Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ким, Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 59–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:25:47

УДК 517.518.8

Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка

В. А. Ким

В статье найдены константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с равномерными узлами – нормы интерполяционного оператора из C в C , описывающего процесс интерполяции непрерывных ограниченных и непрерывных периодических функций $\mathcal{L}$ -сплайнами третьего порядка с равномерными узлами на вещественной прямой. Как следствие, найдены точные константы Лебега для интерполяционных полиномиальных параболических сплайнов с равномерными узлами.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Как известно, в задачах приближения непрерывных функций широко применяется аппарат интерполяции сплайнами. Процесс интерполяции удобно описывать с помощью сплайн-интерполяционных операторов. Нормы интерполяционных операторов принято называть *константами Лебега*.

Около 40 лет назад Шурер и Ченей [1] вычислили константы Лебега для интерполяционных N -периодических полиномиальных кубических сплайнов с узлами интерполяции $i \in \mathbb{Z}$ и возможными разрывами третьей производной в тех же узлах:

$$\begin{aligned} \|L_{2n}^3\|_\infty &= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 + \sqrt{3})}{((2 + \sqrt{3})^n + 1)(1 + \sqrt{3})}, \\ \|L_{2n+1}^3\|_\infty &= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3})^{2n+1} - (2 + \sqrt{3})}{((2 + \sqrt{3})^{2n+1} + 1)(1 + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

соответственно в случаях четного ($N = 2n$) и нечетного ($N = 2n + 1$) числа различных узлов интерполяции (узлы интерполяции, отличающиеся на период, отождествляются). В 1975 г. Ричардс [2] определил асимптотику констант Лебега для интерполяционных кардинальных полиномиальных сплайнов степени r с узлами интерполяции $i \in \mathbb{Z}$ и возможными разрывами r -й производной в узлах $\{i + (r + 1)/2, i \in \mathbb{Z}\}$:

$$\|L_\infty^r\|_\infty = \frac{2}{\pi} \ln r + \frac{4}{\pi} \left(\ln \frac{4}{\pi} + \frac{\gamma}{2} \right) + o(1),$$

где γ – постоянная Эйлера. Задача определения асимптотики констант Лебега для интерполяционных N -периодических полиномиальных сплайнов степени r на той

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, (грант № НШ-5120.2006.1).

же сетке узлов была решена в 2000 г. Субботиным и Теляковским [3]:

$$\|L_N^r\|_\infty = \frac{2}{\pi} \ln \min(N, r) + O(1),$$

и оценка $O(1)$ не зависит от $N, r \in \mathbb{N}$.

Цель данной работы состоит в вычислении точных констант Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с равномерными узлами. Соответствующие сплайн-интерполяционные операторы определим в п. 2. В п. 3 получим удобное представление интерполяционного $\mathcal{L}$ -сплайна третьего порядка, которое применим для вычисления искомых констант Лебега в пп. 4 и 5. В п. 6, воспользовавшись уже найденными величинами, решим аналогичную задачу полиномиальной сплайн-интерполяции.

2. Постановка задачи. Под $\mathcal{L}$ -сплайном третьего порядка будем понимать непрерывно-дифференцируемую на вещественной прямой, кусочно-полиномиальную по системе $\{1, e^{\alpha x}, e^{-\alpha x}\}$ функцию. $\mathcal{L}$ -сплайн третьего порядка составлен из решений линейного дифференциального уравнения $(D^3 - \alpha^2 D)z = 0$, где $\alpha > 0$ и D – оператор дифференцирования.

Пусть $h > 0$. Обозначим через C_N (при $N \in \mathbb{N}$) пространство непрерывных, $2hN$ -периодических функций, и через C_∞ – пространство непрерывных, ограниченных на вещественной прямой функций. Под $S_N^\mathcal{L}$ (при $N \in \mathbb{N}$) будем понимать пространство $2hN$ -периодических $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с узлами интерполяции $\{2hi, i \in \mathbb{Z}\}$ и возможными разрывами второй производной в узлах $\{2hi + h, i \in \mathbb{Z}\}$, под $S_\infty^\mathcal{L}$ – пространство кардинальных (ограниченных на вещественной прямой) $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с теми же узлами. Введенные пространства наделим $\sup$ -нормой. Результат, изложенный в [4], позволяет заключить, что для любого $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и для любой функции $f \in C_N$ существует единственный $\mathcal{L}$ -сплайн третьего порядка $S^\mathcal{L} \in S_N^\mathcal{L}$, удовлетворяющий условиям интерполяции $f(2hi) = S^\mathcal{L}(2hi; f)$, $i \in \mathbb{Z}$. Нормы интерполяционного оператора $L_N^\mathcal{L}: C_N \rightarrow S_N^\mathcal{L}$ (действующего по правилу $L_N^\mathcal{L} f = S^\mathcal{L}$ при $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) являются искомыми константами Лебега, они вычисляются в пп. 4 и 5.

Полиномиальные сплайн-интерполяционные операторы третьего порядка L_N^2 (при $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) определяются аналогично. Единственность ограниченного на вещественной прямой интерполяционного полиномиального параболического сплайна следует из [5; гл. III, § 2]. Константы Лебега в полиномиальном случае вычисляются в п. 6.

3. Представление интерполяционного $\mathcal{L}$ -сплайна третьего порядка. B -сплайны по системе $\{1, e^{\alpha x}, e^{-\alpha x}\}$ имеют вид

$$B_0(y) \triangleq \begin{cases} 1/\alpha^2(-1 + \frac{1}{2}e^{\alpha(y+3h)} + \frac{1}{2}e^{-\alpha(y+3h)}), & y \in [-3h, -h]; \\ 1/\alpha^2(e^{2\alpha h} + e^{-2\alpha h} - \frac{1}{2}(e^{\alpha h} + e^{-\alpha h})(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y})), & y \in [-h, h]; \\ 1/\alpha^2(-1 + \frac{1}{2}e^{\alpha(y-3h)} + \frac{1}{2}e^{-\alpha(y-3h)}), & y \in [h, 3h]; \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus [-3h, 3h]; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$B_k(y) \triangleq B_0(y - 2kh) \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Будем искать интерполяционный, ограниченный на вещественной прямой $\mathcal{L}$ -сплайн третьего порядка в виде

$$S^{\mathcal{L}}(y; f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k B_k(y). \quad (3.2)$$

Используя (3.1) и условия интерполяции $f(2hi) = S^{\mathcal{L}}(2hi; f)$, $i \in \mathbb{Z}$, получим следующую систему разностных уравнений:

$$C_{k-1} + 2(1 + e^{\alpha h} + e^{-\alpha h})C_k + C_{k+1} = \frac{2\alpha^2 f(2hk)}{(1 - e^{-\alpha h})(e^{\alpha h} - 1)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

По теореме [5; гл. I, § 3] для любой ограниченной последовательности $\{f(2hk), k \in \mathbb{Z}\}$ система разностных уравнений (3.3) имеет единственное ограниченное решение, подстановка которого в (3.2) дает искомое представление. Данное представление выпишем в следующей лемме.

ЛЕММА 1. *Для любой непрерывной, ограниченной на вещественной прямой функции f интерполяционный, ограниченный на вещественной прямой $\mathcal{L}$ -сплайн $S^{\mathcal{L}}$ представим в виде*

$$S^{\mathcal{L}}(y; f) = \Delta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{t=-\infty}^{+\infty} x_1^{|t-k|} f_t \right] B_k(y), \quad (3.4)$$

где $f_t = f(2ht)$,

$$\Delta = \frac{\alpha^2}{[(1 - e^{-\alpha h})(e^{\alpha h} - 1)\sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}]},$$

$$x_1 = -(1 + e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) + \sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}.$$

В силу $x_1 \in (-1, 0)$ ряд (3.4) абсолютно сходится.

4. Константы Лебега для интерполяционных периодических $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка. Оценим функцию Лебега

$$\mathfrak{L}_N^{\Phi}(y) \triangleq \sup_{f \in C_N^*} |S^{\mathcal{L}}(y; f)|, \quad (4.1)$$

где $C_N^* = \{f : f \in C_N, \|f\|_{\infty} \leq 1\}$ и $N \in \mathbb{N}$. Используя (3.1), (4.1) и перестановочное свойство абсолютно сходящегося ряда (3.4), получим

$$\mathfrak{L}_N^{\Phi}(y) = \sup_{f \in C_N^*} \left| \Delta \cdot \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=i-1}^{i+1} x_1^{|t-k|} B_k(y) f_t \right| = \sup_{f \in C_N^*} \left| \Delta \cdot \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-1}^1 x_1^{|u-q|} B_q(x) f_{u+i} \right|, \quad (4.2)$$

где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi - h, 2hi + h]$, $x = y - 2hi$, $q = k - i$ и $u = t - i$. Представив u в виде $u = Nl + s$, где $l \in \mathbb{Z}$ и $s = 0, 1, \dots, N-1$, используя $2hN$ -периодичность интерполируемых функций и перестановочное свойство абсолютно сходящегося ряда в (4.2), преобразуем и оценим (4.2):

$$\mathfrak{L}_N^{\Phi}(y) = \sup_{f \in C_N^*} \left| \Delta \cdot \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-1}^1 x_1^{|Nl+s-q|} B_q(x) f_{s+i} \right|$$

$$\leq \Delta \cdot \sum_{s=0}^{N-1} \left| \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-1}^1 x_1^{|Nl+s-q|} B_q(x) \right|. \quad (4.3)$$

В силу (4.3) будем использовать следующие функции:

$$\psi_s(x) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [x_1^{|Nl+s+1|} B_{-1}(x) + x_1^{|Nl+s|} B_0(x) + x_1^{|Nl+s-1|} B_1(x)] \quad (4.4)$$

при $s = 0, 1, \dots, N-1$,

$$\Psi_N(x) \triangleq \sum_{s=0}^{N-1} |\psi_s(x)|. \quad (4.5)$$

В лемме 1 выполнено $x_1 \in (-1, 0)$; тогда ряд (4.4) абсолютно сходится. С учетом (4.4) и (4.5) функция Лебега имеет представление

$$\mathfrak{L}_N^\Phi(y) = \sup_{f \in C_N^*} \left| \Delta \cdot \sum_{s=0}^{N-1} \psi_s(x) f_{s+i} \right|, \quad (4.6)$$

и оценка (4.3) принимает следующий вид:

$$\mathfrak{L}_N^\Phi(y) \leq \Delta \cdot \Psi_N(x), \quad (4.7)$$

где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi - h, 2hi + h]$ и $x = y - 2hi$. Используя перестановочное свойство абсолютно сходящегося ряда (4.4), вычислим коэффициенты при B -сплайнах в (4.4) как суммы геометрических прогрессий:

$$\psi_0(x) = \frac{x_1 + x_1^{N-1}}{1 - x_1^N} \cdot B_{-1}(x) + \frac{1 + x_1^N}{1 - x_1^N} \cdot B_0(x) + \frac{x_1 + x_1^{N-1}}{1 - x_1^N} \cdot B_1(x), \quad (4.8)$$

$$\psi_s(x) = \frac{x_1^{s+1} + x_1^{N-s-1}}{1 - x_1^N} \cdot B_{-1}(x) + \frac{x_1^s + x_1^{N-s}}{1 - x_1^N} \cdot B_0(x) + \frac{x_1^{s-1} + x_1^{N-s+1}}{1 - x_1^N} \cdot B_1(x) \quad (4.9)$$

при $s = 1, 2, \dots, N-1$.

В силу (3.1) и (4.8) функция $\psi_0(x)$ является четной, в силу (3.1) и (4.9) выполнено $\psi_s(-x) = \psi_{N-s}(x)$ при $s = 1, 2, \dots, N-1$. В итоге справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Функция $\Psi_N(x)$ является четной.*

Используя лемму 2 и (4.7) оценим искомую константу Лебега сверху:

$$\|L_N^\mathcal{L}\|_\infty \leq \Delta \cdot \max_{x \in [0, h]} \Psi_N(x). \quad (4.10)$$

Для получения оценки снизу докажем следующее вспомогательное утверждение:

ЛЕММА 3. *Для любого $x \in [0, h]$ функция $\psi_0(x)$ положительна. Если $N = 2n$ (четно), то для любого $x \in [0, h]$ выполнено $\operatorname{sgn} \psi_s(x) = (-1)^{s-1}$ при $s = 1, 2, \dots, n$ и $\operatorname{sgn} \psi_s(x) = (-1)^{2n-s}$ при $s = n+1, n+2, \dots, 2n-1$. Если $N = 2n+1$ (нечетно), то для любого $x \in [0, h]$ выполнено $\operatorname{sgn} \psi_s(x) = (-1)^{s-1}$ при $s = 1, 2, \dots, 2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (4.8) и (4.9) вычислим значения функций $\psi_s(x)$ в точках $x = -h, 0, h$:

$$\begin{aligned}\psi_s(-h) &= \frac{(1+x_1)(x_1^s + x_1^{N-s-1})(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2}{[2\alpha^2(1-x_1^N)]} \quad \text{при } s=0, 1, \dots, N-1, \\ \psi_s(0) &= \begin{cases} 1/\alpha^2(e^{\alpha h} - 1)(1 - e^{-\alpha h})\sqrt{(1+e^{\alpha h})^2 + (1+e^{-\alpha h})^2} & \text{при } s=0, \\ 0 & \text{при } s=1, \dots, N-1, \end{cases} \\ \psi_s(h) &= \begin{cases} (1+x_1)(1+x_1^{N-1})(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2/[2\alpha^2(1-x_1^N)] & \text{при } s=0, \\ (1+x_1)(x_1^{s-1} + x_1^{N-s})(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2/[2\alpha^2(1-x_1^N)] & \text{при } s=1, \dots, N-1. \end{cases}\end{aligned}$$

Функции $\psi_s(x)$ при $s=0, \dots, N-1$ являются полиномами по системе $\{1, e^{\alpha x}, e^{-\alpha x}\}$ и, следовательно, имеют не более двух нулей с учетом кратности на $\mathbb{R}$. Функция $\psi_0(x)$ является четной (в силу (3.1) и (4.8)) и принимает положительные значения в точках $x = -h, 0, h$; тогда она не отрицательна при любом $x \in [0, h]$.

Пусть $N = 2n$ (четно). В лемме 1 выполнено $x_1 \in (-1, 0)$, тогда величины $\psi_s(-h)$ и $\psi_s(h)$ при $s=1, 2, \dots, 2n-1$ имеют следующий знак:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} \psi_s(-h) &= \operatorname{sgn}(x_1^s + x_1^{2n-s-1}) = \begin{cases} (-1)^s & \text{при } s=1, 2, \dots, n-1, \\ (-1)^{2n-s-1} & \text{при } s=n, n+1, \dots, 2n-1, \end{cases} \\ \operatorname{sgn} \psi_s(h) &= \operatorname{sgn}(x_1^{s-1} + x_1^{2n-s}) = \begin{cases} (-1)^{s-1} & \text{при } s=1, 2, \dots, n, \\ (-1)^{2n-s} & \text{при } s=n+1, n+2, \dots, 2n-1. \end{cases}\end{aligned}$$

В данном случае функции $\psi_s(x)$ при $s \in \{1, 2, \dots, 2n-1\} \setminus \{n\}$ принимают значения разного знака в точках $x = -h, h$ и имеют не более двух нулей с учетом кратности на $\mathbb{R}$, один из которых $-x = 0$. При $s = n$ функция $\psi_n(x)$ является четной (в силу (3.1) и (4.9)) и также имеет не более двух нулей с учетом кратности на $\mathbb{R}$, один из которых $-x = 0$. Тогда функции $\psi_s(x)$ при $s=1, 2, \dots, 2n-1$ не меняют знак на $[0, h]$ и для них при любом $x \in [0, h]$ выполнено $\operatorname{sgn} \psi_s(x) = \operatorname{sgn} \psi_s(h)$.

Пусть $N = 2n+1$ (нечетно). В лемме 1 выполнено $x_1 \in (-1, 0)$, тогда величины $\psi_s(-h)$ и $\psi_s(h)$ при $s=1, 2, \dots, 2n$ имеют следующий знак:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} \psi_s(-h) &= \operatorname{sgn}(x_1^s + x_1^{2n-s}) = (-1)^s \quad \text{при } s=1, 2, \dots, 2n, \\ \operatorname{sgn} \psi_s(h) &= \operatorname{sgn}(x_1^{s-1} + x_1^{2n-s+1}) = (-1)^{s-1} \quad \text{при } s=1, 2, \dots, 2n.\end{aligned}$$

В данном случае функции $\psi_s(x)$ при $s=1, 2, \dots, 2n$ принимают значения разного знака в точках $x = -h, h$ и имеют не более двух нулей с учетом кратности на $\mathbb{R}$, один из которых $-x = 0$. Тогда функции $\psi_s(x)$ при $s=1, 2, \dots, 2n$ не меняют знак на $[0, h]$ и для них при любом $x \in [0, h]$ выполнено $\operatorname{sgn} \psi_s(x) = \operatorname{sgn} \psi_s(h)$. Лемма 3 доказана.

В силу (4.5), (4.6) и леммы 3 для непрерывной, $2hN$ -периодической, линейной между соседними узлами интерполяции функции f^* , интерполирующей значения $f^*(2hs) = \operatorname{sgn} \psi_s(x)$ при $x \in [0, h]$ и $s=0, 1, \dots, N-1$, справедливы следующие соотношения:

$$\|L_N^{\mathcal{L}}\|_{\infty} \geq \max_{x \in [0, h]} \left| \Delta \cdot \sum_{s=0}^{N-1} \psi_s(x) f_s^* \right| = \Delta \cdot \max_{x \in [0, h]} \Psi_N(x). \quad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11), подставив значение Δ из леммы 1, получим представление искомой константы Лебега:

$$\|L_N^{\mathcal{L}}\|_{\infty}^{\infty} = \frac{\alpha^2}{(1 - e^{-\alpha h})(e^{\alpha h} - 1)\sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}} \cdot \max_{x \in [0, h]} \Psi_N(x). \quad (4.12)$$

Теперь найдем максимум функции $\Psi_N(x)$ на отрезке $[0, h]$. Если N четно, справедлива следующая

ЛЕММА 4. Если $N = 2n$ (четно), то $\Psi_{2n}(x)$ достигает максимум на $[0, h]$ в точке $x = h$, равный

$$\Psi_{2n}(h) = \left[\frac{(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})}{\alpha} \right]^2 \cdot \frac{(1 - |x_1|^n)}{(1 + |x_1|^n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3, преобразуем (4.5) к виду

$$\Psi_{2n}(x) = \psi_0(x) + \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \psi_s(x) + \sum_{s=n+1}^{2n-1} (-1)^{2n-s} \psi_s(x). \quad (4.13)$$

Продифференцируем (4.13) почленно:

$$\Psi'_{2n}(x) = \psi'_0(x) + \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \psi'_s(x) + \sum_{s=n+1}^{2n-1} (-1)^{2n-s} \psi'_s(x). \quad (4.14)$$

Подставив (4.8), (4.9) в (4.14) и вычислив суммы конечного числа первых членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий, получим

$$\Psi'_{2n}(x) = -\frac{(1 - x_1)(1 - |x_1|^{n-1})(1 - |x_1|^n)}{\alpha(1 - x_1^{2n})} \cdot (e^{\alpha(x-h)} - e^{-\alpha(x-h)}). \quad (4.15)$$

В силу (4.15) $\Psi'_{2n}(x)$ не отрицательна на $[0, h]$ и обращается в нуль в единственной точке $x = h$, в силу (4.5) $\Psi_{2n}(x)$ также не отрицательна на $[0, h]$; тогда $\Psi_{2n}(x)$ достигает максимум на $[0, h]$ в точке $x = h$:

$$\max_{x \in [0, h]} \Psi_{2n}(x) = \Psi_{2n}(h) = \left(\frac{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1 - |x_1|^n}{1 + |x_1|^n}.$$

Лемма 4 доказана.

Если N нечетно, справедлива аналогичная

ЛЕММА 5. Если $N = 2n + 1$ (нечетно), то $\Psi_{2n+1}(x)$ достигает максимум на $[0, h]$ в точке $x = h$, равный

$$\Psi_{2n+1}(h) = \left(\frac{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{(1 - |x_1|^{2n+1})}{(1 + |x_1|^{2n+1})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3, преобразуем (4.5) к виду

$$\Psi_{2n+1}(x) = \psi_0(x) + \sum_{s=1}^{2n} (-1)^{s-1} \psi_s(x). \quad (4.16)$$

Продифференцировав (4.16) почленно, учтя (4.8) и (4.9), вычислим

$$\Psi'_{2n+1}(x) = -\frac{(1-x_1)(1-x_1^{2n})}{\alpha(1-x_1^{2n+1})} \cdot (e^{\alpha(x-h)} - e^{-\alpha(x-h)}). \quad (4.17)$$

В силу (4.17) $\Psi'_{2n+1}(x)$ не отрицательна на $[0, h]$ и обращается в нуль в единственной точке $x = h$, в силу (4.5) $\Psi_{2n+1}(x)$ также не отрицательна на $[0, h]$; тогда $\Psi_{2n+1}(x)$ достигает максимум на $[0, h]$ в точке $x = h$:

$$\max_{x \in [0, h]} \Psi_{2n+1}(x) = \Psi_{2n+1}(h) = \left(\frac{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1 - |x_1|^{2n+1}}{1 + |x_1|^{2n+1}}.$$

Лемма 5 доказана.

Исходя из (4.12), лемм 4 и 5, получаем константы Лебега для интерполяционных периодических $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с равномерными узлами.

ТЕОРЕМА 1. *Константа Лебега для интерполяционных $2hN$ -периодических $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с узлами интерполяции $\{2hi, i \in \mathbb{Z}\}$ и возможными разрывами второй производной в узлах $\{2hi + h, i \in \mathbb{Z}\}$ в случае четного ($N = 2n$) числа различных узлов интерполяции (узлы интерполяции, отличающиеся на период, отождествляются) имеет вид*

$$\|L_{2n}^{\mathcal{L}}\|_{\infty} = \frac{(1 + e^{-\alpha h})(1 + e^{\alpha h})}{\sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}} \cdot \frac{1 - |x_1|^n}{1 + |x_1|^n},$$

где

$$x_1 = -(1 + e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) + \sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Константа Лебега для интерполяционных $2hN$ -периодических $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с узлами интерполяции $\{2hi, i \in \mathbb{Z}\}$ и возможными разрывами второй производной в узлах $\{2hi + h, i \in \mathbb{Z}\}$ в случае нечетного ($N = 2n + 1$) числа различных узлов интерполяции (узлы интерполяции, отличающиеся на период, отождествляются) имеет вид*

$$\|L_{2n+1}^{\mathcal{L}}\|_{\infty} = \frac{(1 + e^{-\alpha h})(1 + e^{\alpha h})}{\sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}} \cdot \frac{1 - |x_1|^{2n+1}}{1 + |x_1|^{2n+1}},$$

где

$$x_1 = -(1 + e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) + \sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}.$$

5. Константа Лебега для интерполяционных кардинальных $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка. Оценим функцию Лебега

$$\mathfrak{L}_{\infty}^{\Phi}(y) \triangleq \sup_{f \in C_{\infty}^*} |S^{\mathcal{L}}(y; f)|, \quad (5.1)$$

где $C_{\infty}^* = \{f : f \in C_{\infty}, \|f\|_{\infty} \leq 1\}$. Используя (3.1), (5.1) и перестановочное свойство абсолютно сходящегося ряда (3.4), получим

$$\mathfrak{L}_{\infty}^{\Phi}(y) = \sup_{f \in C_{\infty}^*} \left| \Delta \cdot \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=i-1}^{i+1} x_1^{|t-k|} B_k(y) f_t \right| = \sup_{f \in C_{\infty}^*} \left| \Delta \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-1}^1 x_1^{|s-q|} B_q(x) f_{s+i} \right|, \quad (5.2)$$

где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi - h, 2hi + h]$, $x = y - 2hi$, $q = k - i$ и $s = t - i$. В силу (5.2) будем использовать следующие функции:

$$\phi_s(x) \triangleq x_1^{|s+1|} B_{-1}(x) + x_1^{|s|} B_0(x) + x_1^{|s-1|} B_1(x) \quad \text{при } s \in \mathbb{Z}; \quad (5.3)$$

$$\Phi(x) \triangleq \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |\phi_s(x)|. \quad (5.4)$$

В лемме 1 выполнено $x_1 \in (-1, 0)$; тогда ряд (5.4) абсолютно сходится. С учетом (5.3) и (5.4) функция Лебега имеет представление

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(y) = \sup_{f \in C_\infty^*} \left| \Delta \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \phi_s(x) f_{s+i} \right|, \quad (5.5)$$

и справедлива следующая оценка:

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(y) \leq \Delta \cdot \Phi(x), \quad (5.6)$$

где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi - h, 2hi + h]$ и $x = y - 2hi$. В силу (3.1) и (5.3) выполнено $\phi_s(-x) = \phi_{-s}(x)$ при $s \in \mathbb{Z}$. Используя перестановочное свойство абсолютно сходящегося ряда (5.4), изменим порядок суммирования в (5.4); тогда $\Phi(-x) = \Phi(x)$. В итоге справедлива следующая

ЛЕММА 6. *Функция $\Phi(x)$ является четной.*

Используя лемму 6 и (5.6), оценим искомую константу Лебега сверху:

$$\|L_\infty^\mathcal{L}\|_\infty \leq \Delta \cdot \max_{x \in [0, h]} \Phi(x). \quad (5.7)$$

Для получения оценки снизу докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 7. *Для любого $x \in [0, h]$ выполнено $\operatorname{sgn} \phi_s(x) = (-1)^{s-1}$ при $s = 1, 2, 3, \dots$ и $\operatorname{sgn} \phi_s(x) = (-1)^{-s}$ при $s = 0, -1, -2, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (5.3), вычислим значения функций $\phi_s(x)$ в точках $x = -h, 0, h$:

$$\begin{aligned} \phi_s(-h) &= \begin{cases} (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2 (1 + x_1) x_1^s / (2\alpha^2) & \text{при } s = 0, 1, 2, \dots, \\ (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2 (1 + x_1) x_1^{-s-1} / (2\alpha^2) & \text{при } s = -1, -2, -3, \dots, \end{cases} \\ \phi_s(0) &= \begin{cases} 1/\alpha^2 (e^{\alpha h} - 1)(1 - e^{-\alpha h}) \sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2} & \text{при } s = 0, \\ 0 & \text{при } s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} \\ \phi_s(h) &= \begin{cases} (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2 (1 + x_1) x_1^{s-1} / (2\alpha^2) & \text{при } s = 1, 2, 3, \dots, \\ (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2 (1 + x_1) x_1^{-s} / (2\alpha^2) & \text{при } s = 0, -1, -2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

В лемме 1 выполнено $x_1 \in (-1, 0)$; тогда $\phi_s(-h)$ и $\phi_s(h)$ при $s \in \mathbb{Z}$ имеют следующий знак:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \phi_s(-h) &= \begin{cases} (-1)^s & \text{при } s = 0, 1, 2, \dots, \\ (-1)^{-s-1} & \text{при } s = -1, -2, -3, \dots, \end{cases} \\ \operatorname{sgn} \phi_s(h) &= \begin{cases} (-1)^{s-1} & \text{при } s = 1, 2, 3, \dots, \\ (-1)^{-s} & \text{при } s = 0, -1, -2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Функции $\phi_s(x)$ при $s \in \mathbb{Z}$ являются полиномами по системе $\{1, e^{\alpha x}, e^{-\alpha x}\}$ и, следовательно, имеют не более двух нулей с учетом кратности на $\mathbb{R}$. Кроме того, функция $\phi_0(x)$ является четной (в силу (3.1) и (5.3)) и принимает положительные значения в точках $x = -h, 0, h$, а в случае $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ функции $\phi_s(x)$ принимают значения разного знака в точках $x = -h, h$ и обращаются в нуль при $x = 0$. Тогда функции $\phi_s(x)$ при $s \in \mathbb{Z}$ не меняют знак на $[0, h]$, и при любых $x \in [0, h]$ и $s \in \mathbb{Z}$ выполнено $\operatorname{sgn} \phi_s(x) = \operatorname{sgn} \phi_s(h)$. Лемма 7 доказана.

В силу (5.4), (5.5) и леммы 7 для непрерывной, линейной между соседними узлами интерполяции функции f^* , интерполирующей значения $f^*(2hs) = \operatorname{sgn} \phi_s(x)$ при $x \in [0, h]$ и $s \in \mathbb{Z}$, справедливы следующие соотношения:

$$\|L_\infty^\mathcal{L}\|_\infty \geq \max_{x \in [0, h]} \left| \Delta \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \phi_s(x) f_{s+i}^* \right| = \Delta \cdot \max_{x \in [0, h]} \Phi(x). \quad (5.8)$$

Из (5.7) и (5.8), подставив значение Δ из леммы 1, получим представление искомой константы Лебега

$$\|L_\infty^\mathcal{L}\|_\infty = \frac{\alpha^2}{(1 - e^{-\alpha h})(e^{\alpha h} - 1)\sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}} \cdot \max_{x \in [0, h]} \Phi(x). \quad (5.9)$$

Теперь найдем максимум функции $\Phi(x)$ на отрезке $[0, h]$.

ЛЕММА 8. $\Phi(x)$ достигает максимум на $[0, h]$ в точке $x = h$, равный $\Phi(h) = (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})^2 / \alpha^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 7, преобразуем (5.4) к виду

$$\Phi(x) = \sum_{s=-\infty}^0 (-1)^{-s} \phi_s(x) + \sum_{s=1}^{+\infty} (-1)^{s-1} \phi_s(x). \quad (5.10)$$

Продифференцируем (5.10) почленно:

$$\Phi'(x) = \sum_{s=-\infty}^0 (-1)^{-s} \phi'_s(x) + \sum_{s=1}^{+\infty} (-1)^{s-1} \phi'_s(x). \quad (5.11)$$

Подставив (5.3) в (5.11) и вычислив суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий, получим

$$\Phi'(x) = -\frac{1 - x_1}{\alpha} (e^{\alpha(x-h)} - e^{-\alpha(x-h)}). \quad (5.12)$$

В силу (5.12) $\Phi'(x)$ не отрицательна на $[0, h]$ и обращается в нуль в единственной точке $x = h$; в силу (5.4) $\Phi(x)$ также не отрицательна на $[0, h]$; тогда $\Phi(x)$ достигает максимум на $[0, h]$ в точке $x = h$:

$$\max_{x \in [0, h]} \Phi(x) = \Phi(h) = \left(\frac{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}}{\alpha} \right)^2.$$

Лемма 8 доказана.

Исходя из (5.9) и леммы 8, получаем константу Лебега для интерполяционных кардинальных $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с равномерными узлами.

ТЕОРЕМА 3. *Константа Лебега для интерполяционных кардинальных $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка с узлами интерполяции $\{2hi, i \in \mathbb{Z}\}$ и возможными разрывами второй производной в узлах $\{2hi + h, i \in \mathbb{Z}\}$ имеет вид*

$$\|L_{\infty}^{\mathcal{L}}\|_{\infty} = \frac{(1 + e^{-\alpha h})(1 + e^{\alpha h})}{\sqrt{(1 + e^{\alpha h})^2 + (1 + e^{-\alpha h})^2}}.$$

6. Константы Лебега для интерполяционных полиномиальных параболических сплайнов. Константы Лебега для интерполяционных полиномиальных параболических сплайнов с равномерными узлами вычисляются предельным переходом при $\alpha \rightarrow +0$ в соответствующих величинах для $\mathcal{L}$ -сплайнов третьего порядка, приведенных в теоремах 1, 2 и 3:

$$\|L_{2n}^2\|_{\infty} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^n}{1 + (3 - 2\sqrt{2})^n}, \quad \|L_{2n+1}^2\|_{\infty} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^{2n+1}}{1 + (3 - 2\sqrt{2})^{2n+1}}$$

– константы Лебега для интерполяционных N -периодических полиномиальных параболических сплайнов с равномерными узлами, соответственно, в случаях четного ($N = 2n$) и нечетного ($N = 2n + 1$) числа различных узлов интерполяции (узлы интерполяции, отличающиеся на период, отождествляются);

$$\|L_{\infty}^2\|_{\infty} = \sqrt{2}$$

– константа Лебега для интерполяционных кардинальных полиномиальных параболических сплайнов с равномерными узлами.

Автор благодарен Ю. Н. Субботину за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Schurer, E. W. Cheney, “On interpolating cubic splines with equally-spaced nodes”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **71**:5 (1968), 517–524.
- [2] F. Richards, “The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation”, *J. Approximation Theory*, **14**:2 (1975), 83–92.
- [3] Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, “Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами”, *Матем. сб.*, **191**:8 (2000), 131–140.
- [4] А. Шарма, И. Цимбаларио, “Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности”, *Матем. заметки*, **21**:2 (1977), 161–172.
- [5] С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике*, Наука, М., 1976.

В. А. Ким

Уральский государственный университет им. А. М. Горького,
Екатеринбург
E-mail: vkim@k66.ru

Поступило
26.03.2007