Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, О перестановочных отображениях, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 389–393

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3867>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 03:12:27

О перестановочных отображениях

В. А. Колмыков

Исследуется мощность централизатора элемента в бесконечных симметрических полугруппах.

Библиография: 3 названия.

Введение. Пусть M – некоторое множество. Отображения $f, g: M \rightarrow M$ называются *перестановочными* друг с другом, если $f(g(x)) = g(f(x))$ для любого $x \in M$.

В [1] для конечного множества M описаны все отображения, перестановочные с произвольным отображением $g: M \rightarrow M$.

В [2] рассматривался случай, когда конфинальный характер множества M больше, чем $\aleph_0$, а g – инъекция, отличная от тождественного отображения. Было доказано, что множество функций, перестановочных с g , равномощно множеству неперестановочных.

В настоящей статье мы обобщаем это утверждение, снимая условие инъективности.

1. Формулировка и доказательство результата. Конфинальным характером $\text{cf}(\alpha)$ кардинального числа α называется наименьшее из кардинальных чисел γ таких, что $\alpha = \sum \{\beta_t : t \in T\}$, где $\beta_t < \alpha$ для любого $t \in T$ и $|T| = \gamma$. Конфинальным характером множества называется конфинальный характер его мощности.

ТЕОРЕМА. Если $\text{cf}(M) > \aleph_0$ и $g: M \rightarrow M$ – отображение, отличное от тождественного, то множество отображений, перестановочных с g , равномощно множеству неперестановочных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Со всяким множеством M связана симметрическая полугруппа $\mathcal{T}(M)$, состоящая из всевозможных отображений $M \rightarrow M$ (бинарная операция – суперпозиция). Через $\text{Cent}(g)$ обозначим централизатор элемента g в полугруппе $\mathcal{T}(M)$. Доказательство теоремы разобьем на пять этапов.

1. Если M бесконечно и $g: M \rightarrow M$ – нетождественное отображение, то

$$|\mathcal{T}(M) \setminus \text{Cent}(g)| \geq |M|^{|M|}.$$

Докажем это.

Во множестве M существуют a и b такие, что $g(a) \neq a$, $b \neq a$, $b \neq g(a)$ и $b \neq g^2(a)$. Рассмотрим множество D отображений $f: M \rightarrow M$ таких, что $f(a) = g(a)$ и $f(g(a)) = b$. Тогда $f(g(a)) = b \neq g^2(a) = g(f(a))$, поэтому $f \notin \text{Cent}(g)$.

Итак, $\mathcal{T}(M) \setminus \text{Cent}(g) \supseteq D$ и $|D| \geq |M|^{|M|}$.

2. Описание централизатора отображения удобно проводить на языке теории графов. *Ориентированный граф (орграф)* – это пара (V_0, V_1) , где $V_1 \subseteq V_0^2$. Элемент $(u, v) \in V_1$ обозначается $\overrightarrow{uv}$ и называется *ориентированным ребром* (или *стрелкой*) с началом u и концом v . Если $G = (V_0, V_1)$ – орграф, то множества V_0 и V_1 обозначаются $V_0(G)$ и $V_1(G)$ соответственно.

Всякому отображению $g: M \rightarrow M$ соответствует орграф O_g со множеством вершин M и множеством стрелок $\{(x, g(x))\}_{x \in M}$. Если орграф есть O_g для некоторого отображения g , то такой орграф называется *функциональным орграфом*.

Эндоморфизм f орграфа G – это отображение $f: V_0(G) \rightarrow V_0(G)$ такое, что наличие стрелки $\overrightarrow{uv}$ влечет наличие стрелки $f(u)f(v)$. Множество всех эндоморфизмов орграфа G обозначается $\text{End}(G)$. Очевидно, что централизатор $\text{Cent}(g)$ – это $\text{End}(O_g)$.

3. Приведем локальное и глобальное описания функциональных орграфов.

Степень захода (соответственно *исхода*) $\deg_+ v$ (соответственно $\deg_- v$) вершины v орграфа – это мощность множества стрелок с концом (соответственно началом) v . Отметим, что стрелка-петля $\overrightarrow{vv}$ дает вклад 1 и в степень захода, и в степень исхода.

Локальное описание функциональных орграфов: орграф является функциональным тогда и только тогда, когда степень исхода каждой вершины равна 1.

Глобальное описание функциональных орграфов имеется в § 4.4 книги [3]. Это описание (хотя и несложное) неудобно для нас, так как использует сложную терминологию, знакомство с которой (здесь или по книге) перегрузило бы читателя. Мы воспользуемся более простой терминологией, приспособленной к доказательству нашей теоремы.

Орграф называется *связным*, если при замене всех ориентированных ребер неориентированными получающийся граф связан (в естественном смысле). Для описания всех функциональных орграфов достаточно описать все связные функциональные орграфы.

Пусть n – натуральное число. *Контур $\vec{C}_n$* – это орграф со множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$ и множеством стрелок $\{\overrightarrow{v_1 v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1} v_n}, \overrightarrow{v_n v_1}\}$ (если $n = 1$, то $V_0 = \{v_1\}$, $V_1 = \{\overrightarrow{v_1 v_1}\}$). *Лучом $\vec{N}$* назовем орграф со множеством вершин $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и множеством стрелок $\{\overrightarrow{v_i v_{i+1}}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Включение $G \subseteq H$ орграфов означает включения $V_0(G) \subseteq V_0(H)$ и $V_1(G) \subseteq V_1(H)$. Говорят, что орграф G содержит контур (соответственно луч), если $\vec{C}_n \subseteq G$ (соответственно $\vec{N} \subseteq G$).

Орграф называется *ордеревом*, если при замене всех ориентированных ребер неориентированными получается дерево (т.е. связный граф без циклов, в частности, без петель). *Корневое ордеревое* – это ордеревое, в котором отмечена одна вершина, называемая *корнем*. *Расстояние между вершинами в ордереве* – это расстояние между этими вершинами в дереве, получающемся заменой ориентированных ребер неориентированными. *Высота $h_{\dot{T}}(v)$ вершины v корневого ордереве $\dot{T}$* – это расстояние от v до корня. Будем говорить, что корневое ордеревое $\dot{T}$ ориентировано к корню, если $h_{\dot{T}}(u) = h_{\dot{T}}(v) + 1$ для любого $\overrightarrow{uv} \in V_1(\dot{T})$. В частности, одновершинное корневое ордеревое $\dot{P}_1$ ориентировано к корню.

Пусть G – орграф, $v \in V_0(G)$, $\dot{T}$ – корневое ордеревое. Слова “к вершине v приклеим корневое ордеревое $\dot{T}$ ” означают, что в дизъюнктном объединении орграфов G и $\dot{T}$ произведено отождествление вершины v и корня ордереве $\dot{T}$, после чего отмечен-

ность вершины забыта; таким образом, получился некоторый новый (не корневой) оргграф. Отметим, однако, что если $\dot{T} = \dot{P}_1$, то полученный оргграф совпадает с G .

Глобальное описание связных функциональных оргграфов таково. Возьмем оргграф $\vec{C}_n$ или $\vec{N}$. Ко всем его вершинам приклеим некоторые корневые ордеревья, ориентированные к корню. Получим связный функциональный оргграф. Наоборот, всякий связный функциональный оргграф можно получить таким образом. Это описание интуитивно ясно. Формальное же доказательство имеется в упомянутой книге [3].

4. *Эндоморфизм корневого ордеревья* – это эндоморфизм соответствующего ордеревья, переводящий корень в корень. Множество всех эндоморфизмов корневого ордеревья $\dot{T}$ обозначается $\text{End}(\dot{T})$.

ЛЕММА. Пусть корневое ордеревье $\dot{T}$ ориентировано к корню, и этот корень имеет степень захода 2. Тогда $|\text{End}(\dot{T})| \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через v_0 обозначим корень ордеревья $\dot{T}$, а через A_0 – множество всех вершин, имеющих степень захода 0. Положим $h = h_{\dot{T}}$. Нам надо построить некоторый нетождественный эндоморфизм f .

Сначала рассмотрим случай, когда $A_0 \neq \emptyset$. Через k обозначим наименьшую высоту вершин из A_0 . Пусть $u_k \in A_0$ и $h(u_k) = k$. Очевидно, что существует подмножество $\{u_k, u_{k-1}, \dots, u_s\} \subset V_0(\dot{T})$ такое, что $\deg_+ u_s \geq 2$ и $\overrightarrow{u_i u_{i-1}} \in V_1(\dot{T})$ для любого $i = k, k-1, \dots, s-1$. Очевидно, что $h(u_i) = i$. Так как k – минимум высот вершин из A_0 , существует подмножество $\{v_k, v_{k-1}, \dots, v_s\} \subset V_0(\dot{T})$ такое, что $v_k \neq u_k$, $v_s = u_s$ и $\overrightarrow{v_i v_{i-1}} \in V_1(\dot{T})$ для любого $i = k, k-1, \dots, s-1$. Очевидно, что $h(v_i) = i$. Эндоморфизм f определим следующим образом:

$$f(v) = \begin{cases} v, & \text{если } v \notin \{u_k, \dots, u_s\}, \\ v_i, & \text{если } v = u_i. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $A_0 = \emptyset$. Тогда существует подмножество $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}_0} \subset V_0(\dot{T})$ такое, что $\overrightarrow{v_i v_{i-1}} \in V_1(\dot{T})$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Положим $f(v) = v_{h(v)}$ для любой вершины $v \in V_0(\dot{T})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть корневое ордеревье $\dot{T}$ ориентировано к корню, и этот корень имеет бесконечную степень захода m . Тогда $|\text{End}(\dot{T})| \geq 2^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем то, что $m = 2m$.

5. Пусть $\text{cf}(M) > \aleph_0$ и $g: M \rightarrow M$. Покажем, что $|\text{End}(O_g)| = 2^{|M|}$.

Если $n \in \mathbb{N}$, то через L_n обозначим множество всех вершин, каждая из которых принадлежит некоторому контуру длины n в оргграфе O_g . В каждой компоненте связности оргграфа O_g , не содержащей контура, отметим некоторый луч. Через L_0 обозначим множество всех вершин, каждая из которых принадлежит некоторому из отмеченных лучей.

На множестве $V_0(O_g)$ определим функцию H высоты следующим образом. Для вершин множества $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L_n$ и только для них положим $H(v) = 0$. К каждой вершине, для которой $H(v) = 0$ приклеено некоторое корневое ордеревье, которое обозначим $\dot{T}_v$. Если $u \in V_0(\dot{T}_v)$, то положим $H(u) = h_{\dot{T}_v}(u)$.

Через $V_0(O_g)_s$ обозначим множество всех вершин оргграфа O_g , для которых выполнено $H(v) = s$.

Так как $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} |V_0(O_g)_i| = |M|$ и $\text{cf}(M) > \aleph_0$, то $|V_0(O_g)_i| = |M|$ для некоторого i . Пусть k – наименьшее i с таким свойством.

Случай 1. Пусть $k = 0$. Так как $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} |L_i| = |M|$ и $\text{cf}(M) > \aleph_0$, то $|L_l| = |M|$ для некоторого $l \in \mathbb{N}_0$.

Пусть $l = 1$. Если K – компонента, содержащая цикл длины 1, то множество $V_0(K) \cap L_1$ состоит из одного элемента, который будем обозначать v_K . Для каждого отображения $\phi: L_1 \rightarrow L_1$ определим $f_\phi \in \text{End}(O_g)$ следующим образом. Если вершина u принадлежит компоненте, содержащей цикл длины $\neq 1$, то $f_\phi(u) = u$. Если вершина u принадлежит компоненте, содержащей один из отмеченных лучей, то $f_\phi(u) = u$. Если вершина u принадлежит компоненте K , содержащей цикл длины 1, то $f_\phi(u) = \phi(v_K)$. Очевидно, что если $\phi \neq \psi$, то $f_\phi \neq f_\psi$. Поэтому

$$|\text{End}(O_g)| \geq |L_1|^{|L_1|} = |M|^{|M|}.$$

Пусть $l \neq 1$. Через $\mathcal{K}$ обозначим множество всех компонент, каждая из которых содержит хотя бы одну вершину из L_l . Очевидно, что $|\mathcal{K}| \geq \aleph_0$. Более того, $|\mathcal{K}| = |M|$. Действительно,

$$|M| \geq |\mathcal{K}| = |\mathcal{K}| \aleph_0 \geq |L_l| = |M|.$$

Для каждого подмножества $U \subseteq \mathcal{K}$ определим $f_U \in \text{End}(O_g)$ следующим образом. Если $u \in V_0(K)$ и $K \notin U$, то $f_U(u) = u$. Если $u \in V_0(K)$ и $K \in U$, то $f_U(u) = g(u)$. Очевидно, что если $U \neq W$, то $f_U \neq f_W$. Поэтому

$$|\text{End}(O_g)| \geq 2^{|\mathcal{K}|} = 2^{|M|}.$$

Случай 2. Пусть $k \neq 0$. На множестве $V_0(O_g)_k$ определим отношение эквивалентности: $u \sim v$ тогда и только тогда, когда $g(u) = g(v)$. Множество классов эквивалентности имеет мощность $|V_0(O_g)_{k-1}|$, которая меньше, чем $|M|$. Пусть U_0 (соответственно U_1) – множество конечных (соответственно бесконечных) классов. Заметим, что

$$|U_0| \leq |U_0| + |U_1| = |V_0(O_g)_{k-1}| < |M|.$$

Если U – некоторое множество классов, то через $\bar{U}$ обозначим множество $\bigcup_{A \in U} A$.

Покажем, что $|\bar{U}_1| = |M|$. Это очевидно, если U_0 конечно. Пусть U_0 бесконечно. Тогда

$$|M| = |\bar{U}_0| + |\bar{U}_1| \leq \aleph_0 |U_0| + |\bar{U}_1| = |U_0| + |\bar{U}_1|,$$

но $|U_0| < |M|$. Поэтому $|\bar{U}_1| = |M|$.

Пусть $A \in U_1$. Через $\text{End}_A(O_g)$ обозначим множество всех эндоморфизмов орграфа O_g , оставляющих неподвижными все вершины множества

$$V_0(O_g) \setminus (A \cup g^{-1}(A) \cup g^{-1}(g^{-1}(A)) \cup \dots).$$

Орграф O_g является результатом склейки некоторого орграфа и корневого дерева, ориентированного к корню, причем степень захода этого корня равна $|A|$. Из следствия леммы вытекает, что $|\text{End}_A(O_g)| \geq 2^{|A|}$.

Отсюда

$$|M|^{|M|} = 2^{|M|} \geq |\text{End}(O_g)| \geq \prod_{A \in U_1} 2^{|A|} = 2^{|\bar{U}_1|} = 2^{|M|}.$$

Теорема доказана.

2. Замечания. 1) Неравенство $\text{cf}(M) > \aleph_0$ является условием общего положения. Можно сказать, что “большинство” множеств ему удовлетворяют. Значит, в большинстве случаев, перестановочность отображений (вопреки интуиции) не редкость.

2) Мы предполагаем, что в доказанной теореме условие $\text{cf}(M) > \aleph_0$ можно заменить условием $|M| > \aleph_0$, но доказать это пока не можем.

3) Если множество M счетно, то легко привести пример (см. теорему 1 из [2]) отображения $g: M \rightarrow M$ такого, что множество отображений, перестановочных с ним, счетно, а неперестановочных – континуально.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.А. Лисковец, В.З. Фейнберг, “О перестановочности отображений”, *Докл. АН БССР*, **7:6** (1963), 366–369.
- [2] В.А. Колмыков, “О соотношении коммутативности в симметрической полугруппе”, *Сиб. матем. журн.*, **45:5** (2004), 1130–1135.
- [3] О. Оре, *Теория графов*, Наука, М., 1968.

В. А. Колмыков

Научно-исследовательский институт математики,
Воронежский государственный университет

Поступило

06.10.2004

Исправленный вариант

05.09.2006