Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Г. Кирьяцкий, Точные оценки коэффициентов Ньютона однолистных функций, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 724–731

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3869>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 02:41:10

Точные оценки коэффициентов Ньютона однолистных функций

Э. Г. Кирьяцкий

В данной работе рассматривается класс однолистных голоморфных в единичном круге функций $F(z)$, нормированных условиями $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Установлены оценки для модулей коэффициентов Ньютона этих функций. Показано, что эти оценки являются точными.

Библиография: 7 названий.

Введение. Пусть E – единичный круг $|z| < 1$. Разделенную разность n -го порядка голоморфной в E функции $F(z)$ по точкам $z_0, \dots, z_n \in E$ можно записать с помощью формулы (см. [1])

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in E, \\ 0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq t_1, \quad \dots, \quad 0 \leq t_n \leq t_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Точки $z_0, \dots, z_n \in E$ могут совпадать между собой. Если $z_0 = \dots = z_n = 0$, то разделенная разность (1) превращается в коэффициент Маклорена. Если $z_0 = \dots = z_n = \xi$, то получим коэффициент Тейлора. В общем случае разделенную разность (1) можно назвать *коэффициентом Ньютона*.

Обозначим через S класс однолистных в E функций $F(z)$ вида

$$F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k.$$

Л. де Бранжем (см. [2]) была положительно решена гипотеза Л. Бибераха о коэффициентах Маклорена функций из класса S .

ТЕОРЕМА 1. Если $F(z) \in S$, то

$$\frac{1}{n!} |F^{(n)}(0)| \leq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Знак равенства в (3) для любого $n \geq 2$ реализуется только функциями

$$F(z) = \frac{z}{(1 - e^{-i\alpha} z)^2} \in S, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (4)$$

Применяя теорему 1, Александров (см. [3], [4]) осуществил переход от точных оценок коэффициентов Маклорена к точным оценкам коэффициентов Тейлора для функций из класса S .

ТЕОРЕМА 2. Если $F(z) \in S$, то

$$\frac{1}{n!} |F^{(n)}(z)| \leq \frac{n + |z|}{(1 - |z|)^{n+2}} \quad \forall z \in E, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Знак равенства в (5) для любого $n \geq 0$ и фиксированного $z_0 = |z_0|e^{i\alpha_0} \neq 0$ из E реализуется только функцией вида (4), где $\alpha = \alpha_0$.

Заметим, что теорему 2 также доказал в 1926 г. Ландау, однако в предположении справедливости гипотезы Бибераха (см. [5]).

Автор этой заметки осуществил переход от точных оценок коэффициентов Тейлора к точным оценкам коэффициентов Ньютона для функций из класса S . Целью нашей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Если $F(z) \in S$, то

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| \leq \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1 - |z_m|} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1 - |z_m|} \quad (6)$$

при любом $n \geq 0$ и любых $z_0, \dots, z_n \in E$.

Знак равенства в (6) имеет место тогда и только тогда, когда $z_m = |z_m|e^{i\alpha}$, $m = 0, 1, \dots, n$, где $0 \leq \alpha < 2\pi$, а функция $F(z)$ имеет вид (4). При этом

$$\left[\frac{z}{(1 - e^{-ia}z)^2}; |z_0|e^{i\alpha}, \dots, |z_n|e^{i\alpha} \right] = e^{-i(n-1)\alpha} \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1 - |z_m|} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1 - |z_m|}.$$

Если $z_0 = \dots = z_n = 0$, то неравенство (6) сразу следует из теоремы 1. Если $z_0 = \dots = z_n$, то неравенство (6) легко следует из теоремы 2. Поэтому нам надо будет доказать теорему 3 для случая, когда $n \geq 1$ и не все $z_0, \dots, z_n \in E$ совпадают между собой.

1. Пусть $M(r)$ – непрерывная в промежутке $[0, 1)$ функция, имеющая на этом промежутке строго возрастающую непрерывную n -ю производную $M^{(n)}(r)$. Тогда для функции $M(r)$ справедлива формула, аналогичная формуле (1), а именно (см. [1]):

$$[M(r); r_0, \dots, r_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho) dt_1 \dots dt_n,$$

где $r_0, \dots, r_n$ принадлежат промежутку $0 \leq r < 1$ и

$$\rho = r_0 + t_1(r_1 - r_0) + \dots + t_n(r_n - r_{n-1}),$$

$$0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq t_1, \quad \dots, \quad 0 \leq t_n \leq t_{n-1}.$$

Пусть T_n – множество точек $(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n$ подчинены условиям (2), $L(\gamma)$ – луч, выходящий из начала координат под углом γ к вещественной оси, $|z_m| = r_m$, $m = 0, 1, \dots, n$, и $\bar{N}$ – наименьший отрезок, содержащий все точки r_m , $m = 0, 1, \dots, n$. Обозначим также через Q наименьший выпуклый многоугольник (который может вырождаться в отрезок), расположенный в круге E и содержащий все точки $z_0, \dots, z_n$.

ЛЕММА 1. Справедливы следующие утверждения.

1) Для любой точки $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ и любых $z_0, \dots, z_n \in E$ имеют место неравенства $|\zeta| \leq \rho$ и $\rho < 1$, где

$$\begin{aligned}\zeta &= z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in E, \\ \rho &= r_0 + t_1(r_1 - r_0) + \dots + t_n(r_n - r_{n-1}).\end{aligned}$$

2) Если все точки $z_0, \dots, z_n \in E$ и расположены на луче $L(\gamma)$, то для любой точки $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ имеет место равенство $|\zeta| = \rho$.

3) Пусть $z_0, \dots, z_n \in E$ и в какой-либо точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ имеет место равенство $|\zeta| = \rho$, причем числа $t_1, \dots, t_n$ попарно различны и отличны от нуля и единицы. Тогда все точки $z_0, \dots, z_n$ лежат на некотором луче $L(\gamma)$.

4) Если точка $(t_1, \dots, t_n)$ пробегает все точки из T_n , то при фиксированных $z_0, \dots, z_n \in E$ точка ζ пробегает все точки из $Q \subset E$, а точка ρ пробегает все точки из отрезка $\overline{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидность пунктов 1) и 2) леммы 1 не вызывает сомнений. Рассмотрим пункты 3) и 4) леммы 1. Пусть $z_0, \dots, z_n \in E$ и в какой-либо точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$, где числа $t_1, \dots, t_n$ попарно различны и отличны от нуля и единицы, имеет место равенство $|\zeta| = \rho$, т.е.

$$\begin{aligned}|\zeta| &= |(1 - t_1)z_0 + (t_1 - t_2)z_1 + \dots + (t_{n-1} - t_n)z_{n-1} + t_n z_n| \\ &= \rho = (1 - t_1)r_0 + (t_1 - t_2)r_1 + \dots + (t_{n-1} - t_n)r_{n-1} + t_n r_n.\end{aligned}$$

Так как $|z_m| = r_m$, $m = 0, 1, \dots, n$, и

$$(1 - t_1) > 0, \quad (t_1 - t_2) > 0, \quad \dots, \quad (t_{n-1} - t_n) > 0, \quad t_n > 0,$$

легко видеть, что точки $z_0, \dots, z_n$ из E лежат на некотором луче $L(\gamma)$. Мы доказали пункт 3) леммы 1. Далее, пусть $z_0, \dots, z_n \in E$ и положим

$$\tau_0 = 1 - t_1, \quad \tau_1 = t_1 - t_2, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = t_{n-1} - t_n, \quad \tau_n = t_n. \quad (7)$$

Тогда

$$\zeta = \tau_0 z_0 + \tau_1 z_1 + \dots + \tau_n z_n \quad \text{и} \quad \rho = \tau_0 r_0 + \tau_1 r_1 + \dots + \tau_n r_n, \quad (8)$$

причем

$$\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_n = 1 \quad \text{и} \quad \tau_0 \geq 0, \quad \tau_1 \geq 0, \quad \dots, \quad \tau_n \geq 0. \quad (9)$$

Множество точек $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$ с условием (7) обозначим через H . Рассматривая (7)–(9), приходим к выводу, что если точка $(t_1, \dots, t_n)$ пробегает все точки из T_n , то точка $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$ пробегает все точки из H . Кроме того, известно (см. [1], [6]), что если точка $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$ пробегает все точки из H , то при фиксированных $z_0, \dots, z_n \in E$ точка ζ пробегает все точки из Q . При этом точка ρ пробегает все точки отрезка $\overline{N}$. Мы доказали пункт 4) леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $F(z)$ – голоморфная в E функция и $M(r)$ – непрерывная на промежутке $[0, 1)$ функция, имеющая на этом промежутке строго возрастающую непрерывную n -ю производную $M^{(n)}(r)$. Если $n \geq 1$ и

$$|F^{(n)}(z)| \leq M^{(n)}(r) \quad \forall |z| = r < 1, \quad (10)$$

то справедливы следующие утверждения.

1) При любых $z_0, \dots, z_n \in E$ выполняется неравенство

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| \leq [M(r); r_0, \dots, r_n], \quad (11)$$

где $|z_0| = r_0, \dots, |z_n| = r_n$.

2) Пусть $F^{(n)}(z)$ не равна тождественно постоянной и не все точки $z_0, \dots, z_n \in E$ совпадают между собой. Для того, чтобы при $z_0, \dots, z_n \in E$ в (11) имело место равенство

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| = [M(r); r_0, \dots, r_n], \quad (12)$$

необходимо и достаточно существование вещественных чисел α и β , удовлетворяющих следующим условиям:

- а) все точки $z_0, \dots, z_n$ лежат на радиусе круга E , наклоненном под углом α к вещественной оси, т.е. $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $z = 0, 1, \dots, n$;
- б) выполняется равенство

$$F^{(n)}(r e^{i\alpha}) = M^{(n)}(r) e^{i\beta}$$

для любого r , взятого из $\bar{N}$.

3) Пусть $F^{(n)}(z) \equiv c$ и не все точки $z_0, \dots, z_n \in E$ совпадают между собой. Для того, чтобы при $z_0, \dots, z_n \in E$ имело место равенство (3), необходимо и достаточно, чтобы

$$M^{(n)}(r) \equiv |c|$$

при любом r , взятом из $\bar{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1) леммы 2. При любых $z_0, \dots, z_n \in E$ имеем

$$\begin{aligned} |[F(z); z_0, \dots, z_n]| &= \left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n \right| \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} |F^{(n)}(\zeta)| dt_1 \dots dt_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Пользуясь принципом максимума модуля для голоморфных функций, пунктом 1) леммы 1 и неравенством (10), получим

$$|F^{(n)}(\zeta)| \leq \max_{|z|=|\zeta|} |F^{(n)}(z)| \leq \max_{|z|=\rho} |F^{(n)}(z)| \leq M^{(n)}(\rho) \quad (14)$$

для любой точки $(t_1, \dots, t_n) \in T$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} |F^{(n)}(\zeta)| dt_1 \dots dt_n &\leq \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho) dt_1 \dots dt_n \\ &= [M(r); r_0, \dots, r_n]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13) и (15) следует (11), что и доказывает утверждение 1) леммы 2.

Докажем утверждение 2) леммы 2. *Необходимость.* Пусть $F^{(n)}(z)$ не является константой и для $z_0, \dots, z_n \in E$, среди которых есть различные, имеет место равенство (12). Тогда, объединив (13) и (15), получим

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| = \left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} |F^{(n)}(\zeta)| dt_1 \dots dt_n \\
&\leq \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho) dt_1 \dots dt_n = [M(r); r_0, \dots, r_n]. \quad (16)
\end{aligned}$$

Из (12), (16) следуют два равенства

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} |F^{(n)}(\zeta)| dt_1 \dots dt_n = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho) dt_1 \dots dt_n, \quad (17)$$

$$\left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n \right| = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} |F^{(n)}(\zeta)| dt_1 \dots dt_n. \quad (18)$$

Заметим, что $|F^{(n)}(\zeta)|$ и $M^{(n)}(\rho)$ являются непрерывными в области T_n функциями от $t_1, \dots, t_n$. Тогда, рассматривая (14) и (17), приходим к выводу, что

$$|F^{(n)}(\zeta)| = M^{(n)}(\rho) \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n. \quad (19)$$

Если точка $(t_1, \dots, t_n)$ пробегает все точки из T_n , то согласно пункту 4) леммы 1 при фиксированных $z_0, \dots, z_n \in E$ точка

$$\zeta = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1})$$

пробегает все точки из Q , а соответствующая ей точка

$$\rho = r_0 + t_1(r_1 - r_0) + \dots + t_n(r_n - r_{n-1})$$

пробегает все точки из $\bar{N}$. Поэтому равенство (19) имеет место при любом ζ из Q и соответствующем ρ из $\bar{N}$. Далее, согласно пункту 1) леммы 1 имеем $|\zeta| \leq \rho$. Если предположить, что в некоторой точке $(t_1^0, \dots, t_n^0) \in T_n$ для

$$\zeta_0 = z_0 + t_1^0(z_1 - z_0) + \dots + t_n^0(z_n - z_{n-1}) \quad \text{и} \quad \rho_0 = r_0 + t_1^0(r_1 - r_0) + \dots + t_n^0(r_n - r_{n-1})$$

будет $|\zeta_0| < \rho_0$, то с учетом того, что $F^{(n)}(z)$ не есть константа, получим

$$|F^{(n)}(\zeta_0)| \leq \max_{|z|=|\zeta_0|} |F^{(n)}(z)| < \max_{|z|=\rho_0} |F^{(n)}(z)| \leq M^{(n)}(\rho_0),$$

т.е.

$$|F^{(n)}(\zeta_0)| < M^{(n)}(\rho_0).$$

Последнее неравенство противоречит (19). Следовательно, имеет место равенство $|\zeta| = \rho$ для всех точек $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$. Но тогда среди этих точек найдется точка $(t_1^1, \dots, t_n^1) \in T_n$, где $t_1, \dots, t_n$ — попарно различные числа, отличные от нуля и единицы, для которой

$$|\zeta_1| = |z_0 + t_1^1(z_1 - z_0) + \dots + t_n^1(z_n - z_{n-1})| = \rho_1 = r_0 + t_1^1(r_1 - r_0) + \dots + t_n^1(r_n - r_{n-1}).$$

Применив пункт 3) леммы 1, получим, что все точки $z_0, \dots, z_n$ из круга E должны лежать на некотором луче $L(\alpha)$. Значит, $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m = 0, 1, \dots, n$. Но тогда

$$\zeta = \rho e^{i\alpha} \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n. \quad (20)$$

Теперь равенство (19) можно заменить равенством

$$|F^{(n)}(\rho e^{i\alpha})| = M^{(n)}(\rho) \quad \forall \rho \in \overline{N}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь отдельно равенство (18). Положим

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n = \left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n \right| e^{i\beta}.$$

Тогда равенство (18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re}\{e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)\} dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} |e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)| dt_1 \dots dt_n. \end{aligned} \quad (22)$$

Кроме того,

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)\} \leq |e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)| \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n. \quad (23)$$

Функции $\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)\}$ и $|e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)|$ непрерывны в T_n . Поэтому из (22) и (23) следует, что

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)\} = |e^{-i\beta} F^{(n)}(\zeta)| \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n.$$

Но тогда легко понять, что все значения функции $F^{(n)}(\zeta)$ лежат на луче $L(\beta)$. Поэтому, учитывая (20) и (21), получим

$$F^{(n)}(re^{i\alpha}) = M^{(n)}(r)e^{i\beta} \quad \forall r \in \overline{N}.$$

Из сказанного выше следует справедливость пунктов 2а) и 2б) леммы 2.

Достаточность. Пусть имеют место условия, указанные в пунктах 2а) и 2б) леммы 2. Тогда нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned} |[F(z); z_0, \dots, z_n]| &= \left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \dots dt_n \right| \\ &= \left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} |F^{(n)}(\zeta)| dt_1 \dots dt_n \right| \\ &= \left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho) dt_1 \dots dt_n \right| \\ &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho) dt_1 \dots dt_n = [M(r); z_0, \dots, z_n]. \end{aligned}$$

Мы доказали утверждение 2) леммы 2. Справедливость утверждения 3) леммы 2 устанавливается аналогичным образом.

2. Перейдем к доказательству теоремы 3. Для любых $z_0, \dots, z_n \in E$ имеют место формулы (см. [7])

$$\left[\frac{1}{1-cz}; z_0, \dots, z_n \right] = c^n \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-cz_m}, \quad |c| \leq 1, \quad \forall n \geq 0, \quad (24)$$

$$\left[\frac{1}{(1-cz)^2}; z_0, \dots, z_n \right] = c^n \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-cz_m} \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-cz_m}, \quad |c| \leq 1. \quad (25)$$

Далее,

$$\frac{z}{(1-cz)^2} = \frac{1}{c} \left(\frac{-1}{1-cz} + \frac{1}{(1-cz)^2} \right).$$

Пользуясь формулами (24), (25) и элементарными свойствами разделенных разностей, получим

$$\left[\frac{z}{(1-cz)^2}; z_0, \dots, z_n \right] = c^{n-1} \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-cz_m} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-cz_m}. \quad (26)$$

Пусть

$$M(r) = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Если в формуле (26) положим $c = 1$ и $z_m = r_m$, $m = 0, 1, \dots, n$, то получим

$$[M(r); r_0, \dots, r_n] = \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \quad \forall n \geq 0. \quad (27)$$

Если, кроме того, все $r_0, r_1, \dots, r_n$ равны между собой, то приходим к хорошо известной формуле (см. [3], [4])

$$\frac{1}{n!} M^{(n)}(r) = \frac{r+n}{(1-r)^{2+n}},$$

где $M^{(n)}(r)$ – непрерывная и строго возрастающая на промежутке $[0, 1)$ функция. Применяя теорему 2 к функции $F(z) \in S$, получим

$$|F^{(n)}(z)| \leq M^{(n)}(r) \quad \forall |z| = r < 1, \quad n \geq 0.$$

Из (27) и леммы 2 следуют оценки

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| \leq [M(r); r_0, \dots, r_n] = \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m}, \quad (28)$$

имеющие место при любом целом $n \geq 0$ и произвольно взятых $z_0, \dots, z_n \in E$, так как случай совпадения всех точек между собой приведет нас снова к теореме 2.

Рассмотрим вопрос о знаке равенства в (28). Пусть знак равенства в (28) имеет место в точках $z_0, \dots, z_n \in E$, среди которых есть различные. Тогда на основании леммы 2 существуют такие вещественные α и β , что

$$z_m = r_m e^{i\alpha}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

$$F^{(n)}(r e^{i\alpha}) = M^{(n)}(r) e^{i\beta} = n! \frac{r+n}{(1-r)^{2+n}} e^{i\beta} \quad \forall r \in \overline{N}.$$

По теореме 2 функция $F(z)$ должна иметь вид (4). Согласно формуле (26) имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)^2}; r_0 e^{i\alpha}, \dots, r_n e^{i\alpha} \right] &= e^{-i(n-1)\alpha} \left(-1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \right) \prod_{m=0}^n \frac{1}{1-r_m} \\ &= [M(r); r_0, \dots, r_n] e^{-i(n-1)\alpha}. \end{aligned}$$

(Здесь $e^{-i(n-1)\alpha} = e^{i\beta}$). Значит,

$$\left| \left[\frac{z}{(1 - e^{-i\alpha}z)^2}; r_0 e^{i\alpha}, \dots, r_n e^{i\alpha} \right] \right| = [M(r); r_0, \dots, r_n].$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, М., 1967.
- [2] L. de Branges, “A proof of the Bieberbach conjecture”, *Acta Math.*, **154**:1–2 (1985), 137–152.
- [3] И. А. Александров, “Доказательство Л. де Бранжем гипотезы И. И. Милина и гипотезы Л. Бибербаха”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:2 (1987), 7–20.
- [4] И. А. Александров, *Методы геометрической теории аналитических функций*, Изд-во Томск. ун-та, Томск, 2001.
- [5] E. Landau, “Einige Bemerkungen über schlichte Abbildung”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **34** (1926), 239–243.
- [6] И. И. Ибрагимов, *Методы интерполирования функций и некоторые их применения*, Наука, М., 1971.
- [7] Э. Г. Кирьяцкий, И. Б. Меляускас, “О признаках принадлежности некоторых рациональных функций классу $K_n(D)$ ”, *Литовский матем. сб.*, **22**:4 (1982), 82–89.

Э. Г. Кирьяцкий

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса

E-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Поступило

19.04.2007