Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Ахтямов, О весовом пространстве целых функций в $\mathbb{C}^n$, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 483–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3861>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:57:08

О весовом пространстве целых функций в $\mathbb{C}^n$

Н. Т. Ахтямов

В терминах преобразования Лапласа дано описание сопряженного пространства к весовому пространству целых функций в $\mathbb{C}^n$ в случае, когда весовые функции имеют полиномиальный рост.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Всюду далее для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ полагаем $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Через $H(\mathbb{C}^n)$ обозначаем совокупность целых функций в $\mathbb{C}^n$.

Для вещественнозначной функции φ , определенной в $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ и такой, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = +\infty, \quad (1)$$

всюду в $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ принимает конечные значения выпуклая функция

$$\varphi^*(\lambda) = \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)} (\operatorname{Re} \langle \lambda, \xi \rangle - \varphi(\xi)),$$

называемая *преобразованием Юнга–Фенхеля* функции φ [1].

С функцией φ , выпуклой в $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющей условию (1), свяжем пространство

$$E(\varphi) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi(z)}} < \infty \right\}.$$

С нормой $\|\cdot\|_\varphi$ пространство $E(\varphi)$ банахово.

Введем весовое пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$ следующим образом. Пусть числа μ и ρ таковы, что $0 < \mu \leq \rho$. Пусть $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ – совокупность выпуклых функций в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\exists A > 0 \exists B > 0 \forall t \in \mathbb{N} \exists C_m > 0 \exists D_m > 0: C_m \|z\|^\mu - D_m \leq \varphi_m(z) \leq A \|z\|^\rho + B, z \in \mathbb{C}^n$.
- 2) $\exists a > 0 \forall t \in \mathbb{N} \exists b_m > 0: \varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z) \geq a \ln(1 + \|z\|) - b_m, z \in \mathbb{C}^n$.

Заметим, что для всех $t \in \mathbb{N}$ справедливо включение $E(\varphi_{m+1}) \subset E(\varphi_m)$. Действительно, пусть $f \in E(\varphi_{m+1})$. Тогда для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\varphi_{m+1}} e^{\varphi_{m+1}(z)} \leq \|f\|_{\varphi_{m+1}} e^{\varphi_m(z) - a \ln(1 + \|z\|) + b_m} \leq \|f\|_{\varphi_{m+1}} e^{b_m} e^{\varphi_m(z)}.$$

Следовательно, $\|f\|_{\varphi_m} \leq e^{b_m} \|f\|_{\varphi_{m+1}}$, $f \in E(\varphi_{m+1})$. Последнее неравенство означает, что вложение $i_m: E(\varphi_{m+1}) \rightarrow E(\varphi_m)$ непрерывно.

Пусть $E(\Phi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} E(\varphi_m)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $E(\Phi)$ становится линейным пространством. Наделим $E(\Phi)$ топологией проективного предела пространств $E(\varphi_m)$. Базис окрестностей нуля в $E(\Phi)$ образуют множества

$$U_{m,\delta} = \{f \in E(\Phi) : \|f\|_{\varphi_m} < \delta\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0.$$

Отметим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}^n$ функция $f_\lambda(z) = e^{\langle \lambda, z \rangle}$ принадлежит $E(\Phi)$. Действительно, для всех $m \in \mathbb{N}$

$$\|f_\lambda\|_{\varphi_m} = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|e^{\langle \lambda, z \rangle}|}{e^{\varphi_m(z)}} = e^{\varphi_m^*(\lambda)} < \infty. \quad (2)$$

Через $E'(\Phi)$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $E(\Phi)$, через $E^*(\Phi)$ – сильное сопряженное пространство к пространству $E(\Phi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразованием Лапласа функционала $S \in E'(\Phi)$ называется функция $\hat{S}(\lambda) = (S, e^{\langle \lambda, z \rangle})$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$.

Цель работы – описать пространство $E^*(\Phi)$ в терминах преобразования Лапласа.

Пусть $\Phi^* = \{\varphi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$. Поскольку $\varphi_m^*(z) \leq \varphi_{m+1}^*(z) + b_m$ всюду в $\mathbb{C}^n$, то для всех $m \in \mathbb{N}$ пространство $E(\varphi_m^*)$ непрерывно вложено в $E(\varphi_{m+1}^*)$.

Пусть $E(\Phi^*) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E(\varphi_m^*)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $E(\Phi^*)$ становится линейным пространством. Наделим $E(\Phi^*)$ топологией индуктивного предела нормированных пространств $E(\varphi_m^*)$.

Основной результат работы – следующая

ТЕОРЕМА. *Отображение $L: S \in E^*(\Phi) \rightarrow \hat{S}$ устанавливает топологический изоморфизм пространств $E^*(\Phi)$ и $E(\Phi^*)$.*

Для различных весовых пространств целых функций задача описания сопряженного изучалась в работах Эренпрайса [2], Тейлора [3], Ткаченко [4], Хаслингера [5], Попёнова [6]. Наиболее общий результат получен в работе [6], в которой (наряду с другими условиями на веса) допускался линейный относительно $\|z\|$ зазор между весовыми функциями.

В отличие от работ [2]–[6], в нашем случае допустим более узкий зазор между весовыми функциями (он может быть логарифмическим). Однако, уменьшая зазор, мы вынуждены оперировать весовыми функциями (специального) полиномиального роста.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть $\nu > 1$, а функция $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при некоторых положительных C_φ и D_φ всюду в $\mathbb{C}^n$*

$$\varphi(z) \geq C_\varphi \|z\|^\nu - D_\varphi.$$

Тогда функция φ^ удовлетворяет условию: существует положительное число M такое, что*

$$|\varphi^*(z) - \varphi^*(\zeta)| \leq M$$

для всех $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ таких, что

$$\|z - \zeta\| \leq \frac{1}{(1 + \|\zeta\|)^{1/(\nu-1)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для произвольного $z \in \mathbb{C}^n$ точная верхняя грань функции $u_z(\xi) = \operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle - \varphi(\xi)$ в $\mathbb{C}^n$ достигается в точке $\xi_0 = \xi_0(z)$, удовлетворяющей условию: при некотором $K > 0$, не зависящем от z , $\|\xi_0\| \leq K\|z\|^{1/(\nu-1)} + K$. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi^*(\zeta) - \varphi^*(z) &= \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re}\langle \zeta, \xi \rangle - \varphi(\xi)) - \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle - \varphi(\xi)) \\ &\leq \operatorname{Re}\langle \zeta, \xi_0(\zeta) \rangle - \varphi(\xi_0(\zeta)) - \operatorname{Re}\langle z, \xi_0(\zeta) \rangle + \varphi(\xi_0(\zeta)) \\ &= \operatorname{Re}\langle \zeta - z, \xi_0(\zeta) \rangle \leq \|\zeta - z\| \cdot \|\xi_0(\zeta)\| \leq \frac{K(1 + \|\zeta\|^{1/(\nu-1)})}{(1 + \|\zeta\|)^{1/(\nu-1)}} \leq 2K. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) - \varphi^*(\zeta) &\leq \operatorname{Re}\langle z - \zeta, \xi_0(z) \rangle \leq \|z - \zeta\| \cdot \|\xi_0(z)\| \\ &\leq \frac{K(1 + \|z\|^{1/(\nu-1)})}{(1 + \|\zeta\|^{1/(\nu-1)})} \leq \frac{K(1 + (\|\zeta\| + 1/((1 + \|\zeta\|)^{1/(\nu-1)}))^{1/(\nu-1)})}{(1 + \|\zeta\|)^{1/(\nu-1)}} \\ &\leq \frac{K(1 + (1 + \|\zeta\|)^{1/(\nu-1)})}{(1 + \|\zeta\|)^{1/(\nu-1)}} \leq 2K. \end{aligned}$$

Осталось положить $M = 2K$. Доказательство закончено.

Заметим, что из условия 1) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_m^*(z) \geq \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{1}{A\rho}\right)^{1/(\rho-1)} \|z\|^{\rho/(\rho-1)} - B, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обозначим через $\xi_m(z)$ точку, в которой достигается точная верхняя грань функции $v_m(z) = \operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle - \varphi_m(\xi)$ на $\mathbb{C}^n$ (если таких точек несколько, то $\xi_m(z)$ выбирается произвольно). Тогда существует число $\gamma > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется число $d_m > 0$ такое, что

$$\|\xi_m(z)\| > \gamma\|z\|^{1/(2(\rho-1))} - d_m, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (4)$$

Действительно, в противном случае для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется натуральное число m_k и $z_{m_k}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ такое, что

$$\|\xi_{m_k}(z_{m_k}^{(k)})\| \leq \frac{1}{k} \|z_{m_k}^{(k)}\|^{1/(2(\rho-1))} - k.$$

И тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi_{m_k}^*(z_{m_k}^{(k)}) &\leq \frac{1}{k} \|z_{m_k}^{(k)}\|^{1+1/(2(\rho-1))} - \varphi_{m_k}(\xi_{m_k}(z_{m_k}^{(k)})) \\ &\leq \frac{1}{k} \|z_{m_k}^{(k)}\|^{1+1/(2(\rho-1))} - C_m \|\xi_{m_k}(z_{m_k}^{(k)})\|^\mu + D_m \leq \frac{1}{k} \|z_{m_k}^{(k)}\|^{1+1/(2(\rho-1))} + D_m, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (3).

ЛЕММА 2. Существует число $h > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ при некотором $l_m > 0$

$$\varphi_{m+1}^*(z) - \varphi_m^*(z) \geq h \ln(1 + \|z\|) - l_m, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно, а число $\gamma > 0$ взято из неравенства (4). Выберем $R_m > 0$ так, что для $t \geq R_m$

$$1 + \gamma t^{1/(2(\rho-1))} - d_m \geq \frac{\gamma}{2}(1+t)^{1/(2(\rho-1))}.$$

Тогда для $z \in \mathbb{C}^n$ с $\|z\| \geq R_m$ (пользуясь по ходу неравенством (3)) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1}^*(z) - \varphi_m^*(z) &\geq \operatorname{Re}\langle \xi_m(z), z \rangle - \varphi_{m+1}(\xi_m(z)) - \operatorname{Re}\langle \xi_m, z \rangle + \varphi_m(\xi_m(z)) \\ &\geq a \ln(1 + \|\xi_m(z)\|) - b_m \geq a \ln(1 + \gamma \|z\|^{1/(2(\rho-1))} - d_m) - b_m \\ &\geq a \ln\left(\frac{\gamma}{2}(1 + \|z\|)^{1/(2(\rho-1))}\right) - b_m \\ &= a \ln \frac{\gamma}{2} + \frac{a}{2(\rho-1)} \ln(1 + \|z\|) - b_m. \end{aligned}$$

Полагая $h = a/(2(\rho-1))$ и выбирая l_m подходящим образом, убеждаемся в справедливости леммы.

ЛЕММА 3. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ вложения $i_m: E(\varphi_{m+1}) \rightarrow E(\varphi_m)$, $j_m: E(\varphi_m^*) \rightarrow E(\varphi_{m+1}^*)$ вполне непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3 проводится стандартным образом (см., например, [6; лемма 2]) с использованием в обоих случаях теоремы Монтеля, условия 2) на зазор между весовыми функциями в случае вложения i_m , леммы 2 в случае вложения j_m .

Таким образом, пространство $E(\Phi)$ является пространством (M^*) , а пространство $E(\Phi^*)$ является пространством (LN^*) (см. [7]).

ЛЕММА 4. Полиномы плотны в $E(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$U(\varphi_m) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : p_m(f) = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi_m(z)} d\lambda(z) \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

где $d\lambda(z)$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Ввиду условия 1) на функции φ_m гильбертово пространство $U(\varphi_m)$ содержит полиномы. И так как φ_m – выпуклая функция в $\mathbb{C}^n$, то полиномы плотны в $U(\varphi_m)$ согласно результату Тейлора [8].

Покажем, что полиномы плотны в $E(\Phi)$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ найдем полином $P_{k,\delta}$ такой, что

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z) - P_{k,\delta}(z)|^2 e^{-2\varphi_k(z)} d\lambda(z) < \delta^2.$$

В силу плюрисубгармоничности функции $|f(z) - P_{k,\delta}(z)|^2$ в $\mathbb{C}^n$ имеем

$$|f(z) - P_{k,\delta}(z)|^2 \leq \frac{1}{\sigma_n(r)} \int_{B(z,r)} |f(\xi) - P_{k,\delta}(\xi)|^2 d\lambda(\xi). \quad (5)$$

Здесь $\sigma_n(r) = \sigma_n(1)r^{2n-1}$, $\sigma_n(1)$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{C}^n$, $B(z, r)$ – замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке z .

Так как $\varphi_k = (\varphi_k^*)^*$ в силу выпуклости φ_k (см. [1]), а для φ_k^* справедлива оценка (3), то по лемме 1 существует число $M_k > 0$ такое, что

$$|\varphi_k(\xi) - \varphi_k(z)| < M_k, \quad \text{если} \quad \|\xi - z\| \leq (1 + \|z\|)^{1-\rho}. \quad (6)$$

Полагая в (5) $r = (1 + \|z\|)^{1-\rho}$, имеем

$$\begin{aligned} |f(z) - P_{k,\delta}(z)|^2 &\leq \frac{(1 + \|z\|)^{(\rho-1)(2n-1)}}{\sigma_n(1)} \int_{B(z,r)} |f(\xi) - P_{k,\delta}(\xi)|^2 d\lambda(\xi) \\ &\leq \frac{(1 + \|z\|)^{(\rho-1)(2n-1)}}{\sigma_n(1)} e^{2 \sup_{\xi \in B(z,r)} \varphi_k(\xi)} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{C}^n} |f(\xi) - P_{k,\delta}(\xi)|^2 e^{-2\varphi_k(\xi)} d\lambda(\xi) \\ &\leq \frac{\delta^2 (1 + \|z\|)^{(\rho-1)(2n-1)}}{\sigma_n(1)} e^{2M_k} e^{2\varphi_k(z)}. \end{aligned}$$

По m выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что при некотором $C_{m,k} > 0$ будет справедливо неравенство

$$\varphi_m(z) \geq \varphi_k(z) + \frac{(\rho-1)(2n-1)}{2} \ln(1 + \|z\|) + C_{m,k}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Это возможно в силу условия 2) на весовые функции φ_m . Полагая теперь $\delta = \varepsilon \sqrt{\sigma_n(1)} e^{C_{m,k}} / e^{M_k}$, получим $\|f - P_{k,\delta}\|_{\varphi_m} < \varepsilon$. Тем самым (в силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$) доказана полнота полиномов в $E(\Phi)$.

ЛЕММА 5. Пусть $S \in E'(\Phi)$. Тогда $\widehat{S}(z) = (S_\xi, e^{(\xi, z)})$ – целая функция в $\mathbb{C}^n$, причем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(D^\alpha \widehat{S})(z) = (S, \xi^\alpha e^{(\xi, z)}), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (7)$$

и при некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$

$$|\widehat{S}(z)| \leq C e^{\varphi_m^*(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\widehat{S}$ аналитична по каждой переменной в $\mathbb{C}^n$. По теореме Хартогса это будет означать, что $\widehat{S}$ – целая функция. Итак, пусть ζ – произвольная точка в $\mathbb{C}^n$. Для $j = 1, \dots, n$ пусть $h_j = (0, \dots, h, \dots, 0)$, где $h \in \mathbb{C}$ стоит на j -м месте. Покажем, что

$$\widehat{S}(\zeta + h_j) - \widehat{S}(\zeta) - (S_\xi, \xi_j e^{(\xi, \zeta)}) h = o(\|h_j\|), \quad \|h_j\| \rightarrow 0. \quad (9)$$

Отметим вначале, что поскольку $S \in E'(\Phi)$, то найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$|(S, f)| \leq C \|f\|_{\varphi_m}, \quad f \in E(\Phi). \quad (10)$$

Для $h \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию $g_h(\xi) = e^{i\langle \xi, \zeta \rangle} (e^{i\xi_j h} - 1 - ih\xi_j)$ – целую функцию переменного ξ . Легко показать, что

$$|g_h(\xi)| \leq (|\xi_j| |h|)^2 e^{\operatorname{Re} \langle \xi, \zeta \rangle + |\xi_j| |h|}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Следовательно, $\|g_h\|_{\varphi_m} = O(h^2)$, $h \rightarrow 0$. И тогда в силу (10) $(S, g_h) = O(h^2)$, $h \rightarrow 0$. Пользуясь линейностью S , получаем (9). Тем самым показано, что $\hat{S}$ аналитична по z_j в точке ζ и

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial z_j}(\zeta) = (S_\xi, \xi_j e^{\langle \xi, \zeta \rangle}).$$

Так как в пространстве $E(\Phi)$ операция умножения на полиномы непрерывна, то формула (7) вытекает из доказанного. Оценка (8) следует из (10) и (2).

Лемма 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Топология пространства $E^*(\Phi)$ может быть описана следующим образом. Пусть

$$V_m = \{f \in E(\Phi) : \|f\|_{\varphi_m} \leq 1\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Гомотетические образы V_m образуют базис окрестностей в $E(\Phi)$. Пусть

$$V_m^0 = \{F \in E'(\Phi) : |(F, f)| \leq 1 \quad \forall f \in V_m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

– поляр в $E'(\Phi)$ окрестности V_m . Образует векторное подпространство

$$Q_m = \bigcup_{\alpha > 0} (\alpha V_m^0)$$

в $E'(\Phi)$, порожденное полярной V_m^0 . Наделим Q_m топологией, введя норму

$$q_m(F) = \sup_{f \in V_m} |(F, f)|, \quad F \in Q_m.$$

Заметим, что $E'(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$. Определим в $E'(\Phi)$ топологию λ внутреннего индуктивного предела пространств Q_m . Поскольку $E(\Phi)$ – пространство (M^*) , то $E(\Phi)$ – монтелевское [7; предложение 7], а значит, и рефлексивное пространство. В таком случае $E(\Phi)$ относится к классу так называемых правильных пространств [9; с. 699]. Поэтому сильная топология в сопряженном пространстве совпадает с топологией λ .

При доказательстве теоремы нам понадобятся два следующих результата. Первый из них – теорема Юлмухаметова [10], обобщающая результат Хёрмандера [11; теорема 4.4.3] о продолжении аналитических функций заданного роста с комплексного подпространства на все пространство.

ТЕОРЕМА А. Пусть φ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq M, \quad \text{если} \quad \|z - w\| \leq (1 + \|z\|)^\gamma,$$

где $\gamma < 0$ – некоторое число. Пусть Σ – комплексная плоскость в $\mathbb{C}^n$. Для всякой аналитической функции f на Σ такой, что $\ln |f(z)| \leq \varphi(z)$, существует целая функция U в $\mathbb{C}^n$ такая, что $U = f$ на Σ и

$$\ln |U(z)| \leq \varphi(z) + N_p \ln(\|z\| + e + d_\Sigma), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где d_Σ – расстояние от Σ до начала координат и постоянная N_p зависит лишь от M , γ и не зависит от функций φ , f и от Σ .

Для обозначения преобразования Фурье обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ используем символ $\mathcal{F}[f]$, понимая под этим функционал из $S'(\mathbb{R}^n)$, определяемый формулой

$$(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g]) = (2\pi)^n (f, g), \quad g \in S(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathcal{F}[g]$ – преобразование Фурье функции $g \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}[g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Спектральной функцией* функции $f \in H(\mathbb{C}^n)$ называется обобщенная функция $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $g(\xi) e^{-\langle y, \xi \rangle} \in S'(\mathbb{R}^n)$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$;
- 2) $f(z) = \mathcal{F}[g(\xi) e^{-\langle y, \xi \rangle}](x)$ при всех $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$.

Сформулируем второй необходимый нам результат.

ТЕОРЕМА В. *Пусть ϕ – некоторая положительная выпуклая в $\mathbb{R}^n$ функция такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует $y = y(x) \in \mathbb{R}^n$ такое, что $\phi^*(y) = \langle y, x \rangle - \phi(x)$ и, кроме того, для некоторых постоянных $A > 0$, $B > 0$, $\beta > 0$*

$$\|y(x)\| \leq A \|x\|^\beta + B, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $f(z)$ – некоторая целая в $\mathbb{C}^n$ функция, удовлетворяющая оценке

$$|f(z)| \leq C(1 + \|z\|)^k e^{\phi^*(-y)}, \quad \text{где } z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad C > 0.$$

Тогда ее спектральная функция $g(\xi)$ представляется в виде суммы конечного числа обобщенных производных от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$:

$$g(\xi) = \sum_{\alpha} D^{\alpha} g_{\alpha}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющих при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и некоторых $l_{\alpha} \in \mathbb{N}$ оценке

$$|g_{\alpha}(\xi)| \leq c_{\alpha} (1 + \|\xi\|)^{l_{\alpha}} e^{-\phi(\xi)}.$$

Теорема В содержится в работе Попёнова [12] и является обобщением теоремы Эскина [13], в которой $\phi(x) = \|x\|^p$, $p > 1$. Доказательство теоремы В проводится по той же схеме, что и в [13] (см. также [14], [15]).

3. Доказательство теоремы. Прежде всего отметим, что согласно лемме 5 линейное отображение L действует из $E^*(\Phi)$ в $E(\Phi^*)$. Покажем, что оно непрерывно. Пусть $S \in Q_m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $|(S, f)| \leq q_m(S)$ для всех $f \in V_m$. То есть,

$$|(S, f)| \leq q_m(S) \|f\|_{\varphi_m} \quad \forall f \in E(\Phi).$$

Следовательно, для $S \in Q_m$

$$|\hat{S}(z)| \leq q_m(S) e^{\varphi_m^*(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

и, значит, $\|\hat{S}\|_{\varphi_m^*} \leq q_m(S)$. Отсюда следует непрерывность L .

Отображение L инъективно. Действительно, пусть $L(S) \equiv 0$ для $S \in E'(\Phi)$. Пользуясь леммой 5, имеем $(S, \xi^\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. А поскольку по лемме 4 полиномы плотны в $E(\Phi)$, то $S \equiv 0$.

Покажем, что отображение L сюръективно. Пусть $F \in E(\Phi^*)$. Тогда целая функция F при некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \leq c e^{\varphi_m^*(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Покажем, что существует функционал $S \in E'(\Phi)$ такой, что $\hat{S} = F$.

Предварительно рассмотрим пространство $\mathcal{E}(\Psi)$, построенное по системе Ψ функций $\psi_m(x, y) = \varphi_m(x + iy)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, как проективный предел пространств

$$\mathcal{E}(\psi_m) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^{2n}) : p_m(f) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{2n}, |\alpha| \leq m} \frac{|(D^\alpha f)(\xi)|}{e^{\psi_m(\xi)}} < \infty \right\}.$$

Поскольку для любых $m \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, 2n$

$$p_m\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right) \leq e^{b_m} p_{m+1}(f), \quad f \in \mathcal{E}(\Psi),$$

то в пространстве $\mathcal{E}(\Psi)$ операция дифференцирования непрерывна. Умножение на полином также непрерывно в $\mathcal{E}(\Psi)$ (в силу условия 1) на весовые функции φ_m).

С функцией $f \in E(\Phi)$ свяжем бесконечно дифференцируемую в $\mathbb{R}^{2n}$ функцию

$$\tilde{f}: \quad \tilde{f}(x, y) = f(x + iy), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь интегральным представлением Коши для функции f и неравенством (6), можно показать, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{2n}$, $\nu \in \mathbb{N}$

$$|(D^\alpha \tilde{f})(\xi)| \leq (\sqrt{n})^{|\alpha|} \|f\|_{\varphi_\nu} (1 + \|\xi\|)^{(\rho-1)|\alpha|} e^{\psi_\nu(\xi) + M_\nu}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (11)$$

Здесь для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{2n}$. Из последней оценки следует, что $\tilde{f} \in \mathcal{E}(\Psi)$. Действительно, пусть $m \in \mathbb{N}$ взято произвольно. Положим $p = [(\rho - 1)m/a] + 1$. Ограничившись в (11) мультииндексами $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ с $|\alpha| \leq m$, полагая $\nu = m + p$ и пользуясь условием 1) на веса φ_m , найдем постоянную $K_m > 0$ такую, что

$$p_m(\tilde{f}) \leq K_m \|f\|_{\varphi_{m+p}}, \quad f \in E(\Phi).$$

Следовательно, $\tilde{f} \in \mathcal{E}(\Psi)$ и линейное отображение $I: E(\Phi) \rightarrow \mathcal{E}(\Psi)$, действующее по правилу $I(f) = \tilde{f}$, является непрерывным.

Положим для краткости

$$\tilde{\psi}_m(w) = \psi_m^*(-\operatorname{Im} w), \quad w \in \mathbb{C}^{2n}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из определения следует, что $\tilde{\psi}_m$ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^{2n}$. Заметим, что для $t \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m(-it, t) &= \sup_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^{2n}} ((\operatorname{Re} t)\xi_1 - (\operatorname{Im} t)\xi_2 - \psi_m(\xi_1, \xi_2)) \\ &= \sup_{\xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re}\langle t, \xi_1 + i\xi_2 \rangle - \varphi_m(\xi_1 + i\xi_2)) = \varphi_m^*(t). \end{aligned}$$

Действуя так же, как и в лемме 1, можно убедиться, что если

$$\|\eta - \xi\| \leq \frac{1}{(1 + \|\xi\|)^{1/(\mu-1)}}, \quad \eta, \xi \in \mathbb{R}^{2n},$$

то при некотором $C_m > 0$ $|\psi_m^*(\eta) - \psi_m^*(\xi)| \leq C_m$. Для функции $\tilde{\psi}_m$ это означает, что если

$$\|z - \zeta\| \leq \frac{1}{(1 + \|\zeta\|)^{1/(\mu-1)}}, \quad z, \zeta \in \mathbb{C}^{2n},$$

то $|\tilde{\psi}_m(z) - \tilde{\psi}_m(\zeta)| \leq C_m$.

Пользуясь теоремой А, для функции F найдем целую функцию $U \in H(\mathbb{C}^{2n})$, удовлетворяющую при некотором $N \in \mathbb{N}$ оценке

$$|U(w)| \leq (1 + \|w\|)^N e^{\psi_m^*(-\operatorname{Im} w)}, \quad w \in \mathbb{C}^{2n},$$

и такую, что $U = F$ на комплексном подпространстве $W = \{(-it, t) : t \in \mathbb{C}^{2n}\}$ размерности n .

По теореме В для каждого $y \in \mathbb{R}^{2n}$ функция $U(x + iy)$, рассматриваемая как элемент из $S'(\mathbb{R}^{2n})$, есть преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста $g_y(\xi) = g(\xi)e^{-\langle y, \xi \rangle}$, $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$, где для обобщенной функции $g(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ имеет место представление в виде суммы конечного числа дифференциальных операторов конечного порядка от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$:

$$g(\xi) = \sum_{\alpha} D^{\alpha} g_{\alpha}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n},$$

причем функции $g_{\alpha}(\xi)$ удовлетворяют при некоторых $l_{\alpha} \in \mathbb{N}$, $c_{\alpha} > 0$ оценке

$$|g_{\alpha}(\xi)| \leq c_{\alpha}(1 + \|\xi\|)^{l_{\alpha}} e^{-\psi_m(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Заметим, что для любого $f \in S(\mathbb{R}^{2n})$

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} U(x)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} \sum_{\alpha} g_{\alpha}(\xi)((-D)^{\alpha} e^{i\langle x, \xi \rangle}) d\xi \right) f(x) dx. \quad (12)$$

Определим функционал T на $\mathcal{E}(\Psi)$ по формуле

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sum_{\alpha} g_{\alpha}(\xi)((-D)^{\alpha} f)(\xi) d\xi, \quad f \in \mathcal{E}(\Psi).$$

Очевидно, $T \in \mathcal{E}'(\Psi)$. Из равенства (12) вытекает, что $\widehat{T}(x) = U(x)$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Отсюда по теореме единственности $\widehat{T}(z) = U(z)$, $z \in \mathbb{C}^{2n}$.

Определим функционал S на $E(\Phi)$ по правилу

$$(S, f) = (T, I(f)), \quad f \in E(\Phi).$$

Очевидно, S – линейный непрерывный функционал на $E(\Phi)$. Проверка показывает, что $\widehat{S} = F$.

Итак, L – линейное непрерывное биективное отображение. По теореме об открытом отображении L – топологический изоморфизм.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.
- [2] L. Ehrenpreis, *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Pure Appl. Math., **17**, Wiley-Interscience publ., New York, 1970.
- [3] B. A. Taylor, “The fields of quotients of some entire functions”, *Entire Functions and Related Parts of Analysis* (Proc. Sympos. Pure Math., La Jolla, Calif., 1966), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 468–474.
- [4] В. С. Ткаченко, “Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста”, *Матем. сб.*, **102**:3 (1977), 435–456.
- [5] F. Haslinger, “Weighted spaces of entire functions”, *Indiana Univ. Math. J.*, **35**:1 (1986), 193–208.
- [6] С. В. Попёнов, “О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^m$ ”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 374–384.
- [7] Ж. Себастьян-и-Сильва, “О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Математика: Сб. пер.*, **1**, 1, 1957, 60–77.
- [8] B. A. Taylor, “On weighted polynomial approximation of entire functions”, *Pacific J. Math.*, **36**:2 (1971), 523–539.
- [9] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1969.
- [10] Р. С. Юлмухаметов, “Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:4 (1996), 205–224.
- [11] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.
- [12] С. В. Попёнов, “Об одном весовом пространстве целых функций”, *Исследования по теории аппроксимации функций*, БФАН СССР, Уфа, 1986, 89–96.
- [13] Г. И. Эскин, “Обобщение теоремы Палая–Винера–Шварца”, *УМН*, **16**:1 (1961), 185–188.
- [14] В. С. Владимиров, “Функции, голоморфные в трубчатых конусах”, *Изв. АН СССР*, **27**:1 (1963), 75–100.
- [15] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.

Н. Т. Ахтямов

Самарская государственная академия путей сообщения,
филиал г. Уфа
E-mail: nail9119@rambler.ru

Поступило

30.03.2007

Исправленный вариант

10.07.2007