Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Кузнецова, Инвариантные весовые алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 567–576

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3866>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:12:02

Инвариантные весовые алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$

Ю. Н. Кузнецова

Работа посвящена весовым пространствам $\mathcal{L}_p^w(G)$ на локально компактной группе G . Если w – положительная измеримая функция на G , то пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$, $p \geq 1$, определяется равенством $\mathcal{L}_p^w(G) = \{f : fw \in \mathcal{L}_p(G)\}$. Рассматриваются такие веса w , при которых эти пространства являются алгебрами относительно обычной свертки. Показано, что при $p > 1$ на любой сигма-компактной группе существует вес, задающий такую алгебру. Доказан критерий, известный ранее в частных случаях: пространство $\mathcal{L}_1^w(G)$ является алгеброй тогда и только тогда, когда функция w полумультипликативна. Доказано, что достаточным условием существования в алгебре $\mathcal{L}_p^w(G)$ аппроксимативной единицы является инвариантность пространства $\mathcal{L}_p^w(G)$ относительно сдвигов. Показано, что в случае не дискретной группы G и $p > 1$ никакая аппроксимативная единица инвариантной весовой алгебры не может быть ограниченной.

Библиография: 11 названий.

1. Критерий для группы. Всюду в статье G – локально компактная группа, все интегралы берутся по левой мере Хаара μ , $p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$ (при $p = 1$ считаем, что $q = \infty$). Весом называется любая положительная измеримая функция. Пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ с весом w определяется как множество $\{f : fw \in \mathcal{L}_p(G)\}$; норма функции f равна $\|f\|_{p,w} = (\int |fw|^p d\mu)^{1/p}$. Индексы p, w иногда опускаются. Символ I_A обозначает индикаторную функцию множества A .

Хорошо известны [1], [2] условия на весовую функцию, достаточные для того, чтобы пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ являлось алгеброй относительно обычной свертки:

$$f * g(s) = \int f(t)g(t^{-1}s) dt.$$

При $p = 1$ это полумультипликативность:

$$w(st) \leq w(s)w(t), \tag{1} \quad \{\text{eq1}\}$$

а при $p > 1$ – следующее неравенство (локально поточечно почти всюду):

$$w^{-q} * w^{-q} \leq w^{-q}. \tag{2} \quad \{\text{eq2}\}$$

Заметим, что если неравенство (1) или (2) выполняется с некоторой константой C (после знака $\leq$), то для функции $w_1 = Cw$ то же неравенство выполняется уже

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00982).

безо всякой константы. Несколько шире понятие подобных весов: веса w_1, w_2 называются *подобными*, если с некоторыми константами C_1, C_2 локально почти всюду выполняется неравенство

$$C_1 \leq \frac{w_1}{w_2} \leq C_2. \quad (3) \quad \{\text{eq3}\}$$

Подобные веса задают одно и то же весовое пространство и эквивалентные нормы на нем.

При $p > 1$ удобно вводить двойственную функцию $u = w^{-q}$, тогда неравенство (2) приобретает следующий вид, не зависящий от p и q :

$$u * u \leq u. \quad (4) \quad \{\text{eq4}\}$$

Легко заметить, что каждая функция u , удовлетворяющая условию (4), задает семейство весовых алгебр $\mathcal{L}_p^{w_p}(G)$ при всех $p \in (1, +\infty)$: $w_p = u^{-1/q}$.

Весовые алгебры с $p = 1$ существуют, разумеется, на любой локально компактной группе (хотя бы с единичным весом). При $p > 1$ группа уже не может быть любой, точнее, верна следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Для локально компактной группы G следующие условия эквивалентны:*

- (i) *группа G σ -компактна;*
 - (ii) *для некоторого $p > 1$ существует вес w , удовлетворяющий условию (2) (при этом пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй);*
 - (iii) *при любом $p > 1$ существует вес w , удовлетворяющий условию (2).*
- Для абелевой группы G эти условия равносильны также следующим:*
- (iv) *для некоторого $p > 1$ существует вес w , с которым пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй;*
 - (v) *при любом $p > 1$ существует вес w , с которым пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) и (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) очевидны и не зависят от коммутативности группы G . Докажем, что (ii) $\Rightarrow$ (i), (i) $\Rightarrow$ (iii) и для абелевой группы (iv) $\Rightarrow$ (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Если выполняется условие (2), то хотя бы в одной точке x (а на самом деле почти всюду)

$$(w^{-q} * w^{-q})(x) = \int w^{-q}(y)w^{-q}(y^{-1}x) dy \leq w^{-q}(x) < \infty.$$

Таким образом, на группе G существует интегрируемая строго положительная функция. Между тем известно [3; п. 11.40], что любая интегрируемая функция обращается (почти всюду) в нуль вне некоторого σ -компактного множества. Следовательно, σ -компактна вся группа G .

(iv) $\Rightarrow$ (i). Согласно [4; теорема 3] существует алгебра $\mathcal{L}_p^w(G)$ с весом w , удовлетворяющим условию $w^{-q} \in \mathcal{L}_1(G)$. Поскольку функция w^{-q} положительна, группа G должна быть σ -компактна.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Построим на данной группе G функцию вида (4). Возьмем произвольную положительную функцию $u_1 \in \mathcal{L}_1(G)$ (такая функция существует благодаря

условию σ -компактности). Можно считать, что $\|u_1\|_1 = 1$. Определим по индукции функции u_n , $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_1 * u_n.$$

Понятно, что $\|u_n\|_1 \leq 1$ при всех n . Положим теперь $u = \sum n^{-2} u_n$ и покажем, что выполняется неравенство (4). Сначала отметим следующее элементарное неравенство:

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^2(m-n)^2} \leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{m^2} \equiv \frac{C}{m^2}.$$

Теперь можно оценить свертку $u * u$:

$$u * u = \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{u_n * u_k}{n^2 k^2} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{u_{n+k}}{n^2 k^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u_m}{n^2(m-n)^2} \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m}{m^2} = Cu.$$

Перейдя от функции u к u/C , получаем неравенство (4).

2. Технические леммы. Вообще говоря, в качестве веса может выступать любая положительная измеримая функция. Некоторые авторы предполагают еще локальную интегрируемость w^p . Однако это условие излишне, если $\mathcal{L}_p^w(G)$ является алгеброй. А именно, выполнена следующая

ЛЕММА 2.1. *Если $\mathcal{L}_p^w(G)$, $p \geq 1$, – алгебра, то функция w^p локально интегрируема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный компакт $A \subset G$ положительной меры. Определим функции $\varphi = I_A / \max\{1, w\}$ и $\psi = I_{A^{-1} \cdot A} / \max\{1, w\}$. Тогда $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_p^w(G)$, следовательно, $\tau = \varphi * \psi \in \mathcal{L}_p^w(G)$. Одновременно $\varphi \in \mathcal{L}_1$ и $\psi \in \mathcal{L}_{\infty}$, так что функция τ непрерывна. При этом $\tau|_A > 0$ и, значит, $\min_A \tau = \tau_0 > 0$. Видим, что $I_A \leq \tau / \tau_0$, следовательно, $I_A \in \mathcal{L}_p^w(G)$, откуда $w \in \mathcal{L}_p(A)$.

ЛЕММА 2.2. *Множество всех ограниченных финитных функций $B_0(G)$ является плотным подмножеством любой алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $B_0(G) \subset \mathcal{L}_p^w(G)$ следует из предыдущей леммы. Известно, что $B_0(G)$ плотно в $\mathcal{L}_p(G)$, следовательно, $w^{-1}B_0(G)$ плотно в $\mathcal{L}_p^w(G) = w^{-1}\mathcal{L}_p(G)$. Пусть теперь функция $f \in w^{-1}B_0(G)$ финитна, но не обязательно ограничена. Изменением на множестве сколь угодно малой меры ε можно сделать f ограниченной; величина ε выбирается из непрерывности интеграла $\|f\|_{p,w} = \|fw\|_p$ как функции множества.

Свойство полумультипликативности (1) существенно в теории весовых алгебр, потому что именно этим свойством обладают веса алгебр $\mathcal{L}_1^w(G)$ (см. теорему 3.3). Нам потребуется следующая лемма о полумультипликативных функциях (фактически это предложение 1.16 из [5]).

ЛЕММА 2.3. *Пусть измеримая функция $L: G \rightarrow \mathbb{R}$ полумультипликативна, т.е. удовлетворяет условию (1), и положительна. Тогда L ограничена и отделена от нуля на любом компакте.*

Будем обозначать через ${}^s f$ левый сдвиг функции f : ${}^s f(t) = f(st)$. Инвариантность пространства $\mathcal{L}_p^w(G)$ относительно левых сдвигов эквивалентна следующему условию, которое впервые рассматривал Эдвардс [5; п. 1.13]: для всех $s \in G$

$$L_s = \operatorname{ess\,sup}_{t \in G} \frac{w(st)}{w(t)} < \infty. \quad (5) \quad \{\text{eq5}\}$$

Эдвардс называет такой вес *медленно растущим* (moderate growth). Критерий (5) не зависит от p , так что пространства с данным весом и всеми показателями $p \geq 1$ инвариантны или неинвариантны одновременно. Поменяв s и t местами, мы получим условие для правых сдвигов, вообще говоря, не эквивалентное первому. Мы будем использовать преимущественно левые сдвиги, и под словом “инвариантность” будем понимать инвариантность под действием левых сдвигов. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\sup_{f \neq 0} \frac{\|{}^s f\|_{p,w}}{\|f\|_{p,w}} = L_{s^{-1}}. \quad (6) \quad \{\text{eq6}\}$$

Из условия (5) следует, что $L_s > 0$, $L_{st} \leq L_s L_t$ и

$$\operatorname{ess\,inf}_t \frac{w(st)}{w(t)} = \frac{1}{L_{s^{-1}}} > 0.$$

ЛЕММА 2.4. *Если неравенство (5) выполняется для локально почти всех $s \in G$, то оно выполняется и для всех $s \in G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S \subset G$ – множество тех точек s , для которых выполняется условие (5). По условию множество S локально имеет полную меру. Это же верно и для S^{-1} , так как для любого компакта F

$$\mu(F \setminus S^{-1}) = \mu([F^{-1} \setminus S]^{-1}) = \int_{F^{-1} \setminus S} \Delta(x^{-1}) dx = 0$$

(где Δ – модулярная функция группы, см. [3; п. 15.15]). Возьмем произвольное множество $T \subset S \cap S^{-1}$ конечной положительной меры. Множество $T \cdot T^{-1}$ содержит некоторую окрестность единицы U [3; п. 20.17]. Но из того, что функция L мультипликативна, следует, что S замкнуто относительно умножения и

$$U \subset T \cdot T^{-1} \subset S \cdot S \subset S.$$

Теперь, по той же причине $SU \subset S$, а поскольку S (будучи локально полной мерой) всюду плотно, то $S = G$.

Следующая лемма доказана Фейхтингером [6; теорема 2.7].

ЛЕММА 2.5. *Если функция w удовлетворяет условию (5) и локально интегрируема, то она подобна некоторой непрерывной функции.*

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть $\mathcal{L}_p^w(G)$ – алгебра с весом w , удовлетворяющим условию (5) (в частности, с мультипликативным весом). Тогда функция w подобна некоторой непрерывной функции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 для любого компакта F справедливо включение $w \in \mathcal{L}_p(F) \subset \mathcal{L}_1(F)$, значит, можно применить лемму 2.5.

Поскольку на компактной группе каждая непрерывная функция подобна константе, получаем как следствие, что на компактной группе все инвариантные относительно сдвигов алгебры изоморфны обычной алгебре $\mathcal{L}_p(G)$. Обращение следствия неверно, что показывает следующий

ПРИМЕР 2.1. Существует такая алгебра $\mathcal{L}_2^w(\mathbb{R})$, что w непрерывна, но не удовлетворяет условию (5). Пусть $0 < \alpha_n < 1$, $A_n = [n + \alpha_n, n + 1]$ при всех целых n . Положим $w|_{A_n} = 1 + n^2$, $w(n + \alpha_n/2) = 1 + |n|$ и продолжим w кусочно-линейно. При $\alpha_n = 1/\max(1, n^2)$ выполняется условие (2), однако условие (5) не выполняется ни для какого $s \in (0, 1)$.

3. Критерий для веса алгебры $\mathcal{L}_1^w(G)$. В случае $p = 1$ весовые функции w , для которых $\mathcal{L}_p^w(G)$ будет алгеброй, удастся полностью описать, причем обнаруживается, что вес w обязательно подобен непрерывной функции. Следующая теорема была доказана Грабинером [7] для вещественной полупрямой (без утверждения о непрерывности, которое для полупрямой неверно); Фейхтингер [6] доказал равносильность условий (i) и (ii) для локально компактной группы в предположении инвариантности пространства $\mathcal{L}_1^w(G)$. Теорема обобщает, таким образом, оба эти результата.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любого веса w следующие условия равносильны:*

- (i) *функция w подобна непрерывной полумультимпликативной функции;*
- (ii) *$\mathcal{L}_1^w(G)$ – алгебра;*
- (iii) *при некотором p , $1 \leq p < \infty$, справедливо включение $\mathcal{L}_1^w(G) * \mathcal{L}_p^w(G) \subset \mathcal{L}_p^w(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (i) $\Rightarrow$ (iii) легко проверяются непосредственно, а импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) является частным случаем (iii) $\Rightarrow$ (i) при $p = 1$. Докажем поэтому только (iii) $\Rightarrow$ (i).

Из включения (iii) несложно следует (ср. [3; п. 38.27]), что с некоторой константой C выполняется неравенство

$$\|f * g\|_{p,w} \leq C \|f\|_{1,w} \|g\|_{p,w}.$$

Повторив рассуждения леммы 2.1, заключаем, что функция w^p , а вместе с ней и w локально интегрируемы. Следовательно, пространства $\mathcal{L}_1^w(G)$, $\mathcal{L}_p^w(G)$ содержат индикаторы всех компактных множеств. Для пары таких множеств A , B и любых s , t поточечно выполняется неравенство

$$\mu(A) I_{stB} \leq I_{sA} * I_{A^{-1}tB}, \quad (7) \quad \{\text{eq7}\}$$

откуда

$$\mu(A) \|I_{stB}\|_{p,w} \leq C \|I_{sA}\|_{1,w} \|I_{A^{-1}tB}\|_{p,w}. \quad (8) \quad \{\text{eq8}\}$$

Здесь нам потребуется обобщение теоремы Лебега о дифференцировании интеграла по верхнему пределу. В случае локально компактной группы теорему можно сформулировать так (см. общую постановку задачи в обзоре [8] и уточнения для случая групп в работе [9]): существует такое семейство $\mathcal{V}$ множеств положительной меры, направленное противоположно включению, что для любой локально интегрируемой функции f

$$\lim_{V \in \mathcal{V}} \frac{1}{\mu(V)} \int_{xV} f(t) dt = f(x) \quad (9) \quad \{\text{eq9}\}$$

при локально почти всех $x \in G$. При этом все множества $V \in \mathcal{V}$ содержат единицу и каждая окрестность единицы содержит все $V \in \mathcal{V}$, начиная с некоторого [9; гл. 8, пп. 1–2]. Будем называть точки, в которых выполняется равенство (9), *точками Лебега* функции f .

Итак, локально почти все $s \in G$ являются точками Лебега для функции w . Для каждой такой точки s локально почти все точки t являются точками Лебега одновременно для функций w^p и ${}^s w^p$. Если точки s, t выбраны таким образом, то, очевидно, st будет точкой Лебега для w^p . Теперь из равенства (9) для $f = w^p$, $x = t$ и $x = st$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $V \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}\|I_{stV}\|_{p,w}^p &= \int_{stV} w^p(r) dr > w^p(st) \frac{\mu(V)}{1+\varepsilon}, \\ \|I_{tV}\|_{p,w}^p &= \int_{tV} w^p(r) dr < w^p(t) \mu(V) (1+\varepsilon).\end{aligned}$$

Фиксируем V таким, чтобы выполнялись эти неравенства. Поскольку интеграл от ${}^s w^p$ абсолютно непрерывен как функция множества, найдется такой компакт $B \subset V$, что

$$\|I_{stV}\|_{p,w} < (1+\varepsilon) \|I_{stB}\|_{p,w}, \quad \mu(V) < (1+\varepsilon) \mu(B).$$

Далее, найдется такая окрестность единицы (с компактным замыканием) V_0 , что

$$\|I_{V_0^{-1}tB}\|_{p,w} < (1+\varepsilon) \|I_{tB}\|_{p,w}.$$

И, наконец, для достаточно малых $A \in \mathcal{V}$, $A \subset V_0$, благодаря условию (9) для $f = w$, $x = s$ выполняется неравенство

$$\|I_{sA}\|_{1,w} < (1+\varepsilon) \mu(A) w(s).$$

При этом, очевидно, $\|I_{A^{-1}tB}\|_{p,w} \leq \|I_{V_0^{-1}tB}\|_{p,w}$ и $\|I_{tB}\|_{p,w} \leq \|I_{tV}\|_{p,w}$.

Объединяя все эти условия с неравенством (8), получаем

$$\begin{aligned}\mu(A) \mu(B)^{1/p} w(st) &\leq \mu(A) \mu(V)^{1/p} w(st) \\ &< \mu(A) \|I_{stV}\|_{p,w} (1+\varepsilon)^{1/p} < \mu(A) \|I_{stB}\|_{p,w} (1+\varepsilon)^{1/p+1} \\ &\leq C \|I_{sA}\|_{1,w} \|I_{A^{-1}tB}\|_{p,w} (1+\varepsilon)^{1/p+1} \\ &< C (1+\varepsilon) \mu(A) w(s) \|I_{V_0^{-1}tB}\|_{p,w} (1+\varepsilon)^{1/p+1} \\ &< C \mu(A) w(s) (1+\varepsilon) \|I_{tB}\|_{p,w} (1+\varepsilon)^{1/p+2} \\ &\leq C \mu(A) w(s) \|I_{tV}\|_{p,w} (1+\varepsilon)^{1/p+3} \\ &< C \mu(A) w(s) w(t) \mu(V)^{1/p} (1+\varepsilon)^{2/p+3} \\ &< C (1+\varepsilon)^{3/p+3} \mu(A) \mu(B)^{1/p} w(s) w(t),\end{aligned}$$

и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$w(st) \leq C w(s) w(t). \tag{10} \quad \{\text{eq10}$$

Мы получили это неравенство для локально почти всех t и s . Но по лемме 2.4 для w выполняется условие (5), и по лемме 2.5 функция w подобна некоторой непрерывной функции w_1 . Для w_1 неравенство (10) (с другой константой) выполняется уже при всех t и s . И наконец, домножив w_1 на эту константу, мы получим непрерывный полумультипликативный вес.

Как следствие, мы немедленно получаем описание мультипликаторов на алгебре $\mathcal{L}_1^w(G)$, т.е. операторов, перестановочных со сдвигами. Годри в предположении полунепрерывности веса доказал [10], что мультипликаторы можно отождествить с пространством $\mathcal{M}^w(G)$ регулярных борелевских мер, для которых $\int w d|\mu| < \infty$. Поскольку вес можно всегда считать непрерывным, формулировка теоремы упрощается, следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.2. *Ограниченный оператор T на алгебре $\mathcal{L}_1^w(G)$ перестановочен с правыми сдвигами тогда и только тогда, когда он является сверткой с некоторой мерой $\mu \in \mathcal{M}^w(G)$:*

$$Tf = \mu * f \quad \text{для всех } f \in \mathcal{L}_1^w(G).$$

При $p > 1$ вес алгебры нельзя, вообще говоря, сделать непрерывным, что видно из следующего примера.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $G = \mathbb{T}$, $p = 2$, окружность параметризована переменной $t \in [-1, 1]$ и $w(t) = |t|^{-1/4}$ (другой пример: $w(t) = |t|^{1/4}$, $w(0) = 1$). Пространство $\mathcal{L}_2^w(\mathbb{T})$ – алгебра, но вес не подобен никакой непрерывной функции. При этом $\mathcal{L}_2^w(\mathbb{T})$ не выдерживает сдвигов, а пространство $\mathcal{L}_1^w(\mathbb{T})$ с тем же весом не является алгеброй.

Из того, что пространство $\mathcal{L}_1^w(G)$ является алгеброй, следует полумультипликативность веса, а значит, инвариантность любого из пространств $\mathcal{L}_p^w(G)$, $p \geq 1$, относительно сдвигов (т.е. условие (5)). Обратное верно для коммутативных групп. А именно, выполнена следующая

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть G – абелева локально компактная группа, $\mathcal{L}_p^w(G)$ – алгебра с весом, удовлетворяющим условию (5). Тогда функция w подобна полумультипликативной функции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.5 функцию w можно считать непрерывной, а по лемме 2.3 функция L , заданная равенством (5), ограничена на любом компакте. Пусть $D = D^{-1}$ – компакт положительной меры, $L(r) \leq N$ при $r \in D$. Тогда для любых $s \in G$, $r \in D$ верны неравенства

$$\frac{w(s)}{N} \leq w(sr) \leq Nw(s). \quad (11) \quad \{\text{eq11}$$

Возьмем теперь произвольные $s, t \in G$ и воспользуемся неравенством (7) с $A = B = D$. Мы получим, что

$$\mu(D) \|I_{stD}\| \leq \|I_{sD}\| \cdot \|I_{tD^2}\|,$$

откуда благодаря неравенству (11)

$$\frac{\mu(D)^{1+1/p} w(st)}{N} \leq N^2 \mu(D)^{1/p} \mu(D^2)^{1/p} w(s) w(t),$$

т.е. $w(st) \leq C_1 w(s) w(t)$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. На дискретной группе вес любой алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ при всех $p \geq 1$ полумультипликативен. Неравенство (1) получается из тождества $I_{st} = I_s * I_t$ переходом к нормам индикаторных функций.

4. Аппроксимативные единицы. В алгебрах $\mathcal{L}_p^w(G)$, как и в алгебрах без веса, есть единица только при условии, что группа G дискретна. В классическом случае алгебры $\mathcal{L}_p(G)$ всегда обладают аппроксимативными единицами. Для весовых алгебр достаточным условием существования аппроксимативных единиц служит условие умеренного роста, см. теорему 4.1. При нарушении этого условия утверждение теоремы может быть неверно, см. пример 4.1. Ограниченных аппроксимативных единиц инвариантные алгебры $\mathcal{L}_p^w(G)$ на недискретной группе не имеют (теорема 4.2). Следовательно, эти алгебры не аменабельны [11]. Теоремы этого пункта доказаны для левых аппроксимативных единиц, но для правых верны аналогичные утверждения с перестановкой s и t в условии (5).

ЛЕММА 4.1. Пусть $\mathcal{L}_p^w(G)$, $p \geq 1$, – инвариантная алгебра. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{L}_p^w(G)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность единицы U , что при всех $t \in U$ $\|f - {}^t f\|_{p,w} < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $f \in \mathcal{L}_p^w(G)$ – финитная функция, $F = \text{supp } f$. Фиксируем произвольную предкомпактную окрестность единицы U , тогда $\text{supp } {}^t f \subset UF$ при $t \in U$. По лемме 2.5 можно считать функцию w непрерывной, а значит, она ограничена на любом компакте, так что $C = \sup_{UF} w < \infty$. Значит,

$$\|f - {}^t f\|_{p,w} = \left(\int_{UF} |f(x) - f(tx)|^p w^p(x) dx \right)^{1/p} \leq C \|f - {}^t f\|_p,$$

где последняя норма меньше ε при t из достаточно малой окрестности единицы $V \subset U$.

Пусть теперь функция $f \in \mathcal{L}_p^w(G)$ произвольна. Для любого $\varepsilon > 0$ ее можно приблизить финитной функцией $\varphi \in \mathcal{L}_p^w(G)$, $\|f - \varphi\|_{p,w} < \varepsilon$ (лемма 2.2). Фиксируем опять симметричную окрестность единицы U с компактным замыканием. По лемме 2.3 функция L , определенная формулой (5), ограничена на любом компакте, так что $D = \sup_U L < \infty$. Тогда согласно равенству (6) при $t \in U$

$$\|{}^t f - {}^t \varphi\|_{p,w} = \|{}^t(f - \varphi)\|_{p,w} \leq L_{t^{-1}} \|f - \varphi\|_{p,w} \leq D \|f - \varphi\|_{p,w}.$$

Теперь при $t \in U$

$$\|f - {}^t f\|_{p,w} \leq \|f - \varphi\|_{p,w} + \|\varphi - {}^t \varphi\|_{p,w} + \|{}^t f - {}^t \varphi\|_{p,w} < \varepsilon + D\varepsilon + C\|\varphi - {}^t \varphi\|_p,$$

что меньше $\varepsilon(1 + C + D)$ при t из достаточно малой окрестности единицы $V \subset U$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{L}_p^w(G)$, $p \geq 1$, – алгебра с весом w , удовлетворяющим условию (5). Множество функций $\xi_\nu = I_\nu/\mu(\nu)$, где ν пробегает множество предкомпактных окрестностей единицы, является левой аппроксимативной единицей в алгебре $\mathcal{L}_p^w(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что все ξ_ν содержатся в $\mathcal{L}_p^w(G)$ (лемма 2.2). Сходимость $\xi_\nu * f \rightarrow f$ для любой функции $f \in \mathcal{L}_p^w(G)$ доказывается стандартным образом. По лемме 4.1 существует такая окрестность единицы U , что $\|f - {}^{t^{-1}} f\|_{p,w} < \varepsilon$ при $t \in U$. Оценим норму $\|\xi_\nu * f - f\|_{p,w}$, $\nu \subset U$, через значения функционалов из сопряженного к $\mathcal{L}_p^w(G)$ пространства $\mathcal{L}_q^{w^{-1}}(G)$: для каждой функции $\varphi \in \mathcal{L}_q^{w^{-1}}(G)$

имеем оценку

$$\begin{aligned} |\langle \xi_\nu * f - f, \varphi \rangle| &= \left| \int_G [(\xi_\nu * f)(x) - f(x)] \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_G \int_\nu \frac{|f(t^{-1}x) - f(x)|}{\mu(\nu)} dt |\varphi(x)| dx \leq \frac{1}{\mu(\nu)} \int_\nu \langle |t^{-1}f - f|, |\varphi| \rangle dt \\ &\leq \sup_{t \in U} \|t^{-1}f - f\|_{p,w} \|\varphi\|_q, w^{-1} < \varepsilon \|\varphi\|_q, w^{-1}, \end{aligned}$$

т.е. $\|t^{-1}f - f\|_{p,w} < \varepsilon$ и, тем самым, теорема доказана.

ПРИМЕР 4.1. Если вес не удовлетворяет условию (5), утверждение теоремы 4.1 может быть неверно. Контрпримером может служить следующая алгебра, подобная алгебре из примера 2.1. Пусть $G = \mathbb{R}$, $p = 2$. Для единообразия обозначим $\bar{n} = \max(|n|, 1)$ и определим вес так:

$$w(t) = \begin{cases} \bar{n}, & t \in [n, n + 1/\bar{n}^2), \\ \bar{n}^2, & t \in [n + 1/\bar{n}^2, n + 1). \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что свертки с индикаторами окрестностей нуля не приближают функцию $f = \sum n^{-1} I_{[n, n+n^{-2}]}$. Можно показать также, что в этой алгебре никакая направленность неотрицательных функций не является аппроксимативной единицей.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть группа G не дискретна, $p > 1$ и пространство $\mathcal{L}_p^w(G)$ – инвариантная алгебра. Тогда в этой алгебре нет ограниченной левой аппроксимативной единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в алгебре $\mathcal{L}_p^w(G)$ имеется ограниченная левая аппроксимативная единица. Тогда [3; теорема 32.22] $\mathcal{L}_p^w(G) \circ X$ – замкнутое линейное подпространство в X для любого левого модуля X над $\mathcal{L}_p^w(G)$ с умножением $\circ$. Возьмем $X = \mathcal{L}_q^{w^{-1}}(G)$. Это левый модуль над $\mathcal{L}_p^w(G)$ при умножении $f \circ g = g * f^\nabla$, $f^\nabla(x) = f(x^{-1})$.

Покажем, что множество $Y = \mathcal{L}_p^w(G) \circ X$ плотно в X . Для этого достаточно показать, что замыкание Y содержит все индикаторы компактных множеств. Пусть $A \subset G$ – компакт. Возьмем произвольную предкомпактную окрестность единицы $V = V^{-1}$, тогда $I_V^\nabla = I_{V^{-1}} \in \mathcal{L}_p^w(G)$, $I_{AV} \in X$ благодаря предкомпактности множеств V и AV . Положим $f_V = I_{AV} * I_V / \mu(V) = I_V^\nabla \circ I_{AV} / \mu(V)$, $f_V \in Y$. Легко проверить, что

$$I_A \leq f_V \leq I_{AV^2},$$

откуда $\|I_A - f_V\| \leq \|I_A - I_{AV^2}\|$. Но при этом

$$\|I_A - I_{AV^2}\|_{p,w}^p = \int_{AV^2 \setminus A} w^p(t) dt,$$

что стремится к нулю при $\mu(V) \rightarrow 0$ благодаря локальной интегрируемости функции w^p . Значит, I_A содержится в замыкании множества Y и, следовательно, $Y = X$.

Итак, для каждой функции $\varphi \in Y$ найдутся такие $f \in \mathcal{L}_q^{w^{-1}}(G)$, $g \in \mathcal{L}_p^w(G)$, что $\varphi = g \circ f = f * g^\nabla$. Но тогда

$$|\varphi(x)| = |(f * g^\nabla)(x)| = \left| \int f(t) g(x^{-1}t) dt \right| \leq \|f\|_{q,w^{-1}} \|x^{-1}g\|_{p,w} \leq L_x \|f\|_{q,w^{-1}} \|g\|_{p,w}.$$

Следовательно, $\varphi/L \in \mathcal{L}_\infty(G)$. Так как $Y = \mathcal{L}_q^{w^{-1}}(G) = w\mathcal{L}_q(G)$, то отсюда для всех $\psi \in \mathcal{L}_q(G)$ получаем $\psi w/L \in \mathcal{L}_\infty$. Поскольку на любом компакте F функция w отделена от нуля, а L ограничена, $\mathcal{L}_q(F) \subset \mathcal{L}_\infty(F)$, что возможно только при конечном F . Противоречие с предположением о том, что G не дискретна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматгиз, М., 1960.
- [2] J. Wermer, "On a class of normed rings", *Ark. Mat.*, **2**:6 (1954), 537–551.
- [3] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, Наука, М., 1975; т. II, Мир, М., 1975.
- [4] Ю. Н. Кузнецова, "Весовые L_p -алгебры на группах", *Функц. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 82–85.
- [5] R. E. Edwards, "The stability of weighted Lebesgue spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93**:3 (1959), 369–394.
- [6] H. G. Feichtinger, "Gewichtsfunktionen auf lokalkompakten Gruppen", *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*, **188**:8–10 (1979), 451–471.
- [7] S. Grabiner, "Weighted convolution algebras as analogues of Banach algebras of power series", *Radical Banach Algebras and Automatic Continuity*, Long Beach, Calif., 1981, Lecture Notes in Math., **975**, Springer, Berlin–New York, 1983, 295–300.
- [8] A. Bruckner, "Differentiation of integrals", *Amer. Math. Monthly*, **78**:9, Part II (1971), 51 p..
- [9] A. Ionescu Tulcea, C. Ionescu Tulcea, *Topics in the theory of lifting*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **48**, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [10] G. I. Gaudry, "Multipliers of weighted Lebesgue and measure spaces", *Proc. London Math. Soc.* (3), **19** (1969), 327–340.
- [11] Volker Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Math., **1774**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Ю. Н. Кузнецова

ВИНИТИ, Отдел математики

E-mail: jkuzn@mccme.ru

Поступило

30.03.2007

Исправленный вариант

04.03.2008