , если многочлен P_k не тождественно постоянен, на промежутке $[N_{k-1} + 1, N_k]$ имеется не более $2m - 1$ точек x , где либо $P_k(x) = 0$, либо производная $P'_k(x) = 0$. Для каждой такой точки x между $N_{k-1} + 1$ и N_k вставим целое число $[x]$. Тогда между $N_{k-1} + 1$ и N_k будет вставлено не более $2m - 1$ целых чисел. Дополним этими вставленными точками последовательность (16). Дополненная таким образом последовательность (16) также будет конечно-лакунарной. Сохраним за расширенной последовательностью прежнее обозначение $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда на каждом промежутке $[N_{k-1} + 1, N_k]$ соответствующий многочлен P_k будет монотонным и одного знака. Поскольку на этом промежутке множитель n^{θ_k} также монотонен и сохраняет знак, то всегда верно представление (26), где в качестве одной из функций φ_k или ψ_k можно взять тождественно равную либо 1, либо n^{θ_k} . Для этой функции или условие (27), или условие (28) будет выполнено. По теореме 2 получаем первую часть теоремы 3.

Предположим теперь, что для некоторых положительных чисел δ и ε выполнено условие (31). Можно считать, что $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$ и $N_k \leq 2N_{k-1} + 1$ при $k \geq 1$. Докажем, что тогда условие (15) эквивалентно условию (32). Действительно, из (32) всегда вытекает (15). Покажем обратное. Пусть верно условие (15). Для каждого натурального k обозначим через M_k максимум функции $|P_k(x)|$ на отрезке $[N_{k-1} + 1, N_k]$. По известному неравенству Маркова

$$|P'_k(x)| \leq \frac{2m^2 M_k}{N_k - N_{k-1} - 1}$$

при всех $x \in [N_{k-1} + 1, N_k]$. Поэтому найдутся целые $N_{k-1} \leq m_1 \leq m_2 \leq N_k$ такие, что $|P_k(x)| \geq M_k/2$ при всех $x \in [m_1, m_2]$ и

$$m_2 - m_1 \geq \frac{N_k - N_{k-1} - 1}{4m^2} - 2 \geq \frac{\delta}{8m^2} N_k^\varepsilon$$

при всех достаточно больших k . Тогда из (15) имеем

$$\frac{1}{2} M_k \sum_{n=m_1}^{m_2} \frac{n^{\theta_k}}{n - m_1 + 1} \leq \sum_{n=m_1}^{m_2} \frac{|a_n|}{n - m_1 + 1} = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)).$$

Поэтому $M_k N_k^{\theta_k} \ln N_k = o(1)$ (соответственно $= O(1)$). Отсюда немедленно вытекает (32). Теорема 3 полностью доказана.

Хорошо известно (см. [3, гл. 1, §60]), что если ряд (1) является рядом Фурье, то его частные суммы сходятся (соответственно ограничены) в метрике L тогда и только тогда, когда выполнено условие (2). Поэтому для рядов Фурье вида (10) или (12) условие (11) эквивалентно сходимости (соответственно ограниченности) частных сумм этого ряда в метрике L . Последнее, конечно, верно и для рядов вида (1), т.е. если ряд (1) является рядом Фурье, то его коэффициенты $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ образуют ЛС-последовательность (соответственно ЛВ-последовательность) тогда и только тогда, когда его частные суммы сходятся (соответственно ограничены) в метрике L . Отметим, что для проверки условия (3) достаточно проверить эквивалентное условие (8) или (9), используя, например, теоремы 1–3.

В случае, когда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазимоноотонна, т.е. неотрицательна и для некоторого $\theta > 0$ последовательность $\{a_n n^{-\theta}\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает, в условии (26) можно взять $s_k = 1$, $\varphi_k(n) = n^\theta$, $\psi_k(n) = a_n n^{-\theta}$, $N_k = 2^k$. Тогда условие (27) выполнено. Этот один из важнейших частных случаев теоремы 2 для рядов Фурье был ранее получен Теляковским и Фоминым в работе [4] (см. также [5]).

Важнейший частный случай теоремы 3 при $m = 0$, когда все $\theta_k = 0$ и последовательность (16) лакунарна, для рядов Фурье вида (10) или (12) был ранее также получен Теляковским [6].

Отметим, что мы рассматриваем условие (2) для произвольных тригонометрических рядов, а не только рядов Фурье.

Возьмем произвольную последовательность неотрицательных целых чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $m_k \leq 2^{k-1}$ при всех $k \geq 1$. Пусть $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность. Положим

$$a_n = \begin{cases} d_k & \text{при } n = 2^{k-1}, \dots, 2^{k-1} + m_k - 1, \\ 0 & \text{при } n = 2^{k-1} + m_k, \dots, 2^k - 1, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \dots$. Тогда условие (11) эквивалентно условию (14), а это последнее условие, очевидно, эквивалентно условию

$$d_k \ln(m_k + 1) = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \quad (33)$$

Возьмем произвольную последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, нижний предел которой равен нулю. Покажем, что если в (31) ε заменить на ε_k , то вторая часть теоремы 3 перестанет быть верной. Действительно, полагая $N_k = 2^{k-1}$, $m_k = N_k^{\varepsilon_k}$,

мы видим, что условие (33) не эквивалентно условию (32) для некоторой последовательности $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, например: $d_{k_j} = k_j^{-1} \varepsilon_{k_j}^{-1/2}$ для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ такой, что подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ стремится к нулю, и $d_k = 0$ для всех остальных k . Таким образом, при замене в (31) ε на ε_k условие (33) останется выполненным, а условие (32) нет. Поэтому условие (31) существенно для справедливости второй части теоремы 3 и в описанном выше смысле неумлучшаемо.

Отметим, что имеется довольно много работ (см., например, [4]–[8] и указанную там литературу), в которых для рядов Фурье при некоторых условиях на коэффициенты ряда получается эквивалентность (2) и (32).

Доказанные теоремы 1–3 показывают, что условие (15) в некоторых случаях лучше отражает поведение величины $\|\sigma_n - S_n\|$, чем условие (32). Рассмотрим несколько более подробно отношение между условиями (15) и (32).

Ясно, что из условия (32) всегда вытекает условие (15). Остановимся на некоторых условиях на последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, при которых из (15) следует (32).

Прежде всего отметим, что из (15) при $n \leq N \leq 2n$ вытекает

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^N |a_k| \sum_{j=1}^{N-n+1} \frac{1}{j} &\leq \sum_{m=0}^{N-n} \sum_{k=n+m}^N \frac{|a_k|}{k - (n+m) + 1} + \sum_{j=1}^{N-n} \sum_{k=n}^N \frac{|a_k|}{k - n + j + 1} \\ &\leq \sum_{m=0}^{N-n} \sum_{k=n+m}^{2(n+m)} \frac{|a_k|}{k - (n+m) + 1} + (N-n) \sum_{k=n}^{2n} \frac{|a_k|}{k - n + 1}. \end{aligned}$$

Поэтому из (15) всегда следует условие

$$\frac{1 + \ln(N - n + 1)}{N - n} \sum_{k=n}^N |a_k| = o(1) \quad (= O(1)) \quad \text{при } n \leq N \leq 2n. \quad (34)$$

Отсюда (см. [1, доказательство теоремы 1]), в частности, вытекают условия (4) и (5) из [1]. Таким образом, рассматривая случаи $N = n + [n^\varepsilon]$, $N = 2n$ и, если $\varepsilon < 1$, $n = N - [N^\varepsilon]$, для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ из (15) и (34) выводим

$$n^{-\varepsilon} \sum_{k=n-[n^\varepsilon]}^{n+[n^\varepsilon]} |a_k| = o\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right) \quad \left(= O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\right). \quad (35)$$

Поэтому если для некоторых $\varepsilon \in (0, 1]$ и $C > 0$ будет

$$|a_n| \leq C n^{-\varepsilon} \sum_{k=n-[n^\varepsilon]}^{n+[n^\varepsilon]} |a_k| \quad \text{при всех } n \geq 1, \quad (36)$$

то из (15) следует условие (35), а значит, и (32).

Поскольку при $\varepsilon \in (0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} |a_n| \sum_{k=n}^{n+[n^\varepsilon]} \frac{1}{k - n + 1} &= \sum_{k=n}^{n+[n^\varepsilon]} \frac{|a_k|}{k - n + 1} + \sum_{k=n}^{n+[n^\varepsilon]} \frac{|a_n| - |a_k|}{k - n + 1} \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+[n^\varepsilon]} \frac{|a_k|}{k - n + 1} + \max_{k=n, \dots, n+[n^\varepsilon]} ||a_n| - |a_k|| \sum_{k=n}^{n+[n^\varepsilon]} \frac{1}{k - n + 1}, \end{aligned}$$

то из (15) и условия

$$\max_{k=n, \dots, n+[n\varepsilon]} ||a_n| - |a_k|| = o\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right) \quad \left(= O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\right) \quad (37)$$

вытекает (32). Таким образом, если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что при некотором $\varepsilon \in (0, 1]$ верно (36) или (37), то условия (15) и (32) эквивалентны. В частности, в этом случае из (11) вытекает (32).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в линейном пространстве всех LB-последовательностей ввести норму по формуле

$$\| \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \|_{LB} = \sup_{n \geq 0} \max_{n \leq m \leq 2n} \|S_m - S_{n-1}\|,$$

где S_n – частные суммы ряда (1), $S_{-1} = 0$, то получим банахово пространство LB. Тогда линейное пространство всех LC-последовательностей является замкнутым подпространством в банаховом пространстве LB, т.е. также является банаховым пространством с той же самой нормой.

Отметим также, что если $\{c_{-n}\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in LC$ (соответственно $\in LB$), то из (13) следует, что последовательности $\{c_{n+1}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{c_{n-1}\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in LC$ (соответственно $\in LB$) и для любого натурального m и целого j последовательность $\{c_{mk+j}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in LC$ (соответственно $\in LB$). В частности,

$$\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in LC \quad (\in LB) \iff (\forall j = 0, \dots, m-1) \{c_{mk+j}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in LC \quad (\in LB),$$

т.е. для любого натурального m условие (11) эквивалентно условию

$$(\forall j = 0, \dots, m-1) \{a_{mk+j}\}_{k=1}^{\infty} \in LC \quad (\text{соответственно } \in LB).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белов А. С. Об условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье // Изв. Тульского гос. университета. Сер. матем., мех., информатика. 1998. Т. 4. № 1. С. 40–46.
- [2] Белов А. С. Об условиях сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда // Сб. статей “Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа”. М.: АФЦ, 1999. С. 1–17.
- [3] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [4] Теляковский С. А., Фомин Г. А. О сходимости в метрике L рядов Фурье с квазимоноотонными коэффициентами // Тр. МИАН. 1975. Т. 134. С. 310–313.
- [5] Garret J. W., Rees C. S., Stanojević Č. V. On L^1 -convergence of Fourier series with quasi-monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 72. № 3. P. 535–538.
- [6] Теляковский С. А. О сходимости в метрике L тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами // Тр. МИАН СССР. 1991. Т. 200. С. 322–326.
- [7] Фомин Г. А. О сходимости рядов Фурье в среднем // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 251–265.
- [8] Fridli S. On the L^1 -convergence of Fourier series // Studia. Math. 1997. V. 125. № 2. P. 161–174.