Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Колесников, Топологические сплайны в локально выпуклых пространствах, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 857–885

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:35:11

Топологические сплайны в локально выпуклых пространствах

А. П. Колесников

В настоящей работе предложен новый метод приближения в различных функциональных пространствах. Отличительная особенность этого метода заключается в том, что выбор базисных приближающих элементов существенно зависит от топологии заданного функционального пространства. Базисные элементы строятся с помощью теории двойственности локально выпуклых пространств. Дается способ их точного вычисления. Аппроксимирующие конструкции являются далеко идущими обобщениями классических сплайнов Шенберга и по аналогии с последними названы топологическими сплайнами. Такое определение сплайна в общем случае не связано с выбором сетки. В работе приведено много примеров, полезных для практических приложений.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. В работе [1] вычисляются алгебраические сплайны как точные вариационные решения конечной системы линейных функциональных уравнений

$$\langle x, f_i \rangle = r_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

в локально выпуклом пространстве (кратко ЛВП) E . В (1.1) функционалы (f_i) – линейно независимые элементы из алгебраически сопряженного пространства E^* . Существование элемента $x \in E$, удовлетворяющего системе уравнений (1.1), следует из существования системы функций (e_k) , $k = 1, \dots, n$, двойственной для семейства (f_i) , т.е. такой, что выполнены условия $\langle e_k, f_i \rangle = \delta_{ik}$. Если элементы e_k найдены, то решение системы уравнений (1.1) можно взять в виде $x = \sum_{k=1}^n r_k e_k$. В [1] единственное решение системы получено при минимизации оценочного функционала $f(x)$ на множестве функций, удовлетворяющих ограничениям (1.1). Алгебраический сплайн определен в виде линейной комбинации базисных сплайнов (φ_k) , $k = 1, \dots, n$:

$$x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k,$$

являющихся точными решениями этой вариационной задачи. Коэффициенты (λ_k) , $k = 1, \dots, n$, находятся из интерполяционных условий (1.1).

Здесь результаты заметки [1] обобщаются на случай бесконечных систем линейных уравнений. Существует необходимость определить топологию в E таким образом, чтобы имели смысл бесконечные суммы x_∞ , для которых введено требование

Работа выполнена при поддержке Фонда по фундаментальным исследованиям в области авиационной и ракетно-космической техники (грант № 96-17-1).

их сходимости. Всюду далее пространство E считается локально выпуклым и сепарабельным.

Пусть (f_i) , $i = 1, 2, \dots$, – счетное семейство линейно независимых непрерывных функционалов из топологически сопряженного пространства E' (или его подпространства). Ставится задача нахождения решения системы линейных функциональных уравнений

$$\langle x, f_i^{(n)} \rangle = r_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, k(n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in E, \quad (1.2)$$

по известному множеству пар (f_i, r_i) , $i = 1, 2, \dots$.

Выскажем некоторые общие соображения об условиях разрешимости и единственности системы (1.2). Если для (f_i) построена дуальная система функций (e_k) , $k = 1, 2, \dots$, то решение системы (1.2) формально может быть взято в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, f_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k.$$

Однако из существования двойственной для семейства (f_i) системы (e_k) в пространствах с локально выпуклой топологией еще не следует, что (e_k) является топологическим базисом в E . Чтобы разложение $x = \sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$ существовало для произвольного элемента $x \in E$, необходимо чтобы множество линейных комбинаций элементов (e_k) было всюду плотно в E , а для единственности разложения требуется, чтобы элементы e_k были линейно независимы. Но это далеко не достаточные условия для того, чтобы семейство (e_k) оказалось базисной последовательностью. Решение задачи (1.2) можно считать завершенным, если обеспечена сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$.

Имея решение x_n для конечного подмножества пар (f_i, r_i) , $i = 1, \dots, n$, естественно поставить вопрос: как нужно дополнить постановку задачи (1.1), чтобы иметь сильную сходимость $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ в топологии пространства E ? Будем придерживаться следующих соглашений относительно задачи (1.2), связанных с теми или иными ограничениями на свойства ее решения.

1) В качестве функциональной реализации E будем использовать векторное пространство непрерывных числовых функций, т.е. на E определен линейный функционал

$$t: \langle x, \delta_t \rangle = x(t), \quad x(t) \in E, \quad t \in K \subset T$$

(T – множество, наделенное топологией локально компактного пространства, K – компакт в T). Выбор в качестве пространства решений задачи (1.2) векторного пространства непрерывных функций определен применяемым методом ее решения. Возможны дополнительные ограничения на свойства E как векторного пространства, связанные с тем, что функционалы f_i на E должны быть конечными.

2) Семейство

$$F_0 = \bigcup_{n,i} f_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, k(n), \quad n = 1, \dots, \infty,$$

тотально на E , т.е. $\langle x, f \rangle = 0$ для всех $f \in F_0$ влечет равенство $x = 0$. Это условие вытекает из требования линейной независимости функционалов f_i . Его выполнение

означает, что однородная система (1.2) имеет только тривиальное решение. Если семейство (f_i) , $i = 1, 2, \dots$, тотально на E , то решение $x \in E$ (в предположении, что оно существует) единственным образом определяется последовательностью (r_i) . Таким образом, тотальность семейства (f_i) на E является необходимым и достаточным условием единственности решения (1.2).

3) Определим F как векторное подпространство в E' , порожденное функционалами (f_i) : $F = L(f_i)$, где $L(f_i)$ – линейная оболочка семейства (f_i) . Естественный выбор топологии пространства E и его сопряженного E' определен требованием: множество F всюду плотно в E' , т.е. слабое замыкание множества F совпадает с E' : $[F] = E'$. Условие 3) в ЛВП оказывается эквивалентным условию 2).

4) Из условия 3) вытекает существование единственного разложения $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i$ для всякого $f \in E'$, иными словами, (f_i) – счетная система элементов, порождающая E' .

5) Сильная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$ обеспечивается наложением таких ограничений на двойственные топологии пространств E и E' , чтобы семейство (f_i) было топологическим базисом в F .

6) Существует и указан способ построения непрерывного линейного отображения $G: F \rightarrow E$, переводящего сходящийся в F ряд $\sum_i \lambda_i f_i$ в ряд $\sum_i \lambda_i \varphi_i$, построенный по семейству образов: $\varphi_i = Gf_i$, $i = 1, 2, \dots$, образующих базис Шаудера в E или его подпространстве. Базис (φ_i) в E называется *базисом Шаудера*, если коэффициенты разложения $\lambda_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, для каждого $x \in E$ – это непрерывные линейные функционалы на E .

Наличие топологических базисов в ЛВП мы будем связывать с выяснением условий существования и построением изоморфизмов, действующих из заданного пространства E в отделимое сопряженное пространство E' или некоторое другое отделимое пространство $F \subset E'$, базис в котором существует. Непрерывное отображение G строится как обратное к оператору $A: E \rightarrow F$, являющемуся инъективным топологическим вложением пространства E в пространство E' . Отображение $G: F \rightarrow E$ переводит известный топологический базис (f_k) пространства F в топологический базис (φ_k) пространства E : $\varphi_k = G(f_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Пространство F будем называть *калибровочным* для E .

7) При выполнении перечисленных выше требований существует топологический изоморфизм $(e_k) \leftrightarrow (\varphi_k)$, обеспечивающий корректную разрешимость задачи определения двойственной для (f_i) базисной последовательности (e_k) по известному базису (φ_k) . На самом деле решать задачу определения базиса (e_k) нет необходимости. В силу того, что обе эти последовательности (e_k) и (φ_k) базисные в одном и том же пространстве, существуют топологические изоморфизмы

а) $x \leftrightarrow (\lambda_k)$, определяемый рядом $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k$;

б) $x \leftrightarrow (r_k)$, определяемый рядом $x = \sum_{k=1}^{\infty} r_k e_k$.

Тогда отношение топологического изоморфизма существует и для последовательностей $(\lambda_k) \leftrightarrow (r_k)$. Оно устанавливается бесконечной системой линейной алгебраических уравнений $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, f_i \rangle \lambda_k = r_i$, $i = 1, 2, \dots$, матричный оператор которой имеет непрерывный обратный. Следовательно, задача определения коэффициентов (λ_k) устойчиво разрешима.

Приведем краткое содержание работы. Заметим прежде всего, что ее изложение ориентируется в значительной степени на выяснение вопроса, какие именно тополо-

гические представления позволяют расширить классическое определение сплайна. Пункты 2, 3 являются вводными и включают некоторые известные общие результаты, касающиеся теории двойственности в ЛВП. В п. 4 двойственность используется для построения топологических базисов в ЛВП (названных базисными топологическими сплайнами) и доказательства соответствующих теорем. В пп. 5–8 приводятся примеры.

2. Двойственность в векторных пространствах. Пусть E – векторное пространство и $M \subset E$, $F \subset E^*$ – векторные подпространства в E и E^* . Положим

$$M^\perp = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = 0 \text{ для всех } x \in M\},$$

$$F^\perp = \{x \in E : \langle x, f \rangle = 0 \text{ для всех } f \in F\}.$$

Множества $M^\perp$ и $F^\perp$ суть аннуляторы подпространств M и F . Ясно, что $M^\perp$ и $F^\perp$ – подпространства в E^* и E соответственно. Таким образом, подпространство $M^\perp$ состоит из всех конечных линейных функционалов на E , равных нулю на M , а $F^\perp$ – максимальное подпространство в E , на котором все функционалы из F равны нулю.

Пусть E , F – векторные пространства, $\langle E, E^* \rangle$, $\langle F, F^* \rangle$ – соответствующие дуальные пары, A^* – линейное отображение из F^* в E^* , сопряженное для линейного отображения $A: E \rightarrow F$ и определенное соотношением $A^*f(x) = f(Ax)$ для всех $f \in F^*$ для каждого $x \in E$. Тогда [2]

- а) при всяком $f^* \in F^*$ функция $A^*f^* \in E^*$;
- б) $(A^*)^{-1}\{0\} = (A(E))^\perp$, т.е. отображение A^* тогда и только тогда является изоморфизмом из F^* в E^* , когда A отображает E на все F ;
- с) $((A)^{-1}\{0\})^\perp = A^*(F^*)$, т.е. A^* тогда и только тогда отображает F^* на все E^* , когда A является изоморфизмом из E в F .

3. Двойственность в ЛВП. Пусть векторные пространства E и F наделены локально выпуклой топологией и задан линейный непрерывный оператор $A: E \rightarrow F$ из E в F . Наша основная цель заключается в выяснении условий, при которых он автоматически открыт, т.е. является топологическим гомоморфизмом пространств E и F . Классическая теорема Банаха утверждает, что всякое взаимно однозначное непрерывное линейное отображение B -пространства на другое B -пространство открыто.

Теорема 3.1 (см. [3], [4]) существенно расширяет теорему Банаха об открытости непрерывного отображения как по отношению к области определения, так и по отношению к множеству значений и указывает на границы обобщения этой теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть E , F – локально выпуклые пространства и, кроме того, F отделимо и бочечно. Рассмотрим следующие высказывания о свойствах пространства E :

- а) E – B -полное (или, что то же самое, совершенно полное) пространство;
- б) всякое непрерывное линейное отображение E на F открыто (является топологическим гомоморфизмом);
- с) E – B_r -полное пространство;
- д) всякое взаимно однозначное непрерывное линейное отображение E на F открыто (является топологическим изоморфизмом).

Утверждается, что

$$\text{а) } \Longleftrightarrow \text{ б), } \quad \text{с) } \Longleftrightarrow \text{ д).}$$

Например, пространства Фреше бочечны и совершенно полны. И тогда заключенные теоремы 3.1 для них верно.

Если ядро отображения $A: K \rightarrow F$ не равно нулю: $\ker A \neq \{0\}$, полезно сводить дело к случаю, когда A инъективно, по следующей схеме. Пусть E, F – отдельные локально выпуклые пространства, $\langle E, E' \rangle, \langle F, F' \rangle$ – отдельные дуальные пары и A – линейное отображение E в F . Через N обозначим нуль-пространство (ядро) оператора A : $N = A^{-1}(\{0\}) = \ker A$. Отображение A инъективно тогда и только тогда, когда $N = \{0\}$. В общем случае N есть подпространство в E , которое замкнуто тогда и только тогда, когда оператор A непрерывен.

Образуем отдельное факторпространство $\mathbf{E} = E/N$ и рассмотрим ассоциированное отображение $\mathbf{A}$ факторпространства $\mathbf{A}$, полагая $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A(x)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, x – произвольный элемент, принадлежащий классу $\mathbf{x}$. Факторпространство $\mathbf{E}$, наделенное фактортопологией, отделимо тогда и только тогда, когда N – замкнутое подпространство в E . Каждое линейное отображение $A: E \rightarrow F$ обладает разложением $A = \mathbf{A} \circ k$, где $\mathbf{A}: \mathbf{E} \rightarrow A(E)$ – алгебраический изоморфизм, сопоставляющий классу эквивалентности $\mathbf{x}$ в $\mathbf{E}$ по модулю N общий образ $A(x)$, $x \in \mathbf{x}$, элементов из этого класса при отображении A , а k – каноническое отображение E на $\mathbf{E}$. Отображение A непрерывно и открыто (т.е. оно гомоморфизм) тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ непрерывно и открыто (в силу того, что каноническое отображение непрерывно и открыто). Тогда утверждения

- а) A – топологический гомоморфизм;
- б) $\mathbf{A}$ – топологический изоморфизм

эквивалентны. В силу этого иногда достаточно рассматривать случаи, когда отображение A взаимно однозначно. При этом может быть введено в рассмотрение отображение A^{-1} пространства $A(E)$ в E .

Далее выясняются связи между свойствами линейных отображений $A: E \rightarrow F$ относительно исходных топологий пространств E и F с его свойствами относительно слабых или сильных топологий (при рассмотрении дуальных пар $\langle E, E' \rangle$ и $\langle F, F' \rangle$). Об отображении A , непрерывном в слабых топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$, говорят, что оно *слабо непрерывно*. Двойственной к топологии $\sigma(E, E')$ является топология $\sigma(E', E)$. Для краткости некоторое свойство в слабой топологии $\sigma(E', E)$ обычно обозначают словом *слабо**. О сопряженном для A отображении A' , непрерывном в слабых топологиях $\sigma(F', F)$ и $\sigma(E', E)$, говорят, что оно *слабо* непрерывно*. Ясно, что *слабо** непрерывный функционал на E' порождается некоторым элементом $x \in E$. Отображение A' называется *сильно* непрерывным*, если оно непрерывно в топологиях $\beta(F', F)$ и $\beta(E', E)$.

В частности, теоремы об открытости непрерывного отображения будут излагаться в тесной связи с теорией двойственности, лежащей в основе рассматриваемого метода построения гомоморфизмов $A: E \rightarrow F$. Изложение вопроса начнем с перечисления некоторых нужных для дальнейшего результатов, характеризующих наиболее общие свойства сопряжения в локально выпуклых пространствах [3]:

- (1) отображение A слабо непрерывно тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$D(A') = F'$$

($D(A')$ – область определения оператора A');

- (2) если отображение A слабо непрерывно, то и отображение A' слабо* непрерывно;

- (3) если отображение A слабо непрерывно, то отображение A' сильно* непрерывно;
- (4) непрерывное отображение A слабо непрерывно;
- (5) слабо* непрерывное отображение A' сильно* непрерывно;
- (6) слабо непрерывное отображение A непрерывно, если E метризуемо или бочечно;
- (7) если непрерывное отображение A открыто, то оно и слабо открыто;
- (8) если непрерывное отображение A слабо открыто, то оно открыто, если F метризуемо или бочечно.

Важным для исследования двойственности является аппарат поляр. Пусть $\langle E, E' \rangle$ – дуальная пара векторных пространств, наделенных локально выпуклой топологией и $G \subset E$, $B \subset E'$ – подмножества в E и E' соответственно (не обязательно замкнутые). Полярой G° множества G относительно заданной пары называется множество

$$G^\circ = \{f \in E' : |\langle x, f \rangle| \leq 1 \text{ для всех } x \in G\}.$$

Оно является $\sigma(E, E')$ -замкнутым выпуклым множеством в E' , содержащим нуль. Если B – множество в E' , то его поляр B° в E определяется симметрично:

$$B^\circ = \{x \in E : |\langle x, f \rangle| \leq 1 \text{ для всех } f \in B\}.$$

Напомним кратко некоторые свойства поляр.

СВОЙСТВО 1. Имеем $\emptyset^\circ = E'$ и $E^\circ = \{0\}$, $(E')^\circ = \{[0]\}$, $[0]$ – замыкание нуля в E . Если E отделимо, то $[0] = 0$.

Первые два свойства очевидны, для доказательства третьего привлекается теорема Хана–Банаха. Сопряженное пространство E' может содержать собственное подмножество B (всюду плотное в E'), для которого $B^\circ = 0$. Поляра множества G° называется биполяр G и обозначается $G^{\circ\circ}$.

СВОЙСТВО 2. Биполяр $G^{\circ\circ}$ совпадает с $\sigma(E, E')$ -замкнутой выпуклой линейной оболочкой множества $G \cup \{0\}$ [4; гл. 4, § 1].

Это утверждение, называемое теоремой о биполяре, есть следствие теоремы Хана–Банаха.

СВОЙСТВО 3. Имеет место эквивалентность

$$[L(G)] = E \iff G^\circ = E^\circ = \{0\}.$$

Подмножество $G \subset E$ называется фундаментальным (или всюду плотным) в E , если замыкание линейной оболочки $[L(G)]$ множества G совпадает с E : $[L(G)] = E$. Свойство 3 носит название теоремы Банаха об аппроксимации [3; гл. 2, § 2.3]: множество G фундаментально в E тогда и только тогда, когда $G^\circ = E^\circ = \{0\}$.

Пусть $M \subset E$, $F \subset E'$ – векторные подпространства в E и E' соответственно, которые не предполагаются замкнутыми. Соответствующие замыкания $[M]$ и $[F]$ суть также векторные подпространства. Поляр M° состоит из всех таких элементов $f \in E'$, что $\langle x, f \rangle = 0$ для всех $x \in M$. В этом случае обычно меняют обозначение M° на $M^\perp$ и множество $M^\perp$ называют аннулятором множества M .

Аннулятор $F^\perp$ множества F определяется симметрично. В частности, имеют место равенства $E^\perp = \{0\}$, $(E')^\perp = \{0\}$, первое из которых очевидно, а второе есть следствие теоремы Хана–Банаха.

Наделение отделимого локально выпуклого пространства и его сопряженного их слабыми топологиями устанавливает между ними двойственные отношения, симметричные как в алгебраическом, так и топологическом смысле. Следующие ниже свойства характеризует двойственность между двумя определенными выше типами аннуляторов. Несложно доказать следующие два утверждения [5], которые вскоре будут использованы:

(А) подпространство $M^\perp$ слабо* замкнуто в E' ;

(Б) подпространство $F^\perp$ сильно (а значит, и слабо) замкнуто в E .

Слабые и сильные замыкания в ЛВП, вообще говоря, не совпадают, но они совпадают для выпуклых подмножеств (например, подпространств). Из свойства 2 следует, что $M^{\perp\perp}$ совпадает с сильным замыканием M в E (совпадающим с его слабым замыканием):

СВОЙСТВО 4. *Выполнено равенство $M^{\perp\perp} = [M]$.*

Если M фундаментально в E , т.е. $[M] = E$, то $M^{\perp\perp} = E$. В силу двойственности $F^{\perp\perp}$ совпадает со слабым* замыканием F в E' :

СВОЙСТВО 5. *Выполнено равенство $F^{\perp\perp} = [F]$.*

Из свойства 3 сразу получаем, что подпространство M фундаментально в E тогда и только тогда, когда $M^\perp = E^\perp = \{0\}$:

СВОЙСТВО 6. *Имеет место эквивалентность*

$$[M] = E \iff M^\perp = E^\perp = \{0\}.$$

В силу двойственности получаем свойство

СВОЙСТВО 7. *Имеет место эквивалентность*

$$[F] = E' \iff F^\perp = (E')^\perp = \{0\}.$$

Множество $F \subset E'$ называется *тотальным* на E , если для всякого $f \in F$ такого, что $f(x) = 0$, выполнено $x = 0$. Это определение позволяет сформулировать свойство 7 так: множество $F \subset E'$ фундаментально в E' тогда и только тогда, когда оно тотально на E .

Если $M = \ker A$ – замкнутое векторное подпространство в E с сопряженным E' , то сопряженное E' к факторпространству $\mathbf{E} = E/\ker A$ отождествимо с аннулятором $(\ker A)^\perp \subset E'$ подпространства $\ker A \subset E$ [6]:

СВОЙСТВО 8. *Имеет место равенство*

$$\mathbf{E}' = (\ker A)^\perp \subset E'.$$

Это свойство означает, что пространство всех непрерывных форм на $\mathbf{E}$ изоморфно пространству всех непрерывных форм на E , обращающихся всюду в нуль на $\ker A$, т.е. пространству $(\ker A)^\perp$.

Пусть $\langle E, E' \rangle$, $\langle F, F' \rangle$ – дуальные пары, отделимые соответственно по E' и F' , A – линейное отображение E в F , A' – его сопряженное такое, что $A'(F') \subset E'$.

Для выполнения этого условия требуется, чтобы A было слабо непрерывно. Далее всегда будем считать это выполненным. Пусть $G \subset E$ и $B \subset F'$. Тогда выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\alpha 1) \quad & A(G)^\circ = (A')^{-1}(G^\circ) \text{ для всех } G \subset E; \\ \beta 1) \quad & (A'(B))^\circ = (A)^{-1}(B^\circ) \text{ для всех } B \subset F' .\end{aligned}$$

Свойство $\alpha 1)$ сразу следует из определений сопряженного отображения и поляр:

$$\begin{aligned}A(G)^\circ &= \{f \in F' : |\langle Ax, f \rangle| \leq 1 \text{ для всех } x \in G\} \\ &= \{f \in F' : |\langle x, A'f \rangle| \leq 1 \text{ для всех } x \in G\} = (A')^{-1}(G^\circ).\end{aligned}$$

Аналогичным рассуждением убеждаемся в справедливости свойства $\beta 1)$.

Следующие два свойства дают описание множества значений линейного непрерывного оператора $A \in L_c(E, F)$ при помощи нуль-пространства сопряженного оператора $A' \in L_c(F', E')$ и наоборот, множества значений оператора A' при помощи нуль-пространства оператора A . Положив в $\alpha 1)$ и $\beta 1)$ $G = E$, $B = F'$, получаем

$$\begin{aligned}\alpha 2) \quad & A(E)^\perp = (A')^{-1}(\{0\}) = \ker A'; \\ \beta 2) \quad & (A'(F'))^\perp = (A)^{-1}(\{0\}) = \ker A.\end{aligned}$$

Свойства 4, 5, $\alpha 2)$, $\beta 2)$ приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}\alpha 3) \quad & (\ker A')^\perp = [A(E)]; \\ \beta 3) \quad & (\ker A)^\perp = [A'(F')].\end{aligned}$$

Используя свойства 6, 7 и $\alpha 2)$, $\beta 2)$, приходим еще к одной паре полезных утверждений:

$$\begin{aligned}\alpha 4) \quad & \text{образ } A(E) \text{ отображения } A \text{ всюду плотен в } F \text{ в топологии } \sigma(F, F') \\ & \Leftrightarrow \text{отображение } A' \text{ инъективно;} \\ \beta 4) \quad & \text{образ } A'(F') \text{ отображения } A' \text{ всюду плотен в } E' \text{ в топологии } \sigma(E', E) \\ & \Leftrightarrow \text{отображение } A \text{ инъективно.}\end{aligned}$$

Для доказательства основных теорем 4.1–4.2 далее привлекаются теоремы 3.2–3.7. Здесь будут интересны условия, при выполнении которых можно сделать заключение об открытости непрерывного линейного отображения $A: E \rightarrow F$ в предположении, что это свойство имеет место для слабых* или сильных* топологий сопряженных отображений.

Теоремы 3.2, 3.3 формулируют условия, необходимые и достаточные для того, чтобы слабо непрерывное линейное отображение оказалось слабо открытым. Здесь они приводятся без доказательства (см. [3], [7]).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть (E, E') , (F, F') – отделимые дуальные пары и $A: E \rightarrow F$ – слабо непрерывное инъективное линейное отображение. При выполнении этих условий

- отображение A является слабым изоморфизмом E в F тогда и только тогда, когда отображение A' сюръективно: $A'(F') = E'$;
- отображение A' есть слабый* изоморфизм пространства F' в E' тогда и только тогда, когда отображение A сюръективно: $A(E) = F$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $(E, E'), (F, F')$ – отделимые дуальные пары и A – слабо непрерывное линейное отображение E на $A(E) \subset F$. При выполнении этих условий

- а) отображение A является слабым гомоморфизмом A в F тогда и только тогда, когда множество $A'(F')$ слабо* замкнуто в E' ;
- б) отображение A' есть слабый* гомоморфизм пространства F' в E' тогда и только тогда, когда множество $A(E)$ замкнуто в F .

Следующая теорема утверждает эквивалентность некоторых условий, налагаемых на непрерывное линейное отображение $A: E \rightarrow F$ или сопряженное ему отображение (см. [3], [4]).

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть E и F – пространства Фреше и $A: E \rightarrow F$ – непрерывное линейное отображение E в F . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) A – топологический гомоморфизм;
- 2) A – слабый гомоморфизм;
- 3) множество $A(E)$ замкнуто в F ;
- 4) A' – слабый* гомоморфизм;
- 5) множество $A'(F')$ слабо* замкнуто в E' ;
- 6) множество $A'(F')$ сильно* замкнуто в E' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тривиально, что всякий топологический гомоморфизм E в F является слабым гомоморфизмом (свойства (4), (7) сопряжения в локально выпуклых пространствах). Обращение этого утверждения в общем случае неверно. Однако, если E и F – пространства Фреше, то имеет место эквивалентность $1) \Leftrightarrow 2)$, которая следует из свойств (4), (6)–(8) сопряжения в локально выпуклых пространствах. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 3)$ вытекает из теоремы о гомоморфизме для пространств Фреше [6; предложение 14, с. 176]. Эквивалентность $3) \Leftrightarrow 4)$ выводится из теоремы 3.3, б). Эквивалентность $2) \Leftrightarrow 5)$ есть следствие теоремы 3.3, а). Доказательство эквивалентности $5) \Leftrightarrow 6)$ нетривиально и длинно, поэтому ограничимся лишь ссылкой на него [3].

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 3.4. Отображение A – изоморфизм из E в F тогда и только тогда, когда

$$A'(F') = E', \quad [A(E)] = (\ker A')^\perp.$$

В общем случае свойство 6) может быть выведено (см. [3]) из условия

- 7) A' сильно* открыто,

что приводит к теореме (Дьедонне–Шварца):

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть E и F – пространства Фреше и A – непрерывное линейное отображение E в F . Если отображение A' является сильным* гомоморфизмом F' в E' , то A – топологический гомоморфизм E в F .

Обратная импликация $6) \Rightarrow 7)$ не имеет места. Поэтому из условия 4) в общем случае не следует, что A' является гомоморфизмом для сильных* топологий.

Следствия для теоремы 3.4, вытекающие из дополнительных условий:

- 1) отображение A инъективно;
- 2) отображение A сюръективно,

описывает

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть E, F – пространства Фреше, $A: E \rightarrow F$ – непрерывное линейное отображение. Тогда

- а) A есть биекция тогда и только тогда, когда A' – биекция;
- б) пусть A – изоморфизм и A' – инъекция; тогда A и A' сюръективны;
- с) если оба отображения A и A' сюръективны, то они оба инъективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть A – биекция. Тогда по свойству $\beta 4$) множество $A'(F')$ слабо* всюду плотно в E' . Кроме того, так как выполнено 3), то имеет место 5); следовательно, отображение A' есть сюръекция. Поскольку отображение A сюръективно, то по теореме 3.2 отображение A' инъективно и тогда A' – биекция.

Обратно, если A' – биекция, то по свойству $\alpha 4$) множество $A(E)$ всюду плотно в F . Так как, кроме того, выполнено 5), то имеет место утверждение 3), поэтому A – сюръекция. Поскольку A' – сюръекция, отображение A по теореме 3.2 инъективно. Это означает, что A – биекция.

б) Пусть A – изоморфизм. Тогда множество $A(E)$ замкнуто в F (теорема 3.4, 1) $\Leftrightarrow$ 3)). Так как отображение A' инъективно, то по свойству $\alpha 4$) образ $A(E)$ всюду плотен в F . Отсюда следует, что $A(E) = F$ и A – сюръекция на F . Далее, так как A – инъекция, то по свойству $\beta 4$) множество $A'(F')$ всюду плотно в E' . Кроме того, по теореме 3.4 1) $\Rightarrow$ 5), поэтому A' – сюръекция.

с) Если одно из отображений A или A' есть сюръекция, то другое инъективно.

Можно исключить гомоморфизмы в теореме 3.5, перейдя к факторпространствам. Поскольку $\ker A \neq \{0\}$ и оператор A непрерывен, $\ker A$ – замкнутое подпространство пространства E . Важно иметь ввиду, что факторпространство пространства Фреше по замкнутому подпространству есть снова пространство Фреше. Таким образом, факторпространство $\mathbf{E} = E/\ker A$ является пространством Фреше относительно введенной в нем фактортопологии. Сопряженное пространство для $\mathbf{E}$ может быть описано с помощью аннулятора $(\ker A)^\perp$ пространства $\ker A$, а именно, $\mathbf{E}' = (\ker A)^\perp$. Согласно теореме 3.4 и свойствам $\alpha 3$), $\beta 3$) имеем

$$R(A) = R(\mathbf{A}) = [A(E)] = (\ker A')^\perp \equiv \mathbf{F} \subset F,$$

$$R(A') = R(\mathbf{A}') = [A'(F')] = (\ker A)^\perp = \mathbf{E}' \subset E', \quad \mathbf{A}': \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{E}'.$$

Непрерывность оператора A влечет то, что $\mathbf{A}$ – непрерывное факторотображение $\mathbf{E}$ на $\mathbf{F} \subset F$. Поскольку отображения $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ сюръективны, по теореме 3.6 они оба инъективны. В этих условиях оператор $\mathbf{A}'$ определен на $D(\mathbf{A}') = F'/\ker A' = \mathbf{F}'$, действует на $R(\mathbf{A}') = \mathbf{E}' = (\ker A)^\perp \subset E'$ и $\mathbf{A}'$ – сильный* изоморфизм $\mathbf{F}'$ на $\mathbf{E}'$. Напомним также, что замкнутое подпространство пространства Фреше есть снова пространство Фреше. При оговоренных условиях теорема 3.5 может быть сформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ – пространства Фреше и $\mathbf{A}$ – непрерывное линейное отображение $\mathbf{E}$ на $\mathbf{F}$. Если сопряженное отображение $\mathbf{A}'$ является сильным* изоморфизмом пространств $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{E}'$, то $\mathbf{A}$ – топологический изоморфизм $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$.

Эти теоремы и понятие двойственности позволяют обнаружить естественные границы в выборе топологий E и F , при которых непрерывное отображение может быть также открытым.

Если E и F – банаховы пространства (а значит, пространства Фреше) и A – непрерывное линейное отображение E в F , то все условия 1)–7) теоремы 3.4 эквивалентны. И тогда из теорем 3.4–3.7 вытекают следующие утверждения:

- 8) A' – сильный изоморфизм E в F тогда и только тогда, когда $A(E) = F$, $[A'(F')] = (\ker A)^\perp$;
- 9) A – топологический гомоморфизм тогда и только тогда, когда A' – сильный* гомоморфизм;
- 10) A – изоморфизм E на F тогда и только тогда, когда A' – сильный* изоморфизм F' на E' .

4. Теоремы о базисах в ЛВП. Теперь легко доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть (E, E') , (F, F') – отделимые дуальные пары, $A: E \rightarrow F$ – линейная непрерывная инъекция E в F , $A': F' \rightarrow E'$ – слабый* изоморфизм F' в E' такой, что $\delta_t \in A'(F') \subset E'$, $t \in K$, K – компактное множество. Тогда существует слабое* решение уравнения $A'G_t = t$, $G_t \in F'$. Если E – B_r -полное пространство и F бочечно, то отображение $A^{-1} = G: F \rightarrow E$

$$x(t) = \langle f, G_t \rangle, \quad f \in F, \quad G_t \in F', \quad t \in K, \quad (4.1)$$

реализует топологический изоморфизм пространств E и F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.2 отображение A сюръективно, а в соответствии с теоремой 3.1 является топологическим изоморфизмом пространств E и F , если E B_r -полно, а F бочечно.

Условие $\delta_t \in A'(F') \subset E'$, $t \in K$, выполнено, если E непрерывно вложено в пространство $C(K)$ непрерывных функций с определенной на нем топологией равномерной сходимости. Факты вложения устанавливаются теоремами вложения. Тогда из равенства

$$x(t) = \langle x, \delta_t \rangle = \langle x, A'G_t \rangle = \langle Ax, G_t \rangle = \langle f, G_t \rangle, \quad f \in F, \quad G_t \in F', \quad x \in E,$$

где G_t – слабое* решение уравнения $A'G_t = \delta_t$, вытекает формула (4.1).

Наиболее существенна в этом доказательстве роль теоремы Банаха о гомоморфизме для ЛВП, тесно связанной с теорией двойственности, в частности, с двойственной теорией полноты. Пусть E B_r -полно. Непрерывное отображение $A: E \rightarrow F$ оказывается изоморфизмом лишь при условии, что F бочечно. Таково содержание теоремы 3.1.

Вопрос о существовании отображения G также связан с вопросом о существовании слабого* решения уравнения $A'G_t = \delta_t$, $t \in K$. Слабым* решением этого уравнения мы будем называть функцию $y = G_t \in F'$, для которой выполняются равенства $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A'y \rangle = x$, $x \in E$. Как видно, слабые* решения определяются с помощью билинейных форм. Непосредственным следствием теоремы 3.7 является

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.7, и пусть также $\delta_t \in (\ker A)^\perp \subset E'$, $t \in K$. Тогда существует сильное* решение уравнения $A'G_t = \delta_t$, $G_t \in F'$. Отображение $A^{-1} = G: F \rightarrow E$ по формуле

$$x(t) = \langle f, G_t \rangle = G(f), \quad f \in F, \quad G_t \in F', \quad x \in E, \quad (4.2)$$

реализует топологический изоморфизм пространств E и F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условия теоремы 4.2 выполнены, то формула (4.2) вытекает из равенства

$$\mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{x}, \delta_t \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}'\mathbf{G}_t \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{G}_t \rangle = \langle f, \mathbf{G}_t \rangle, \quad f \in \mathbf{F}, \quad \mathbf{G}_t \in \mathbf{F}', \quad \mathbf{x} \in \mathbf{E},$$

где $\mathbf{G}_t$ – сильное* решение уравнения $\mathbf{A}'\mathbf{G}_t = \delta_t$, $t \in K$.

Таким образом, если $\ker A' \neq 0$, то нужно перейти к факторпространству $\mathbf{F}' = F'/\ker A'$, найти класс $\mathbf{G}_t$, являющийся фундаментальным решением сопряженного уравнения $\mathbf{A}'\mathbf{G}_t = \delta_t$, $\mathbf{G}_t \in \mathbf{F}'$, $\delta_t \in (\ker A)^\perp \subset E'$, и класс $\mathbf{x} \in E$ вычислить по формуле (4.2). Пусть $F = E'$, пространство E рефлексивно и оператор A порождается симметричной билинейной формой. Тогда $F' = E'' = E$, $A = A'$ и формула (4.2) принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = \langle \mathbf{G}_t, f \rangle = \mathbf{G}(f), \quad \mathbf{G}_t \in \mathbf{E}, \quad x \in \mathbf{E}, \quad f \in \mathbf{F} = (\ker A)^\perp \subset E'. \quad (4.3)$$

Рассмотрим отделимую дуальную пару $\langle E, E' \rangle$, E – B_r -полное пространство и E' бочечно. Пусть $A: E \rightarrow E'$ – непрерывное линейное взаимно однозначное отображение E в E' и потому $A': E'' \rightarrow E'$. Согласно (4.1) отображение $G: E' \rightarrow E$ определяется формулой

$$x(t) = \langle f, G_t \rangle, \quad G_t \in E'', \quad t \in K, \quad f \in E'. \quad (4.4)$$

Пусть E не рефлексивно. Тогда E – собственное подпространство в E'' и равенство (4.4) можно рассмотреть на E , если G_t – элемент из E . Пусть, кроме того, оператор A определен симметричной билинейной формой. Эти условия приводят к равенствам

$$\langle Ax, y \rangle = \langle y, Ax \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, A'y \rangle, \quad y = G_t \in E,$$

что влечет $A = A'$. Равенство (4.4) переходит в равенство

$$x(t) = \langle G_t, f \rangle = G(f), \quad t \in K, \quad f \in E', \quad G_t \in E, \quad x \in E, \quad (4.5)$$

и формулой (4.5) порождается непрерывное линейное отображение G пространства E' на E , обратное для отображения A .

Пусть счетное тотальное на локально выпуклом пространстве E и плотное в E' множество линейных форм $F = L(f_i)$, где $L(f_i)$ – линейная оболочка семейства (f_i) , образует топологический базис в F . Тогда семейство (φ_i) , $\varphi_i(t) = f_i(G_t)$ – топологический базис в $G(F) \subset E$.

5. G -сплайны. В этом пункте мы рассмотрим задачу о представлении линейных функционалов (линейных форм) на локально выпуклых пространствах E , т.е. задачу о нахождении такого общего аналитического вида для линейных форм, которым исчерпывалось бы все их множество. Весьма общим способом линейные формы на E представляются с помощью интегралов. В классическом изложении теории интегрирования исходным является понятие меры как счетно-аддитивной функции множества, определенной на заданном классе подмножеств некоторого множества T , после чего решается вопрос о представлении линейных форм на пространствах числовых или векторных функций $t \rightarrow x(t)$, $t \in T$ [8]. При другом подходе меру

определяют как непрерывную линейную форму на некотором функциональном пространстве. Соответствующую ей меру как функцию множества далее извлекают из функционального определения интеграла. Отправляясь, таким образом, от меры как линейной формы, приходят к счетно-аддитивной функции множества такой, что $\varphi(x) = \int x d\mu$ [9].

Ограничимся случаем, когда функциональным пространством является класс непрерывных функций $C(K)$, K – сепарабельный метрический компакт. В векторном пространстве непрерывных числовых функций определим нормированную топологию равномерной сходимости $E \equiv C(K)$ с нормой $\|x\|_C = \sup\{|x(t)| : t \in K\}$. Пространство E сепарабельно и банахово. Сопряженное пространство E' обычно наделяют естественной структурой банахова пространства, введя норму $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in E, \|x\|_C \leq 1\}$.

Всякая непрерывная линейная форма $x \rightarrow \varphi(x)$ на E , $x \in E$, называется *мерой Радона* на K [9], поэтому пространство всех вещественных мер Радона $M(K)$ на K является по определению сопряженным к E : $M(K) \equiv E'$. Важным примером радоновых мер является мера Дирака δ_t , сосредоточенная в точке t , $t \in K$. Она принадлежит пространству E' и как функция от t слабо* непрерывна. Когда t пробегает все множество K , мера Дирака δ_t пробегает подмножество F в E' . Нормированная топология в F индуцирована топологией пространства E' . Равенство $\|f\| = \|\delta_t\| = 1$ для всех $t \in K$ означает, что F ограничено по норме. Так как E – нормированное пространство, то в E' равностепенно непрерывны те и только те множества, которые ограничены относительно нормы в E' . Поскольку множество $F \subset E'$ равностепенно непрерывно и ограничено по норме, оно относительно слабо* компактно [3; гл. 1, § 1.11]. Всюду в п. 5 $E \equiv C(K)$.

Выясним структуру сопряженного пространства E' для пространства E , предъясвив общий вид непрерывных линейных функционалов, определенных на E . Как следует из приведенной ниже теоремы (Ф. Рисса), действие всякой линейной формы на элемент $x \in E$ сводится к интегрированию относительно конечной вещественной борелевской меры, понимаемой уже как функция множества и определенной на σ -алгебре $B_\sigma(K)$ всех борелевских частей в K . Этим объясняется тот факт, что слово мера используется в названии объекта, который первоначально вводится как линейная форма на E . Соответствующее интегральное представление непрерывных линейных форм на E относительно заданной меры на K называют *интегралом Радона*.

Класс $\Phi(K)$ конечных вещественных борелевских мер $\mu: B_\sigma(K) \rightarrow R$ на K есть действительное векторное пространство относительно поточечного сложения и умножения на действительные числа. Это пространство, наделенное вариационной нормой $\|\mu\| = |\mu|(K) < \infty$, $\mu \in \Phi(K)$, становится банаховым пространством. Поскольку K – сепарабельный метрический компакт, меры из $\Phi(K)$ регулярны и полны [10]. Общий вид функционала $\varphi \in E'$ устанавливается теоремой 5.1 (Ф. Рисса). Подробное доказательство теоремы можно найти, например в [11; гл. 4, § 6].

ТЕОРЕМА 5.1. *Для каждого функционала $\varphi \in C'(K)$ существует единственная мера $\mu \in \Phi(K)$ такая, что связь между $C'(K)$ и $\Phi(K)$ выражается интегралом Радона $\varphi(x) = \int_K x(t) d\mu$ для всех $x \in C(K)$. Соответствие $\varphi \rightarrow \mu$ является изометрическим изоморфизмом сопряженного пространства мер Радона $C'(K)$ и пространства $\Phi(K)$: $\|\varphi\| = \|\mu\|$. (В силу этого соответствия обычно пишут $\varphi(x) = \int_K x(t) d\varphi$.) Отображение $\int_K x d\varphi \rightarrow R$ слабо* непрерывно.*

Свойства регулярности и полноты вещественных борелевских мер на K позволяют выделить единственную борелевскую меру μ , отвечающую функционалу φ , и поэтому соответствие $\varphi \in C'(K) \leftrightarrow \mu \in \Phi(K)$ взаимно однозначно. Теорема Рисса связывает множества, состоящие из объектов различной природы – пространство мер $\Phi(K)$ и пространство функционалов $C'(K)$ – утверждением об их топологической эквивалентности. Эта связь осуществляется интегрированием по заданной мере. Следовательно, пространство $C'(K)$ может быть отождествлено с пространством $\Phi(K)$. Именно по этой причине элементы пространства, сопряженного к $C(K)$, определяют как меры на K . Определять ли меру на K , или определять линейную форму на $C(K)$ – это, в сущности, эквивалентно.

Предположим, что $B_\sigma(K)$ содержит все счетные подмножества M в K . Мера, сосредоточенная на M , называется *атомарной*. Всякая атомарная мера φ на K есть сумма в топологии $\sigma(E', E)$ суммируемого семейства $\lambda_i \mu_i$, $i \in \mathbb{N}$, где $(\lambda_i) \in l^1(K)$, и каждая мера μ_i – точечная на K , т.е. $\mu_i(t_0) = 1$ для некоторого $t_0 \in K$ и $\mu_i(\{A\}) = 0$ для всякого множества $A \subset K$, не содержащего t_0 . Выбор в качестве мер на компакте K атомарных мер позволяет приписать ненулевую меру каждой отдельной точке множества M нулевой лебеговой меры.

Воспользовавшись определением интеграла Радона, построим тотальное на $C(K)$ счетное множество точечных мер (μ_i) на K и получим соответствующее представление для атомарной меры φ . Интеграл Радона будем строить по образцу интеграла Римана. Мы должны определить интеграл на классе $C(K)$, состоящем из функций, являющихся равномерными пределами простых функций. Заметим, что это не единственный способ для представления мер Радона $\varphi \in C'(K)$.

Интеграл Радона определим сначала для простых функций. Разобьем компакт K на измеримые подмножества, на каждом из которых колебание функции $x \in E$ мало. В качестве области определения функции множества (нам удобно обозначить ее также буквой φ) возьмем произвольное разбиение Σ_n компакта K на конечное число попарно не пересекающихся измеримых подмножеств σ_i , $i = 1, \dots, n$, таких, что каждое подмножество σ_i есть элемент, принадлежащий совокупности Σ_n : $\sigma_i \in \Sigma_n$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $(t_i) = M$, $i = 1, 2, \dots$, – счетное всюду плотное в K множество точек (например, множество точек в $\mathbb{R}^m$ с рациональными координатами), упорядоченное в последовательность. Поскольку M всюду плотно в K , всегда можно выбрать точку $t_i \in M$, $i = 1, \dots, n$, такую, что $t_i \in \sigma_i$. На разбиении Σ_n определим простую функцию в форме

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n x(t_i) \chi_{\sigma_i}(t), \quad t_i \in \sigma_i,$$

где $\chi_{\sigma_i}(t)$ – характеристическая функция множества σ_i . Суммы такого вида аппроксимируют $x(t)$. Известно, что множество простых функций всюду плотно в $C(K)$, поэтому $C(K)$ сепарабельно.

Интегралом от простой функции $x_n(t)$ по мере φ называют величину

$$\int_K x_n d\varphi = \sum_{i=1}^n x(t_i) \varphi(\sigma_i).$$

Формула $\varphi(\sigma) = \int \chi_\sigma d\varphi$ порождает функцию множества со значениями в $\mathbb{R}$. Интеграл $\int \chi_\sigma d\varphi$ определяет его φ -меру (или просто меру, если понятно, о какой

мере идет речь). Здесь под мерой $\varphi(\sigma)$ уже понимается численная мера (объем) измеримого множества $\sigma \in B_\sigma(K)$. Такое определение меры применимо ко всякому измеримому множеству $B \in B_\sigma(K)$. Мера как функционал на $C(K)$ будет известной, если известна мера как счетно-аддитивная функция всех борелевских множеств $B \in B_\sigma(K)$. Функция множества φ будет осуществлять представление функционала $f \in C'(K)$ в том смысле, что $f(x) = \int_K x d\varphi$, где интеграл определяют для любой функции $x \in C(K)$ как предел в слабой* топологии $\sigma(E', E)$ сумм вида $\sum_{i=1}^n x(t_i)\varphi(\sigma_i)$.

В общем случае простая функция $x(t)$ может быть записана в виде разложения

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x(t_i)\chi_{\sigma_i}(t),$$

где (t_i) , $i = 1, 2, \dots$, пробегает все множество точек M . Определим интеграл от $x(t)$ формулой

$$\int_K x(t) d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} x(t_i)\varphi(\sigma_i),$$

причем выполнено условие σ -аддитивности

$$\varphi(K) = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\sigma_i)| < \infty.$$

Простая функция $x(t)$ называется *суммируемой* на K , если сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x(t_i)||\varphi(\sigma_i)|.$$

Предельное соотношение $\lim x_n(t)$, $n \rightarrow \infty$, по существу означает, что при $n = \infty$ последовательность (t_i) пробегает все множество точек M .

Всякая функция $x(t) \in C(K)$ представляет собой предел равномерно сходящейся последовательности простых функций $x_n(t)$ [12]. Такая функция суммируема на K по мере φ , и тогда в силу известных теорем теории интеграла [12]

$$\int_K x_n d\varphi \rightarrow \int_K x d\varphi \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Ясно, что для произвольной функции $x \in C(K)$ существует много различных разбиений, на которых она может быть превращена в простую функцию $x_n(t)$, однако предел от способа разбиения K не зависит.

Поскольку мы рассматриваем меры произвольного знака, конечность меры φ означает, что при любом разбиении компакта K должно иметь место неравенство $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\sigma_i)| < \infty$. С другой стороны, функция $x(t)$ суммируема на K по мере φ , если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x(t_i)\varphi(\sigma_i)$ сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x(t_i)||\varphi(\sigma_i)|.$$

В свою очередь, это условие будет выполнено, если имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\sigma_i)| < \infty,$$

поскольку $|x(t)| < C$, $t \in K$. Таким образом, интеграл Радона по мере φ функции $x(t) \in C(K)$ существует тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\sigma_i)| < \infty$.

В множестве σ_i пусть именно выбранная точка t_i является носителем ненулевой меры со значением $\lambda(t_i)$: $\varphi(\sigma_i) = \lambda(t_i)$, в то время как все остальные точки множества σ_i имеют меру нуль и, кроме того, $\varphi(\sigma_k) = 0$ для всякого σ_k , не содержащего точку t_i . Следовательно, $\varphi(\sigma_i) \rightarrow \varphi(t_i) = \lambda(t_i)$ при стремлении диаметра разбиения к нулю и

$$\int_K x d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} x(t_i) \lambda(t_i) < \infty.$$

Ясно, что интеграл Радона для $x(t) \in C(K)$ по мере φ существует тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(t_i)| < \infty$, и определяется на K формулой

$$\varphi(x) = \int_K x d\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} x(t_i) \lambda(t_i) < \infty, \quad x(t) \in C(K), \quad (5.1)$$

причем ряд (5.1) безусловно сходится для всякой функции $x(t) \in C(K)$. Таким образом, множество коэффициентов $\lambda = (\lambda(t_i))$, $t_i \in K$, образует банахово пространство последовательностей $l^1(K)$. Формально запишем

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \lambda(t_i) \delta_{t_i} \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(t_i) \delta_{t_i} \right\rangle = \langle x, \varphi \rangle. \quad (5.2)$$

Естественно ввести обозначение

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(t_i) \delta_{t_i}, \quad (t_i) \subset M, \quad \lambda \in l^1(K). \quad (5.3)$$

Ряд (5.3) безусловно сходится в смысле слабой* топологии пространства $C'(K)$. Его сходимость эквивалентна условию $(\lambda(t_i)) \in l^1(K)$. Мера φ , определенная формулой (5.3), атомарна, целиком сосредоточена на счетном множестве точек M и определена счетным множеством весов $\lambda(t_i)$. Ее действие на элементы из E определено формулой (5.2).

Выясним свойства семейства мер, (δ_{t_i}) , $(t_i) = M$, как базисной последовательности.

I) Обозначим через F множество атомарных мер $F \subset \Phi$:

$$F = \{ \varphi \in C'(K) : \varphi = \sum \lambda(t_i) \delta_{t_i}, t_i \in M, \lambda \in l^1(K) \}, \quad M \subset K.$$

Множество F образует подпространство, слабо* плотное в $C'(K)$ и потому тотальное на $C(K)$. Следовательно, семейство мер (δ_{t_i}) , $(t_i) = M$, тотально на $C(K)$:

$$\langle x, \delta_{t_i} \rangle = 0 \text{ для всех } t_i \implies x = 0.$$

II) Прямым вычислением можно убедиться в справедливости равенства [13]

$$\|\varphi\| = |\varphi|(K) = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(t_i) \delta_{t_i} \right\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(t_i)| = \|\lambda\|.$$

Таким образом, ряд (5.3) сходится к некоторому элементу $\varphi \in C'(K)$ в нормированной топологии пространства $C'(K)$ (абсолютно), что эквивалентно условию $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(t_i)| < \infty$.

III) Через T обозначим линейный оператор суммирования $T: \lambda \rightarrow \varphi$, определенный формулой (5.3) с областью значений $R(T) \subset E'$ и областью определения $D(T) \subset l^1(K)$. Оператор T , определенный на банаховом пространстве $l^1(K)$, отображает его на все банахово пространство $R(T) = F$ с сохранением нормы: $\|T\lambda\| = \|\lambda\|$, $\lambda \in l^1(K)$ и, следовательно, является изометрическим. Такой оператор непрерывен, и его норма равна 1: $\|T\| = 1$. Если отображение T инъективно, то T имеет обратное отображение. При этом под обратным к T понимается оператор, заданный соотношениями $\lambda = T^{-1}\varphi$, $\lambda \in D(T)$, $\varphi \in F$, и где $T\lambda = \varphi$. Инъективность отображения T есть очевидное следствие изометричности оператора T . Действительно,

$$T\lambda_1 = T\lambda_2 = \varphi \implies 0 = \|T\lambda_1 - T\lambda_2\| = \|T(\lambda_1 - \lambda_2)\| = \|\lambda_1 - \lambda_2\| \implies \lambda_1 = \lambda_2.$$

Поскольку для T существует обратный оператор T^{-1} , уравнение $T\lambda = \varphi$ имеет единственное решение при любом $\varphi \in F$, причем это решение есть $\lambda = T^{-1}\varphi$, $\lambda \in l^1(K)$. Алгебраическая идентичность пространств F и $l^1(K)$ еще не влечет идентичности их топологий. Однако если $D(T) = \Lambda(K) \equiv \Lambda \subset l^1(K)$ – относительно компактное подмножество в $l^1(K)$, то отображение $T: \Lambda \rightarrow F$ – топологический изоморфизм подпространств Λ и F , сохраняющий норму [7].

Отличие подпоследовательностей $(\lambda_i) \in \Lambda(K)$ от $(\lambda_i) \in l^1(K)$ заключается в следующем: вторые удовлетворяют только одному условию $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$; первые же, кроме указанного, удовлетворяют еще одному условию: $|\lambda_i(\varphi)| \leq C_i$, $i = 1, 2, \dots$, с константами C_i , одинаковыми для всех φ [14].

IV) Множество M как счетное объединение замкнутых (одноточечных) множеств ни замкнуто, ни открыто. Носителем меры φ является замыкание $[M]$, совпадающее с $K \subset \mathbb{R}^m$. Компакт K есть множество совершенное, так как оно замкнуто (содержит все свои предельные точки) и все его точки предельные. Поэтому никакая точка множества K (а значит, и M) не является изолированной. В любой окрестности произвольно взятой точки $t_i \in M$ содержатся как точки из M_i , так и бесконечное множество точек мощности континуум.

Пусть (c_i) – такая последовательность положительных чисел, что $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^m < \infty$. Обозначим через E_ε множество

$$E_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=1}^m \{t_\nu : |t_\nu - t_{\nu_i}| < \varepsilon c_i\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Оно открыто как объединение открытых множеств, и его мера мажорируется числом $(2\varepsilon)^m \sum_{i=1}^{\infty} c_i^m$. Обозначим через E_0 пересечение множеств, соответствующих всевозможным $\varepsilon > 0$. Лебегова мера этого множества равна 0. Кажется естественным предположить, что E_0 счетно и сводится к M . Но на самом деле оно имеет мощность континуума [15]. Таким образом, счетное множество точек M является подмножеством множества E_0 сингулярной меры. Это свойство M характеризует базис из функций (δ_{t_i}) , $(t_i) = M$, как переполненный в слабой* топологии. Такой базис не имеет в E двойственной системы и, следовательно, не является слабым* топологическим базисом в E' .

Согласно (4.5) формулой

$$x(t) = f(G_t) = \langle G_t, \varphi \rangle = \int_K G_t d\varphi$$

для всех $t \in K$, $f \in E'$, $\varphi \in F$, $G_t \in E$, $x \in E$, (5.4)

определено взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow f$. Счетное множество мер (δ_{t_i}) , $(t_i) = M$, порождает семейство функций $\varphi_i(t) = G(t, t_i)$, $(t_i) = M$, в E . Отображение $U: l^1(K) \rightarrow C(K)$, определяемое формулой

$$x(t) = Uf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta_{t_i}(G_t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta_{t_i} G(t, t_i), \quad t, t_i \in K, \quad (\lambda_i) \in l^1(K), \quad (5.5)$$

компактно [7]. Компактность U есть тривиальное следствие теоремы Арцела–Асколи [3]. Свойство компактности отображения U означает, что оно не может иметь ограниченного обратного отображения $C(K) \rightarrow l^1(K)$. Если $(\lambda(t_i)) \in \Lambda(K)$, то U – топологический изоморфизм пространств $C(K)$ и $\Lambda(K)$.

Непрерывным отображением $U: \lambda \rightarrow x$ с помощью равенства 5.5 множество Λ переводится в относительно компактное множество $U(\Lambda) \subset E$. Линейная оболочка $L\{\varphi_i(t)\} = G(\Lambda)$ (G -сплайн) образует множество, всюду плотное в $C(K)$, но семейство $(\varphi_i(t))$ топологическим базисом в нем не является.

Перечислим некоторые особенности базисов $(\varphi_i(t))$, отличающие их от классических. Конечномерные подпространства E^n , порождаемые базисами $(\varphi_i(t))$ таковы, что каждое подпространство в последовательности подпространств E^n не содержит предыдущее, поскольку с каждым новым n

- 1) переопределяются базисные функции;
- 2) пересчитываются коэффициенты (λ_i) .

В силу этих особенностей базиса $(\varphi_i(t))$ операция предельного перехода

$$x(t) = \lim x_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i G(t, t_i), \quad n \rightarrow \infty,$$

лишена смысла, и можно говорить лишь о том, что точность представления элементов $x \in C(K)$ возрастает (или не возрастает) с увеличением n . Поэтому в описании G -сплайнов основными являются понятия сеточного базиса и алгебраического сеточного G -сплайна.

Пусть (t_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, – некоторое дискретное конечное множество изолированных точек (сетка) на компакте K : $(t_i) \subset K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда соответствующий алгебраический базис (φ_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, есть сеточный алгебраический базис, для которого точки (t_i) являются опорными. Выделим два крайних случая.

- 1) Точки t_i следуют друг за другом с одним и тем же шагом h по каждой координате в $\mathbb{R}^m$. Тогда говорят, что на компакте K задана *регулярная сетка* (t_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Такая сетка является конечномерным аналогом всюду плотно-го счетного множества M при $n = \infty$.
- 2) Точки t_i выбраны случайным образом. В этом случае говорят, что на K задана *стохастическая сетка*.

Коэффициенты λ_i находятся из линейной системы

$$x_n(t_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i G(t_j, t_i) = x(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6)$$

Возникает задача установления факта сходимости и оценки скорости сходимости $x_n(t)$ к $x(t)$ с увеличением густоты сетки. Если точность представления функции x из некоторого подпространства $X \subset C(K)$ возрастает с увеличением густоты сетки (например, с уменьшением шага h сетки), а именно, если удастся установить справедливость неравенства

$$\|x(t) - x_n(t)\|_{C(K)} \leq h^p \|x\|_X, \quad p > 0,$$

то можно говорить, что соответствующий базис (φ_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, является сеточным топологическим базисом в X . Число p называют *порядком* аппроксимации функции $x(t)$ разложениями $x_n(t)$, а множитель h^p отражает скорость убывания ошибки приближения, когда шаг сетки h стремится к нулю.

6. Примеры G -сплайнов.

ПРИМЕР 6.1. Единственная возможность при $E = C(K)$ для выполнения условия $G_t \in E$ возникает в случае, когда $K = [a, b]$ – отрезок прямой. Поскольку операторы A и A' действуют теперь в одном и том же пространстве, возможно равенство $A = A'$. Пусть

$$A = A' = -\frac{d^2}{dt^2} : E \rightarrow A(E) = (\ker A)^\perp$$

– гомоморфизм пространств E и $\ker A^\perp$ (теоремы 3.6, 3.7). Очевидно, что $\delta_t \in A(E)$. Образ $A(E)$ может содержать любую меру, а не только атомарную, поэтому $A(E) \supset F$. Непрерывная на $K \times K$ функция $G(t, s) = |t - s|$ есть единственное (с точностью до коэффициента) частное решение уравнения $AG(t, s) = \delta_{(t-s)}$, выбранное при условии $\ker A = 0$. Линейный сеточный алгебраический G -сплайн в $C[a, b]$, приближающий функцию $x(t)$, имеет вид разложения

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |t - t_i|, \quad t, t_i \in [a, b],$$

где коэффициенты (λ_i) находятся из интерполяционных условий.

На представление ломаной линии в форме $x_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |t - t_i|$ впервые обратил внимание Бернштейн еще в 1905 г. [16] и нашел аналитические выражения для коэффициентов λ_i при равномерном разбиении отрезка $[0, 1]$. Пусть $x(t)$ непрерывна на $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольными точками $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Обозначим $h = \max(h_i)$. Точность аппроксимации, которую можно обеспечить с помощью ломаных $x_h(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |t - t_i|$, характеризуются неравенством [17; с. 103]:

$$\|x - x_h\|_{C[a, b]} \leq Ch^2 \|x\|_{C^2[a, b]}, \quad (6.1)$$

в котором C – некоторая константа. Множитель h отражает скорость убывания ошибки приближения, когда сетка сгущается.

Конечномерное пространство кусочно-линейных функций, непрерывных в узловых точках, мы будем обозначать C_h . Из неравенства (6.1) следует, что последовательность подпространств C_h всюду плотна в пространстве $C[a, b]$. Если $x(t)$ имеет непрерывную вторую производную, то неравенство (6.1) дает равномерную оценку сходимости приближений $x_h(t)$ для функции $x(t)$. Таким образом, функции $\varphi_i(t) = |t - t_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$, образуют сеточный топологический базис в пространстве $C_2[a, b] \subset C[a, b]$, но это не базис в $C[a, b]$, хотя близость элементов $x(t)$ и $x_h(t)$ оценивается в норме пространства $C[a, b]$.

ПРИМЕР 6.2. Пусть $E = C^{2m-2}[a, b]$, $m = 1, 2, \dots$, $A = A' = d^{2m}/dt^{2m}$ – гомоморфизм пространств E и $A(E) = (\ker A)^\perp \subset E'$ (теоремы 3.6, 3.7). Уравнение $AG_t = \delta_t \in A(E) \subset E'$ при дополнительном условии $\ker A = 0$ разрешимо единственным образом, его частное решение имеет вид

$$g_{2m-1}(t, s) = |t - s|^{2m-1} \in E \quad \text{для всех } t \in [a, b].$$

Покажем, что последовательность функций

$$\psi_i^h(t) = g^{2m+1}(t - t_i) \in C^{2m}[a, b], \quad i = 1, \dots, n,$$

для сетки $(t_i) \subset [a, b]$ с шагом $h = \max(h_i)$ образует сеточный топологический базис в $C^{2m+2}[a, b]$. Пусть $x \in C^{2m+2}[a, b]$. Справедливы равенства

$$x(t) - x_h(t) = \langle x - x_h, \delta_t \rangle = \langle x - x_h, A'G_t \rangle = \langle A(x - x_h), G_t \rangle = G(y(t) - y_h(t)),$$

где $x_h(t)$ – конечное разложение функции $x(t)$ по базисным функциям $\psi_i^h(t)$, а $y_h(t)$ – представление функции $y(t) = Ax(t)$ в виде ломаной линии. Непрерывный оператор G переводит элементы из пространства $C[a, b]$ в пространство $C^{2m}[a, b]$, а непрерывный оператор A – элементы пространства $C^{2m}[a, b]$ в элементы пространства $C[a, b]$. Из приведенных равенств получаем оценку

$$\begin{aligned} \|x - x_h\|_{C^{2m}[a, b]} &\leq \|G\| \|y - y_h\|_{C[a, b]} \leq \|G\| h^2 \|y\|_{C^2[a, b]} = \|G\| h^2 \|Ax\|_{C^2[a, b]} \\ &\leq \|G\| \|A\| h^2 \|x\|_{C^{2m+2}[a, b]} = Ch^2 \|x\|_{C^{2m+2}[a, b]}, \quad C = \|G\| \|A\|. \end{aligned}$$

При доказательстве этого неравенства

$$\|x - x_h\|_{C^{2m}[a, b]} \leq Ch^2 \|x\|_{C^{2m+2}[a, b]}, \quad C = \|G\| \|A\|, \quad (6.2)$$

мы воспользовались оценкой (6.1).

Порядок аппроксимации увеличивается с увеличением гладкости функции. Однако для конкретной функции и конкретной сетки эффекты этого типа могут нарушаться за счет того, что с ростом порядка производной ее норма может быстро нарастать. Конечномерное пространство E^h , порожаемое базисными элементами $\psi_i^h(t)$, совпадает с пространством кусочно-многочленных сплайнов Шенберга степени $2m + 1$. Действительно, в точках t_i сеточные G -сплайны из E_h имеют непрерывные производные до $(2m)$ -й включительно, а $(2m + 1)$ -я производная в этих точках разрывна. В остальных точках они дифференцируемы произвольное число раз.

ПРИМЕР 6.3. Возьмем локальное решение уравнения

$$-\frac{d^2}{dt^2} G_t = \delta_t$$

на отрезке $[-1, 1]$:

$$G_t(s) = -|t - s| + c_1(s)(t - s) + c_0(s).$$

Неизвестные константы найдем, задавая дополнительные условия. Для определенности примем $s = 0$ и рассмотрим следующие граничные условия: $G(0) = 1$, $G(1) = 0$, $G(-1) = 0$. Доопределяя локальное решение нулем за пределами отрезка $[-1, 1]$, получим функцию-крышку:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases} \quad (6.3)$$

Если шаг разбиения равномерный, то в качестве базисных элементов можно использовать финитные функции, которые строятся по порождающей функции (6.3) изменением масштаба и сдвигами. Пусть на $\mathbb{R}$ наложена равномерная сетка $t_i = ih$, $i \in \mathbb{Z} = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Для построения базиса по выбранной сетке, взяв произвольные i и h , по функции $\varphi(t)$ определим базисные функции-крышки $\varphi_i^h(t)$ при помощи соотношений

$$\varphi_i^h(t) = \varphi\left(\frac{t - t_i}{h}\right), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (6.4)$$

Подходящей формой представления произвольной функции $x(t)$ приближающей ломаной линией в этом случае является линейная комбинация функций-крышек:

$$x_h(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x(t_i) \varphi_i^h(t).$$

Если $x(t) \in C[a, b]$, то о скорости сходимости к ней линейного сплайна x_h на равномерной сетке ничего сказать нельзя. На функцию $x(t)$ нужно наложить еще дополнительные условия, например, некоторые ограничения на производную, чтобы обеспечить сходимость приближения $x_h(t)$ к $x(t)$ в равномерной метрике.

ПРИМЕР 6.4. Показательные (корреляционные) сплайны. Соответствующие уравнения для функций Грина $G(t, s)$ стандартно решаются методом преобразования Фурье:

$$(-\alpha^2 D^2 + 1)^2 G_t(s) = \delta_t(s), \quad G(t, s) = \frac{\pi^2}{\alpha} \left[1 + \frac{|(t-s)|}{\alpha} \right] e^{-|(t-s)/\alpha|}, \quad (6.5)$$

$$(-\alpha^2 D^2 + 1)^3 G_t(s) = \delta_t(s), \quad G(t, s) = \frac{\pi^2}{\alpha} \left[1 + \frac{|t-s|}{\alpha} + \frac{1}{3} \left| \frac{t-s}{\alpha} \right|^2 \right] e^{-|(t-s)/\alpha|}. \quad (6.6)$$

ПРИМЕР 6.5. Тригонометрические сплайны:

$$(\alpha^2 D^2 + 1)^2 G_t(s) = \delta_t(s), \quad G(t, s) = \frac{\pi}{2\alpha} \left[\sin \left| \frac{t-s}{\alpha} \right| - \left| \frac{t-s}{\alpha} \right| \cos \left(\frac{t-s}{\alpha} \right) \right]; \quad (6.7)$$

$$(\alpha^2 D^2 + 1)^3 G_t(s) = \delta_t(s),$$

$$G(t, s) = \frac{\pi}{4\alpha} \left[\sin \left| \frac{t-s}{\alpha} \right| - \left| \frac{t-s}{\alpha} \right| \cos \left(\frac{t-s}{\alpha} \right) + \frac{1}{3} \left| \frac{t-s}{\alpha} \right|^2 \sin \left| \frac{t-s}{\alpha} \right| \right]. \quad (6.8)$$

ПРИМЕР 6.6. Сплайны смешанного типа:

$$(\alpha^4 D^4 + 1) G_t(s) = \delta_t(s), \quad \alpha = ah\sqrt{2}.$$

Решение, убывающее на бесконечности:

$$G(t, s) = \frac{1}{2\alpha} e^{-|t-s|/\alpha} \left[\cos \left(\frac{|t-s|}{\alpha} \right) + \sin \left(\frac{|t-s|}{\alpha} \right) \right]. \quad (6.9)$$

Решение, растущее на бесконечности:

$$G(t, s) = \frac{\operatorname{sgn}(t-s)}{4\alpha} \left[\cosh \left(\frac{t-s}{\alpha} \right) \sin \left(\frac{t-s}{\alpha} \right) - \sinh \left(\frac{t-s}{\alpha} \right) \cos \left(\frac{t-s}{\alpha} \right) \right]. \quad (6.10)$$

ПРИМЕР 6.7. Сплайны, не инвариантные относительно сдвига. Рассмотрим уравнение

$$D^2 f(s) D^2 G_t(s) = \delta_t(s), \quad D = \frac{d}{ds},$$

в самосопряженной форме. Общее решение имеет вид

$$G(t, s) = \operatorname{sgn}(t - s) \int_t^s \frac{(t - \xi)(\xi - s)}{2f(\xi)} d\xi.$$

В некоторых частных случаях интеграл вычисляется в элементарных функциях:

$$f(\xi) = e^\xi, \quad G(t, s) = \frac{\operatorname{sgn}(t - s)}{2} \left[A((t + s) - ts - 2) + B(t + s - 2) - C \right], \quad (6.11)$$

$$A = e^{-s} - e^{-t}, \quad B = se^{-s} - te^{-t}, \quad C = s^2 e^{-s} - t^2 e^{-t};$$

$$f(\xi) = (1 + \xi^2),$$

$$G(t, s) = \frac{\operatorname{sgn}(t - s)}{2} \left[-(t - s) + (1 - ts)(\arctan t - \arctan s) + \frac{t + s}{2} \ln \left(\frac{1 + t^2}{1 + s^2} \right) \right]; \quad (6.12)$$

$$f(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2},$$

$$G(t, s) = -\frac{\operatorname{sgn}(t - s)}{2} \left[-\frac{1}{5} \left(t(1 + t^2)^2 - s(1 + s^2)^2 \right) + \left(\frac{1}{5} - ts \right) \left(t + \frac{t^3}{3} - s - \frac{s^3}{3} \right) + \frac{t + s}{4} ((1 + t^2)^2 - (1 + s^2)^2) \right]. \quad (6.13)$$

7. H -сплайны. Рассмотрим тройку плотно вложенных друг в друга пространств $E \subset H \subset E'$, где H – сепарабельное гильбертово пространство, E – локально выпуклое пространство (подпространство в H с топологией, более сильной, чем топология в H), и пусть $A: E \rightarrow H$ – взаимно однозначный непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства E в H . Оператору A сопряжен оператор $A': H' \rightarrow E'$, определенный равенством

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A'y \rangle, \quad x \in E, \quad y \in H'.$$

Пусть E B -полно, A' – слабый изоморфизм из H' в E' и $\delta_t \in A'(H') \subset E'$, $t \in K$. Тогда уравнение $A'G_t = \delta_t$, $G_t \in H'$, слабо разрешимо и A есть изоморфизм пространств E и H . Тем самым, построен непрерывный оператор

$$G: H \rightarrow E, \quad x = \langle h, G_t \rangle, \quad G_t \in H', \quad h \in H, \quad x \in E,$$

обратный для оператора A . Множество

$$S = \langle h, G_t \rangle, \quad G_t \in H', \quad h \in H,$$

когда h пробегает все H , совпадает с E . Определив в нем линейные операции, получим векторное пространство, которое назовем *пространством H -сплайнов* в E .

Поскольку в H всегда существует ортонормированный базис (h_i) , оператор G порождает в E топологический базис H -сплайнов (φ_i) : $\varphi_i = G(h_i)$.

Важным частным случаем гильбертова пространства является

$$L_2(\Omega): \quad x = (g, G_t), \quad x \in E, \quad g, G_t \in L_2(\Omega), \quad t \in \Omega.$$

Выражение (g, G_t) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое множество с мерой Лебега μ . Двойственность в $L_2(\Omega)$ определяется интегралом Лебега $x = (g, G_t) = \int_{\Omega} G_t g d\mu$.

ПРИМЕР 7.1. На произвольной сетке $(t_i) \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n+1$, $t_1 = a, \dots, t_{n+1} = b$, возьмем линейно независимое ортонормированное семейство функций-ступенек

$$\varphi_i^h(t) = \frac{1}{\sqrt{h_i}} \begin{cases} 1, & t \in (t_i, t_{i+1}), \\ 0, & t \notin (t_i, t_{i+1}), \end{cases} \quad (7.1)$$

и построим приближение функции $x(t) \in L^2[a, b]$ кусочно-постоянными функциями в форме разложения

$$x_h(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \varphi_i^h.$$

Множество таких разложений будем обозначать через H^h . Эта линейная комбинация называется *B-сплайном* нулевой степени. В частности, для равномерной сетки соответствующая линейно независимая ортонормированная система функций

$$\varphi_i^h(t) = h^{-1/2} \varphi^{(0)}\left(\frac{t - t_i}{h}\right) \quad (7.2)$$

может быть определена по порождающей функции

$$\varphi^0(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, 1), \\ 0, & t \notin (0, 1). \end{cases} \quad (7.3)$$

Оценка точности аппроксимации функции $x(t) \in W_2^1(a, b)$ линейными комбинациями $x_h(t)$ в норме $L_2[a, b]$ дается неравенством [17; с. 98]

$$\|x - x_h\|_{L^2([a, b])} \leq Ch \|x\|_{W_2^1[a, b]}, \quad (7.4)$$

из которого следует, что последовательность подпространств H^h предельно плотна в пространстве $L_2[a, b]$.

Таким образом, система функций (7.2) линейно независима, ортонормирована и плотна в $L_2[a, b]$, но топологическим базисом в нем не является. Из неравенства (7.4) следует, что она сеточный топологический базис в пространстве $W_2^1[a, b]$.

Будем считать, что номер базисного сплайна привязан не к номеру интервала, а к номеру узла. На равномерной сетке $(t_i) \subset [a, b]$, $i = \dots, 1, \dots, n$, с шагом h возьмем линейно независимое ортонормированное семейство функций-ступенек

$$\varphi_i^h(t) = h^{-1/2} \varphi^{(0)}\left(\frac{t - t_i}{h}\right), \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & t \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{cases} \quad (7.5)$$

и построим приближение функции $x(t) \in L_2[a, b]$ простыми функциями в форме разложения $x_h = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \varphi_i^h$. Множество таких разложений также будем обозначать через H^h . Оценка точности аппроксимации функции $x(t) \in W_2^1[a, b]$ линейными комбинациями $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \varphi_i^h \in H^h$ в норме $L_2[a, b]$ дается неравенством (7.4), из которого следует, что последовательность подпространств H_h предельно плотна в пространстве $L_2[a, b]$.

Система функций (7.5) линейно независима, ортонормирована, плотна в $L_2[a, b]$ и является сеточным топологическим базисом в $W_2^1[a, b]$.

ПРИМЕР 7.2. Пусть $A = d^{2m}/dt^{2m}$ – непрерывный оператор, переводящий элементы из пространства $E = W_2^{2m}[a, b]$, $m = 1, 2, \dots$, в пространство $L_2[a, b]$ с сопряженным $A' = (-1)^m d^{2m}/dt^{2m}$. При $m \geq 1$ мера Дирака δ_t принадлежит $E' = W_2^{-2m}[a, b]$, уравнение $A'G_t = \delta$ разрешимо и функция G_t при всяком фиксированном значении параметра $t \in [a, b]$ принадлежит пространству $L_2[a, b]$. Ограничимся (с точностью до постоянного множителя) частным решением $g(t-s) = |t-s|^{2m-1}$, $m = 1, 2, \dots$, взятом при дополнительном условии $\ker A = 0$. Пусть $x \in W_2^{2m+1}[a, b]$, $x_h \in W_2^{2m}[a, b]$. Имеют место равенства

$$x(t) - x_h(t) = \langle x - x_h, \delta_t \rangle = \langle x - x_h, A'G_t \rangle = (A(x - x_h), G_t) = G(y(t) - y_h(t)),$$

где $y_h(t) \in L_2[a, b]$ – приближенное представление функции $y(t) = Ax(t) \in W_2^1[a, b]$ разложением по системе функций-ступенек $\varphi_i^h(t)$, определяемых формулой (7.5), $(t_i) \subset [a, b]$ – равномерная сетка с шагом h , $i = 1, \dots, n$. Непрерывный оператор G переводит элементы из пространства $L_2[a, b]$ в пространство $W_2^{2m}[a, b]$, непрерывный оператор A – элементы из пространства $W_2^{2m}[a, b]$ в пространство $L_2[a, b]$. Функция $x_h(t) = (G_t, y_h)$ получена разложением по базисным функциям $\psi_t^h = (G_t, \varphi_t^h)$: $x_h(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i^h(t)$.

Приведенные равенства позволяют получить оценку

$$\begin{aligned} \|x - x_h\|_{W_2^{2m}[a, b]} &\leq \|G\| \|y - y_h\|_{L^2[a, b]} \leq \|G\| h \|y\|_{W_2^1[a, b]} = \|G\| h \|Ax\|_{W_2^1[a, b]} \\ &\leq \|G\| h \|A\| \|x\|_{W_2^{2m+1}[a, b]}, \end{aligned}$$

в которой второе неравенство получено применением неравенства (7.4).

Таким образом, функции $\psi_i^h(t) \in W_2^{2m}[a, b]$, $i = 1, 2, \dots$, $t_i \in [a, b]$, образуют сеточный топологический базис H^h -сплайна в пространстве $W_2^{2m+1}[a, b]$.

Порождающая функция $\psi(t)$ для сеточного топологического базиса H^h -сплайна $(\psi_i^h(t))$ в $W_2^{2m+1}[a, b]$ строится из функции (7.5) преобразованием

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-1/2}^{1/2} |t-s|^{2m-1} ds \\ &= \frac{1}{2m\sqrt{h}} \begin{cases} \left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^{2m} + \left(t - \frac{1}{2}\right)^{2m} \right], & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ \operatorname{sgn}(t) \left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^{2m} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^{2m} \right], & |t| \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Простейший случай: $m = 1$ – сплайн на равномерной сетке класса C^1 с базисом

$$\psi_i^h(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \psi\left(\frac{t-t_i}{h}\right), \quad \psi(t) = \begin{cases} t^2 + \frac{1}{4}, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ |t|, & |t| \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7.7)$$

Введем на отрезке $[a, b]$ неравномерную сетку $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, $h_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, разбив $[a, b]$ на n интервалов $\omega_i = (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Определим на каждом интервале ω_i функцию (7.1) $\varphi_i^h(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и вычислим базисные функции сеточного алгебраического H_h -сплайна:

$$\psi_i^h(t) = \frac{1}{\sqrt{h_i}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |t-s|^{2m-1} ds = \frac{1}{2m\sqrt{h_i}} \begin{cases} (t-t_{i-1})^{2m} + (t-t_i)^{2m}, & t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ (t-t_{i-1})^{2m} - (t-t_i)^{2m}, & t \geq t_i, \\ (t-t_i)^{2m} - (t-t_{i-1})^{2m}, & t \leq t_{i-1}, \end{cases} \quad (7.8)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, $m = 1, 2, \dots$. В точках t_{i-1} , t_i функции имеют непрерывные производные до $(2m-1)$ -й включительно, а их $(2m)$ -я производная кусочно непрерывна и интегрируема на $[a, b]$. В остальных точках они дифференцируемы произвольное число раз.

ПРИМЕР 7.3. Рассматривая свертку функции (6.3) с частным фундаментальным решением оператора дифференцирования порядка $2m$:

$$(G * \varphi)(t) = \int_{-1}^1 |t-s|^{2m-1} \varphi(s) ds,$$

получим порождающую функцию

$$\psi(t) = \frac{1}{2m(2m+1)} \begin{cases} [-2|t|^{2m+1} + (1+|t|)^{2m+1} + (1-|t|)^{2m+1}], & |t| \leq 1, \\ [-2|t|^{2m+1} + (1+|t|)^{2m+1} - (1-|t|)^{2m+1}], & |t| \geq 1. \end{cases} \quad (7.9)$$

Повторяя с очевидными вариациями проведенное в примере (7.2) доказательство базисности в $W_2^{2m+1}[a, b]$ систем функций, построенных аффинным преобразованием $t \rightarrow (t-t_i)/h$ из порождающей функции (7.6), можно показать, что функция (7.9) порождает базис

$$\psi_i^h(t) = \psi\left(\frac{t-t_i}{h}\right) \in W_2^{2m+1}[a, b], \quad t_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \dots,$$

для сеточного H^h -сплайна в пространстве $W_2^{2m+2}[a, b]$. В частности, при $m = 1$ имеем

$$\psi_i^h(t) = \psi\left(\frac{t-t_i}{h}\right), \quad \psi(t) = \begin{cases} -\frac{|t|^3}{3} + t^2 + \frac{1}{3}, & |t| \leq 1, \\ |t|, & |t| \geq 1. \end{cases} \quad (7.10)$$

8. R-сплайны. Часто в практических задачах $x(t) \in E$ – некоторый случайный процесс, и тогда значение функции в каждой отдельно взятой точке недостоверно. Поэтому нет смысла восстанавливать значение функции $x(t)$ точно. Второе ограничение применимости рассмотренного метода возникает, когда функция Грина G_t как фундаментальное решение для оператора $A': E'' \rightarrow E'$ в двойственной задаче существует, но не является элементом пространства E (принадлежит более широкому пространству, чем E).

Пусть E – локально выпуклое пространство и A – непрерывное взаимно однозначное отображение E в E' . Проанализируем случай, когда $G_t \notin E$, $t \in K$. Чтобы вложить G_t в E , заменим δ_t на δ -образные функции. Зафиксируем точку $t \in K$.

Возьмем δ -образную функцию $d_t^\alpha(s)$, зависящую от двух параметров $\alpha > 0$, $t \in K$, и рассмотрим сглаживающий функционал d_t^α , $d_t^\alpha \in E'$, действующий по правилу $(x, d_t^\alpha) = \int_K d_t^\alpha(s)x(s) d\mu$. По определению считаем его непрерывным на E . Напомним, что функцию $d_t^\alpha(s)$ называют δ -образной, если она обладает следующими свойствами:

- 1) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (x, d_t^\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_K d_t^\alpha(x) d\mu = x(t)$,
- 2) $d_t^\alpha(s) \geq 0$ на K ,
- 3) $(1, d_t^\alpha) = 1$.

Функцию $x^\alpha(t) = (x, d_t^\alpha)$ назовем *сглаженной* по отношению к $x(t)$. Множество сглаженных функций (по определению вложенное в E), обозначим через W^α . Тогда $x^\alpha \in W^\alpha \subset E$. Если d_t^α – бесконечно дифференцируемая функция, то сглаженная функция x^α такова же. В этом случае все ее производные можно получать непосредственным дифференцированием под знаком интеграла.

Функцию G_t^α будем находить как решение задачи $A'G_t^\alpha(s) = d_t^\alpha(s)$. Заметим, что $G_t^\alpha(s) = (G_s, d_t^\alpha)$, где G_s – решение задачи $A'G_s = \delta_s$. Поскольку $G_t^\alpha \in W^\alpha \subset E$, то

$$x^\alpha(t) = (x, d_t^\alpha) = (x, A'G_t^\alpha) = (Ax, G_t^\alpha) = (G_t^\alpha, f).$$

Тем самым, соотношением

$$x^\alpha(t) = (G_t^\alpha, f), \quad f \in E', \quad G_t^\alpha \in W \subset E, \quad t \in K, \quad x^\alpha \in W^\alpha \subset E,$$

определен оператор $G: E' \rightarrow W^\alpha \subset E$. Так как $G^\alpha(t, s) \in C(K \times K)$, то, решая задачу построения базиса в W^α , линейную форму f можно искать в пространстве F дискретных мер, тотальном на W^α . Наделяя множество $S^\alpha = G^\alpha(F)$ свойствами векторного пространства, назовем его *пространством R -сплайнов* в E . Рассмотрим примеры регуляризации одномерного линейного сплайна.

ПРИМЕР 8.1. Пусть

$$A = A' = -\frac{d^2}{dt^2}, \quad d_0^\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \begin{cases} 1, & |t| \leq \alpha, \\ 0, & |t| \geq \alpha. \end{cases}$$

Решением уравнения $AG_0^\alpha(t) = d_0^\alpha(t)$ является функция

$$\varphi^\alpha(t) = G_0^\alpha(t) = \alpha \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{\alpha^2} + 1 \right), & |t| \leq \alpha, \\ \left| \frac{t}{\alpha} \right|, & |t| \geq \alpha, \end{cases}$$

$0 < \alpha \leq 1/2$, порождающая базис R -сплайна класса C^1 .

ПРИМЕР 8.2. Пусть

$$A = A' = -\frac{d^2}{dt^2}, \quad d_0^\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq \alpha, \\ 0, & |t| \geq \alpha. \end{cases}$$

Решением уравнения $AG_0^\alpha(t) = d_0^\alpha(t)$ является функция

$$\varphi^\alpha(t) = G_0^\alpha(t) = \alpha \begin{cases} -\frac{1}{3} \left| \frac{t}{\alpha} \right|^3 + \left(\frac{t}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{3}, & |t| \leq \alpha, \\ \left| \frac{t}{\alpha} \right|, & |t| \geq \alpha, \end{cases}$$

$0 < \alpha \leq 1$, порождающая базис R -сплайна класса C^2 .

В обоих примерах базисные сплайны на равномерной сетке с шагом h получаем аффинным преобразованием $t \rightarrow (t - t_i)/h$. Эффект регуляризации проявляется в закруглении углов сплайна или его производных в некоторой окрестности $(-\alpha, \alpha)$ каждой узловой точки. Регуляризация приводит к повышению класса гладкости сплайна на единицу в примере 8.1 и на два в примере 8.2. При $\alpha = 1/2$ решение примера 8.1 совпадает с решением (7.7), при $\alpha = 1$ решение примера 8.2 совпадает с решением (7.10).

Чтобы показать целесообразность введения новых определений, дадим три нестандартных примера.

ПРИМЕР 8.3. G -сплайн рациональной степени [18]:

$$g(t, s) = |t - s|^{(2m-1)/2n}, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad \frac{2m-1}{2n} > 1.$$

Базисные сплайны определяем в узловых точках $s = t_i$ произвольной сетки. Сплайн степени $3/2$ при $n = 1, m = 2$ естественно называть *полуторалинейным*.

ПРИМЕР 8.4. Центральнo-симметричный H -сплайн в круге. В [1] получено решение задачи $\Delta H_1 = h_1(r)$, где $r = |t - s|$, Δ – оператор Лапласа,

$$h_1(r) = \begin{cases} 1, & r < r_1, \\ 0, & r \geq r_1, \end{cases}$$

r_1 – радиус окружности с центром в точке s :

$$H_1(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2, & r < r_1, \\ \ln \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 + 1, & r \geq r_1. \end{cases}$$

Положим $s = 0$. Рассмотрим последовательность характеристических функций кольцевых областей:

$$h_k(r) = \begin{cases} 0, & r < r_{k-1}, \\ 1, & r_{k-1} \leq r \leq r_k, \quad k = 2, 3, \dots, \\ 0, & r > r_k, \end{cases}$$

и соответствующую последовательность задач $\Delta H_k(r) = h_k(r)$ с линейно независимыми решениями

$$H_k(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < r_{k-1}, \\ \left(\frac{r}{r_{k-1}}\right)^2 - \ln\left(\frac{r}{r_{k-1}}\right)^2 - 1, & r_{k-1} \leq r \leq r_k, \\ \ln\left(\frac{r}{r_{k-1}}\right)^2 \left[\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^2 - 1\right] + \left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^2 \left[1 - \ln\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)^2\right] - 1, & r > r_k. \end{cases}$$

Используя базис в виде тензорного произведения базиса $H_k(r)$ и базиса Фурье $e^{im\varphi}$, имеем эффективный способ интерполяции в круге. Возникающие в процессе интерполирования матрицы являются нижними треугольными.

ПРИМЕР 8.5. Бесконечно дифференцируемый R -сплайн на плоскости. Проинтегрируем уравнение $\delta G^\varepsilon(r) = d^\varepsilon(r)$, $r = |t - s|$, взяв в качестве $d^\varepsilon(r)$ нормированную δ -образную функцию

$$\delta^\varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} e^{-r^2/2\varepsilon^2},$$

быстро убывающую на бесконечности. Его решение такое, что $[G^\varepsilon(0)]' = 0$ и $G^\varepsilon(r) \sim O(\ln(r))$ при $r \rightarrow \infty$, имеет вид [18]

$$G^\varepsilon(r) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^x \frac{1 - e^{-\rho}}{\rho} d\rho - \gamma \right] = \frac{1}{4\pi} [E_1(x) + \ln(x)],$$

где γ – постоянная Эйлера, $x = r^2/2\varepsilon^2$, $E_1(x)$ – интегральная показательная функция.

Очевидно, что $G^\varepsilon(r)$ ограничена в нуле: $G^\varepsilon(0) = -\gamma/4\pi$ и асимптотически приближается к функции $(1/2\pi) \cdot \ln(r/\sqrt{2}\varepsilon)$. Базисные функции получаются из $G^\varepsilon(r)$ сдвигами на произвольной сетке. Выражение для функции $G^\varepsilon(r)$ в виде интеграла имеет точную быстро вычисляемую равномерную аппроксимацию [19]. Кроме того, интеграл может быть с большой точностью приближен классическим эрмитовым сплайном. Приближения данным сплайном весьма эффективны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. П. Колесников, “Алгебраические сплайны в локально выпуклых пространствах”, *Матем. заметки*, **77**:3 (2005), 339–353.
- [2] М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, ИЛ, М., 1961.
- [3] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ: Теория и приложения*, Мир, М., 1969.
- [4] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [5] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [6] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.
- [7] А. П. Колесников, *Функциональные сплайны в топологических векторных пространствах*, Изд-во УРСС, М., 2008.
- [8] П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953.
- [9] Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры. Интегрирование мер*, Элементы математики, Наука, М., 1967.

- [10] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1967.
- [11] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [12] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984.
- [13] Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной. Введение в теорию интеграла*, Наука, М., 1973.
- [14] И. П. Натансон, *Теория функций действительного переменного*, Наука, М., 1974.
- [15] Л. Шварц, *Анализ*, Т. 1, Мир, М., 1972.
- [16] S. Bernstein, "Sur l'interpolation", *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1905), 33–36.
- [17] Г. И. Марчук, В. И. Агошков, *Введение в проекционно-сеточные методы*, Наука, М., 1981.
- [18] А. П. Колесников, *Топологические методы в теории приближений и численном анализе*, Изд-во УРСС, М., 2001.
- [19] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979.

А. П. Колесников

Российский университет дружбы народов

E-mail: akolesnikov@sci.pfu.edu.ru

Поступило

07.10.2005

Исправленный вариант

07.07.2008