Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Бобкова, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Проблема “выживания уток” в трехмерных сингулярно возмущенных системах с двумя медленными переменными, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 818–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:28:51

УДК 517.926

ПРОБЛЕМА “ВЫЖИВАНИЯ УТОК” В ТРЕХМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. С. Бобкова, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x, y)$, $\varepsilon \dot{y} = g(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $f, g \in C^\infty$. Предполагается, что уравнение $g = 0$ определяет две различные гладкие поверхности $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, пересекающиеся общим образом по кривой l . Предполагается далее, что траектории соответствующей вырожденной системы, лежащие на поверхности $y = \varphi(x)$, являются утками, т.е. с течением времени, пересекая общим образом кривую l , переходят с устойчивой части $\{y = \varphi(x), g'_y < 0\}$ этой поверхности на неустойчивую ее часть $\{y = \varphi(x), g'_y > 0\}$. Решается так называемая проблема “выживания уток”, т.е. дается ответ на вопрос: какие траектории из имеющегося при $\varepsilon = 0$ однопараметрического семейства уток являются пределами при $\varepsilon \rightarrow 0$ некоторых траекторий исходной системы.

Библиография: 7 названий.

Впервые траектории-утки были обнаружены в 1978 году французскими математиками Ф. Диенер и М. Диенером с помощью нестандартного анализа. В дальнейшем траектории-утки изучались другими авторами – как методом нестандартного анализа, так и в рамках классического асимптотического анализа. В [1] показано, что при определенных предположениях сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных может быть представлена как C^1 -возмущение соответствующей релейной системы. Нарушение же этих предположений, как правило, дает начало траекториям-уткам.

В статье [2] рассматривалось скалярное сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение первого порядка (что равносильно изучению системы двух дифференциальных уравнений с одной быстрой и одной медленной переменной) и исследовалась проблема возникновения траекторий-уток в случае, когда две различные кривые медленных движений пересекаются общим образом. В данной работе изучается аналогичный вопрос, но для системы трех уравнений с одной быстрой и двумя медленными переменными. При этом без дополнительных пояснений используются понятия и термины, заимствованные из [1], [3].

1. Описание результата. Рассмотрим сингулярно возмущенную систему с одной быстрой и двумя медленными переменными

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Предположим, что функции f и g бесконечно дифференцируемы в области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, где $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$, в которой данная система и будет исследоваться.

УСЛОВИЕ 1. Уравнение $g(x, y) = 0$ имеет ровно два решения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega_x)$, а отвечающие им поверхности медленных движений

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : x \in \Omega_x, y = \varphi(x)\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y) : x \in \Omega_x, y = \psi(x)\} \quad (2)$$

пересекаются общим образом по некоторой гладкой кривой l (последнее означает, что в каждой точке этой кривой выполняется неравенство $\nabla \varphi(x) - \nabla \psi(x) \neq 0$). Считаем еще, что $g''_{yy} \neq 0$ в точках кривой l .

Для описания следующего предположения введем в рассмотрение участки

$$\Gamma_1^- = \{(x, y) \in \Gamma_1 : g'_y(x, y) < 0\}, \quad \Gamma_1^+ = \{(x, y) \in \Gamma_1 : g'_y(x, y) > 0\} \quad (3)$$

поверхности Γ_1 , которые будем называть ее *устойчивой* и *неустойчивой* частями соответственно.

УСЛОВИЕ 2. При $(x, y) \in \Gamma_1 \setminus l$ выполняется неравенство $g'_y(x, y) \neq 0$ и непустым является каждое из множеств (3) (см. рис. 1, на котором изображено одно из возможных расположений поверхностей (2) и участков (3)).

Рис. 1

Обозначим, далее, через l_0 проекцию кривой l на плоскость $y = 0$, а через Γ_0^- и Γ_0^+ — проекции на плоскость $y = 0$ соответственно участков (3) поверхности Γ_1 . И наконец, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, \varphi(x)), \quad (4)$$

траектории которой также будем изображать в плоскости $y = 0$.

Рис. 2

УСЛОВИЕ 3. Каждая траектория системы (4) пересекает кривую l_0 общим образом в направлении из Γ_0^- в Γ_0^+ (см. рис. 2).

Для пояснения смысла условия 3 фиксируем произвольно точку $x_0 \in l_0$ и обозначим через $x = x(t, x_0)$ решение системы (4) с начальным условием $x|_{t=0} = x_0$. Рассмотрим затем отвечающую системе (1) вырожденную систему

$$\dot{x} = f(x, y), \quad g(x, y) = 0 \quad (5)$$

и семейство ее траекторий

$$(x(t), y(t)) : \quad x = x(t, x_0), \quad y = \varphi(x(t, x_0)), \quad x_0 \in l_0, \quad (6)$$

лежащих на поверхности Γ_1 . Согласно терминологии из [1] все эти траектории являются утками, так как при движении по каждой из них фазовая точка системы (5) переходит с устойчивого участка поверхности Γ_1 на неустойчивый.

Итак, при выполнении условий 1–3 мы сталкиваемся с весьма любопытной ситуацией: при $\varepsilon = 0$ у системы (1) имеется однопараметрический континуум траекторий-уток (6). В связи с этим естественным образом возникает проблема “выживания уток”, т.е. вопрос: при каких дополнительных условиях участок $(x(t), y(t))$, $-t_1 \leq t \leq t_2$, траектории (6) с наперед заданными значениями $x_0 \in l_0$, $t_j > 0$, $j = 1, 2$, является пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ некоторой траектории исходной системы (1)?

Для решения поставленной проблемы фиксируем произвольно точку $x_0 \in l_0$ и отрезок времени $-t_1 \leq t \leq t_2$, $t_j > 0$, $j = 1, 2$, а соответствующий участок траектории $x = x(t, x_0)$ системы (4) обозначим через $x = x_0(t)$. (Числа t_j , $j = 1, 2$, выбираются конечными, т.е. не зависящими от ε , но не слишком большими – чтобы указанный участок траектории целиком лежал в допустимой окрестности кривой l_0 .) Зададим, далее, на кривой l_0 гладкую параметризацию $l_0 = \{x = \gamma(s), a \leq s \leq b\}$ и введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(s) = (\nabla \varphi(x), f(x, \varphi(x)))|_{x=\gamma(s)}. \quad (7)$$

Пусть выбранному нами значению $x_0 \in l_0$ соответствует значение параметра $s_0 \in (a, b)$, т.е. $x_0 = \gamma(s_0)$.

Рис. 3

УСЛОВИЕ 4. Считаем, что $\Phi(s_0) = 0$, $\Phi'(s_0) \neq 0$.

Сформулированные условия позволяют дать ответ на интересующий нас вопрос. Однако получение соответствующего строгого результата требует ряда дополнительных построений.

Для их описания положим $x^- = x_0(-t_1)$, $x^+ = x_0(t_2)$. Рассмотрим, далее, в трехмерном пространстве (x_1, x_2, y) две такие кривые l^- и l^+ , проекции l_0^+ и l_0^- которых на плоскость $y = 0$ пересекают общим образом траекторию $x = x_0(t)$ в точках x^- и x^+ соответственно (см. рис. 3, 4). И наконец, определим y^- и y^+ из условий $(x^-, y^-) \in l^-$ и $(x^+, y^+) \in l^+$.

Рис. 4

Пусть $y^-(\tau)$ и $y^+(\tau)$ – решения задач в “быстром” времени $\tau = t/\varepsilon$:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x^-, y), \quad y(0) = y^-, \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x^+, y), \quad y(0) = y^+. \quad (8)$$

Будем считать, что

$$y^-(\tau) \rightarrow \varphi(x^-) \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow +\infty; \quad y^+(\tau) \rightarrow \varphi(x^+) \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (9)$$

Отметим, что выполнения предельных равенств (9) всегда можно добиться за счет произвола в выборе кривых l^- и l^+ . Действительно, в силу условий 1, 2 фигурирующие в (8) уравнения имеют состояния равновесия $y = \varphi(x^-)$ и $y = \varphi(x^+)$ соответственно, первое из которых экспоненциально устойчиво в сторону возрастания τ , а второе – при $\tau \rightarrow -\infty$. Поэтому равенства (9) будут заведомо справедливы, если взять y^- и y^+ достаточно близкими к $\varphi(x^-)$ и $\varphi(x^+)$ соответственно.

На заключительном этапе рассмотрим кривую L , состоящую из двух параллельных оси y отрезков, соединяющих точки (x^-, y^-) и $(x^-, \varphi(x^-))$, (x^+, y^+) и $(x^+, \varphi(x^+))$, и из лежащего на Γ_1 участка кривой $(x_0(t), \varphi(x_0(t)))$ при $-t_1 \leq t \leq t_2$ (см. рис. 3).

ТЕОРЕМА. *При выполнении условий 1–4 существует единственная траектория $L(\varepsilon)$ системы (1) такая, что ее концы лежат на l^- и l^+ соответственно, а ее пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ служит кривая L .*

Траектория $L(\varepsilon)$ системы (1), доставляемая теоремой, и является искомой, так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ она неограниченно приближается как к участку кривой L , лежащему между точками $(x^-, \varphi(x^-))$ и $(x_0, \varphi(x_0))$ на устойчивой части Γ_1^- , так и к участку кривой L , лежащему между точками $(x_0, \varphi(x_0))$ и $(x^+, \varphi(x^+))$ на неустойчивой части Γ_1^+ . Обладающую такими свойствами траекторию принято называть *траекторией-уткой* системы (1).

2. Доказательство теоремы. Основная идея обоснования сформулированного результата состоит в сведении задачи к локальной. Для того чтобы сделать это, при $t > 0$ рассмотрим пучок траекторий системы (1), начальные условия (x_*, y_*) которых при $t = 0$ лежат на кривой l^- в некоторой достаточно малой окрестности U точки (x^-, y^-) . Опишем поведение каждой из этих траекторий при увеличении t .

Согласно общим результатам монографии [4] сначала (на отрезке вида $0 \leq t \leq N\varepsilon \times \ln(1/\varepsilon)$, где $N = \text{const} > 0$) происходит так называемое быстрое движение в асимптотически малой окрестности прямой $x = x_*$, описываемое задачей Коши ($\tau = t/\varepsilon$)

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x_*, y), \quad y(0) = y_*. \quad (10)$$

Обратим внимание, что в силу первого предельного равенства (9) и близости (x_*, y_*) к (x^-, y^-) решение $y(\tau)$ задачи (10) близко к решению первой из задач Коши (8), а значит, оно определено при всех $\tau \geq 0$ и удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} y(\tau) = \varphi(x_*).$$

Таким образом, происходит “падение” каждой из рассматриваемых траекторий на устойчивое многообразие Γ_1^- , а затем движение продолжается в его окрестности порядка ε примерно по закону $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, где $y(t) = \varphi(x(t))$, а $x(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, \varphi(x)), \quad x|_{t=0} = x_*. \quad (11)$$

Добавим, что в силу условия 3 и близости x_* к x^- решение задачи (11) с течением времени пересекает общим образом кривую l_0 в некоторой точке, близкой к x_0 .

Суммируя все сказанное, отметим, что рассмотренный пучок траекторий системы (1) образует гладкое по совокупности переменных интегральное многообразие медленных движений (ленту) $y = S_1(x, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, $S_1(x, 0) = \varphi(x)$, и, что самое главное, данная лента продолжается до пересечения с любой не зависящей от ε окрестностью точки $(x_0, \varphi(x_0))$, а точнее говоря – до пересечения с частью этой окрестности, проецируемой на Γ_1^- . Аналогичным образом, рассматривая малую окрестность $V \subset l^+$ точки (x^+, y^+) и выпуская при $t < 0$ траектории системы (1) из точек множества V , получаем ленту $y = S_2(x, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, $S_2(x, 0) = \varphi(x)$, которая также может быть продолжена до пересечения с упомянутой выше окрестностью точки $(x_0, \varphi(x_0))$, а именно с той ее частью, которая проецируется на Γ_1^+ . Тем самым, интересующая нас проблема сводится к локальному вопросу о нахождении в некоторой малой окрестности указанной точки траектории системы (1), концы которой лежат на лентах $y = S_1(x, \varepsilon)$ и $y = S_2(x, \varepsilon)$.

Следующий этап доказательства – приведение исходной системы (1) в окрестности точки $(x_0, \varphi(x_0))$ к так называемой нормальной форме. Ее построение разбивается, в свою очередь, на несколько шагов. На первом шаге обратимся к условиям 1 и 2, из которых вытекает равенство

$$g(x, y) = \omega(x, y)(y - \varphi(x))(y - \psi(x)),$$

где множитель $\omega(x, y) \in C^\infty(\Omega)$ отличен от нуля во всех точках поверхности Γ_1 . Поэтому без ограничения общности будем считать, что выполняется неравенство $\omega(x, y) > 0$, соответствующее показанному на рис. 1 расположению поверхностей (2) и участков (3) (случай $\omega(x, y) < 0$ сводится к данному посредством замены y на $-y$). Выполняя затем в системе (1) последовательно замены

$$\tau = \int_0^t \omega(x(s, \varepsilon), y(s, \varepsilon)) ds, \quad \tau \rightarrow t, \quad \frac{f(x, y)}{\omega(x, y)} \rightarrow f(x, y), \quad z = y - \varphi(x),$$

преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z + \varphi(x)), \\ \varepsilon \dot{z} &= (\varphi(x) - \psi(x))z + z^2 - \varepsilon(\nabla \varphi(x), f(x, z + \varphi(x))). \end{aligned} \quad (12)$$

Для описания очередной замены переменных фиксируем произвольно точку $x \in \Omega_x$ и выпустим из нее траекторию системы (4), т.е. рассмотрим решение $w(t, x)$ этой системы с начальным условием $w(0, x) = x$. Согласно условию 3 существует единственный момент времени $t_0 = t_0(x)$ (положительный при $x \in \Gamma_0^-$ и отрицательный при $x \in \Gamma_0^+$), для которого $w(t_0, x) \in l_0$. Обозначим, далее, через $s = s(x)$ значение параметра s , отвечающее точке $w(t_0(x), x)$, и перейдем в системе (4) к новым координатам (ξ, v) :

$$s(x) - s_0 = v, \quad t_0(x) = \xi, \quad (13)$$

где, напомним, s_0 – значение параметра s , соответствующее выбранной нами точке $x_0 \in l_0$ (см. рис. 4). В итоге рассматриваемая система преобразуется к виду

$$\dot{\xi} = 1, \quad \dot{v} = 0, \quad (14)$$

а интересующее нас ее решение $x = x_0(t)$ в новых переменных задается равенствами

$$\xi = t, \quad v = 0. \quad (15)$$

На втором шаге построения нормальной формы выполним в системе (12) замену (13). В результате с учетом равенств (14) она примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 1 + z\gamma_1(\xi, v, z), & \dot{v} &= z\gamma_2(\xi, v, z), \\ \varepsilon \dot{z} &= \kappa(\xi, v)z + z^2 + \varepsilon\Delta(\xi, v, z), \end{aligned} \quad (16)$$

где γ_1, γ_2 – некоторые достаточно гладкие функции, а функции $\kappa(\xi, v)$ и $\Delta(\xi, v, z)$ получаются соответственно из

$$\varphi(x) - \psi(x), \quad -(\nabla\varphi(x), f(x, z + \varphi(x)))$$

при указанной замене координат. Отметим, далее, что поскольку система (16) рассматривается в некоторой достаточно малой окрестности начала координат, то в силу первого равенства (16) переменную ξ в ней можно взять за новое время. В итоге получим систему

$$\frac{\varepsilon dz}{d\xi} = \kappa(\xi, v)z + H(\xi, v, z) + \varepsilon\Delta_1(\xi, v, z), \quad \frac{dv}{d\xi} = z\Delta_2(\xi, v, z), \quad (17)$$

где гладкая функция H такова, что

$$H(\xi, v, 0) \equiv H'_z(\xi, v, 0) \equiv 0, \quad (18)$$

а Δ_1 и Δ_2 задаются равенствами

$$\Delta_1 = \frac{\Delta(\xi, v, z)}{1 + z\gamma_1(\xi, v, z)}, \quad \Delta_2 = \frac{\gamma_2(\xi, v, z)}{1 + z\gamma_1(\xi, v, z)}. \quad (19)$$

Перед выполнением третьего шага нормализации вспомним, что при сведении задачи к локальной мы рассматривали гладкие поверхности (ленты) $y = S_j(x, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, образованные траекториями системы (1). В исследуемой нами окрестности точки $(x_0, \varphi(x_0))$ эти поверхности находятся на расстоянии порядка ε от поверхности Γ_1 , т.е. в новых координатах от поверхности $z = 0$. Поэтому целесообразно предварительно сделать в системе (17) замену $z/\varepsilon \rightarrow z$, в результате которой с учетом свойств (18) функции H она преобразуется к виду

$$\frac{\varepsilon dz}{d\xi} = \kappa(\xi, v)z + \Delta_3(\xi, v) + \varepsilon\Delta_4(\xi, v, z, \varepsilon), \quad \frac{dv}{d\xi} = \varepsilon\Delta_5(\xi, v, z, \varepsilon). \quad (20)$$

Здесь Δ_j , $j = 3, 4, 5$, – некоторые достаточно гладкие по совокупности переменных функции, причем в силу (19)

$$\Delta_3(\xi, v) = \Delta(\xi, v, 0). \quad (21)$$

Далее заметим, что в силу условий 1, 2

$$\begin{aligned}\kappa(0, v) &= (\varphi(x) - \psi(x))|_{x \in l_0} \equiv 0, \\ \kappa'_\xi(0, v) &= (\nabla \varphi(x) - \nabla \psi(x), f(x, \varphi(x)))|_{x \in l_0} > 0.\end{aligned}$$

Следовательно, можно сделать гладкую замену, при которой имело бы место равенство

$$\frac{d\tilde{\xi}}{d\xi} = \frac{\kappa(\xi, v)}{\tilde{\xi}}$$

(переменная v рассматривается здесь как параметр). Действительно, решая это дифференциальное уравнение, получим гладкое решение

$$\tilde{\xi} = \xi \sqrt{\frac{2}{\xi^2} \int_0^\xi \kappa(s, v) ds}. \quad (22)$$

Итак, на третьем, последнем шаге нормализации выполним в системе (20) замену (22), а затем переменную $\tilde{\xi}$ снова обозначим через ξ . В итоге получаем искомую нормальную форму системы (1), которая имеет вид

$$\frac{\varepsilon dz}{d\xi} = \xi z + \Omega(\xi, v) + \varepsilon \Theta_1(\xi, v, z, \varepsilon), \quad \frac{dv}{d\xi} = \varepsilon \Theta_2(\xi, v, z, \varepsilon). \quad (23)$$

Здесь все функции достаточно гладко зависят от своих переменных, причем в силу (19), (21) справедливо равенство

$$\Omega(0, v) = -\frac{\Phi(v + s_0)}{\sqrt{\kappa'_\xi(0, v)} \omega(x, \varphi(x))|_{x=\gamma(s_0+v)}},$$

где $\Phi(s)$ – функция (7). А отсюда и из условия 4 вытекает, что

$$\Omega(0, 0) = 0, \quad \Omega'_v(0, 0) \neq 0. \quad (24)$$

На заключительном этапе доказательства теоремы фиксируем достаточно малое число $q > 0$ и при $-q \leq \xi \leq q$ рассмотрим для системы (23) краевую задачу с граничными условиями

$$z|_{\xi=-q} = \Sigma_1(\xi, v, \varepsilon)|_{\xi=-q}, \quad z|_{\xi=q} = \Sigma_2(\xi, v, \varepsilon)|_{\xi=q}, \quad (25)$$

где гладкие по совокупности переменных функции

$$\Sigma_j, \quad \Sigma_j|_{\varepsilon=0} = -\frac{\Omega(\xi, v)}{\xi}, \quad j = 1, 2,$$

определенные в некоторых достаточно малых окрестностях точек $\xi = -q$, $v = 0$ и $\xi = q$, $v = 0$ соответственно, представляют собой введенные выше интегральные многообразия (ленты) $y = S_j(x, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, в новых переменных.

В силу равенств (15) нас интересует решение краевой задачи (23), (25) (если таковое существует) с нулевым приближением

$$v = 0, \quad z = z_0(\xi) \equiv -\frac{\Omega(\xi, 0)}{\xi}, \quad (26)$$

где, подчеркнем, $z_0(\xi) \in C^\infty[-q, q]$ (см. первое свойство (24)).

ЛЕММА. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ краевая задача (23), (25) имеет единственное решение $v = v(\xi, \varepsilon)$, $z = z(\xi, \varepsilon)$ с нулевым приближением (26), для которого равномерно по $-q \leq \xi \leq q$ справедливы асимптотические представления

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi), \quad z = z_0(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\xi). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изложим сначала алгоритм нахождения коэффициентов рядов (27). С этой целью подставим указанные ряды в систему (23) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε .

На первом шаге алгоритма приходим к системе

$$\frac{dv_1}{d\xi} = \Theta_2(\xi, 0, z_0(\xi), 0), \quad \xi z_1 = z'_0(\xi) - \Omega'_v(\xi, 0)v_1 - \Theta_1(\xi, 0, z_0(\xi), 0), \quad (28)$$

анализ которой достаточно прост. Действительно, из первого уравнения (28) функция $v_1(\xi)$ определяется с точностью до константы, которую мы выберем так, чтобы функция $z_1(\xi)$ была гладкой в окрестности точки $\xi = 0$. А именно положим

$$v_1(0) = \frac{(z'_0(0) - \Theta_1(0, 0, z_0(0), 0))}{\Omega'_v(0, 0)},$$

что возможно в силу второго соотношения (24).

На шаге с номером $k \geq 2$ имеем аналогичную (28) систему

$$\frac{dv_k}{d\xi} = R_k(\xi), \quad \xi z_k = G_k(\xi) - \Omega'_v(\xi, 0)v_k,$$

где функции $R_k, G_k \in C^\infty[-q, q]$ зависят только от $v_m(\xi)$ и $z_m(\xi)$ с номерами $m \leq k-1$. Решая затем уравнение для v_k и выбирая начальное условие $v_k(0) = G_k(0)/\Omega'_v(0, 0)$, получим функцию $z_k(\xi)$, гладкую в окрестности точки $\xi = 0$, и т.д.

Для обоснования приведенного алгоритма нам потребуются два специальных семейства решений системы (23), каждое из которых удовлетворяет одному из граничных условий (25). Указанные семейства определяются следующим образом. Фиксируем произвольное натуральное $k_0 \geq 2$ и подставим в (23) выражения

$$v = v_{k_0}^j(\xi, \varepsilon) + h_j, \quad z = z_{k_0}(\xi, \varepsilon) + g_j, \quad j = 1, 2, \quad (29)$$

где

$$v_{k_0}^j(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_0-1} \varepsilon^k v_k(\xi) + \varepsilon^{k_0} \delta_j, \quad z_{k_0}(\xi, \varepsilon) = z_0(\xi) + \sum_{k=1}^{k_0-1} \varepsilon^k z_k(\xi),$$

а $\delta_j, j = 1, 2$, — пока произвольные (подлежащие определению в дальнейшем) постоянные. В итоге для $h_j = h_j(\xi, \varepsilon, \delta_j)$, $g_j = g_j(\xi, \varepsilon, \delta_j)$, $j = 1, 2$, получим некоторые системы дифференциальных уравнений, которые дополним начальными условиями

$$h_j|_{\xi=(-1)^j q} = 0, \quad g_j|_{\xi=(-1)^j q} = (\Sigma_j(\xi, v_{k_0}^j(\xi, \varepsilon), \varepsilon) - z_{k_0}(\xi, \varepsilon))|_{\xi=(-1)^j q}. \quad (30)$$

При $j = 1$ описанная последовательность действий приводит для определения функций $h_1(\xi, \varepsilon, \delta_1)$, $g_1(\xi, \varepsilon, \delta_1)$ к системе

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon dg_1}{d\xi} &= a(\xi, \varepsilon, \delta_1)g_1 + b(\xi, \varepsilon, \delta_1)h_1 + C(g_1, h_1, \xi, \varepsilon, \delta_1) + \varepsilon^{k_0}u_*(\xi, \varepsilon, \delta_1), \\ \frac{dh_1}{d\xi} &= \varepsilon D(g_1, h_1, \xi, \varepsilon, \delta_1) + \varepsilon^{k_0}u_{**}(\xi, \varepsilon, \delta_1),\end{aligned}$$

в которой все коэффициенты гладко зависят от своих переменных, причем

$$\begin{aligned}a(\xi, \varepsilon, \delta_1) &= \xi + O(\varepsilon), \quad b(\xi, \varepsilon, \delta_1) = \Omega'_v(\xi, 0) + O(\varepsilon), \\ C(0, 0, \xi, \varepsilon, \delta_1) &\equiv C'_{g_1}(0, 0, \xi, \varepsilon, \delta_1) \equiv C'_{h_1}(0, 0, \xi, \varepsilon, \delta_1) \equiv D(0, 0, \xi, \varepsilon, \delta_1) \equiv 0.\end{aligned}\quad (31)$$

Дополним затем получившуюся систему начальными условиями (30) при $j = 1$ и перейдем от нее к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}g_1 &= g_1(-q, \varepsilon, \delta_1) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_{-q}^{\xi} a(s, \varepsilon, \delta_1) ds\right\} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-q}^{\xi} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\xi} a(s, \varepsilon, \delta_1) ds\right\} \left[b(\tau, \varepsilon, \delta_1) \left(\varepsilon \int_{-q}^{\tau} D(g_1, h_1, \sigma, \varepsilon, \delta_1) d\sigma \right. \right. \\ &\left. \left. + \varepsilon^{k_0} \int_{-q}^{\tau} u_{**}(\sigma, \varepsilon, \delta_1) d\sigma \right) + C(g_1, h_1, \tau, \varepsilon, \delta_1) + \varepsilon^{k_0} u_*(\tau, \varepsilon, \delta_1) \right] d\tau, \quad (32)\end{aligned}$$

$$h_1 = \varepsilon \int_{-q}^{\xi} D(g_1, h_1, s, \varepsilon, \delta_1) ds + \varepsilon^{k_0} \int_{-q}^{\xi} u_{**}(s, \varepsilon, \delta_1) ds. \quad (33)$$

Исследование системы (32), (33) опирается на асимптотическое равенство

$$g_1(-q, \varepsilon, \delta_1) = O(\varepsilon^{k_0}),$$

справедливое в силу описанного выше способа нахождения коэффициентов рядов (27), и легко проверяемую оценку

$$\max_{-q \leq \xi \leq 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-q}^{\xi} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\xi} a(s, \varepsilon, \delta_1) ds\right\} d\tau \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Используя эти факты вместе со свойствами (31), убеждаемся, что оператор, порожденный правыми частями уравнений (32), (33) в пространстве

$$(g_1, h_1) \in C[-q, 0] \times C[-q, 0],$$

преобразует в себя множество $B_1 \times B_2$, где B_j , $j = 1, 2$, – некоторые шары в $C[-q, 0]$ с центрами в нуле и радиусами порядка $\varepsilon^{k_0-1/2}$ и ε^{k_0} соответственно, и является сжимающим. Поэтому из (32), (33) единственным образом определяются гладкие по совокупности переменных ξ, δ_1 функции $g_1(\xi, \varepsilon, \delta_1)$, $h_1(\xi, \varepsilon, \delta_1)$:

$$\max_{-q \leq \xi \leq 0} \left(|g_1| + \left| \frac{\partial g_1}{\partial \delta_1} \right| \right) \leq M_1 \varepsilon^{k_0-1/2}, \quad \max_{-q \leq \xi \leq 0} \left(|h_1| + \left| \frac{\partial h_1}{\partial \delta_1} \right| \right) \leq M_2 \varepsilon^{k_0}, \quad (34)$$

где $M_j = \text{const} > 0$, $j = 1, 2$. Аналогичным образом определяем на отрезке $0 \leq \xi \leq q$ и фигурирующие в (29) функции $g_2(\xi, \varepsilon, \delta_2)$, $h_2(\xi, \varepsilon, \delta_2)$.

Проделанные построения сводят проблему нахождения требуемого решения краевой задачи (23), (25) к отысканию двух имеющихся в запасе параметров δ_1 , δ_2 из условий “сшивания” решений (29) при $\xi = 0$, т.е. из равенств

$$\varepsilon^{k_0} \delta_1 + h_1|_{\xi=0} = \varepsilon^{k_0} \delta_2 + h_2|_{\xi=0}, \quad g_1|_{\xi=0} = g_2|_{\xi=0}. \quad (35)$$

Проанализируем сначала первое из уравнений системы (35). С этой целью заметим, что $u_{**}(\xi, 0, \delta_1) = u_{**}^0(\xi)$, где $u_{**}^0(\xi)$ – некоторая гладкая, не зависящая от δ_1 функция. Учитывая данное обстоятельство вместе с оценками (34) в уравнении (33), заключаем, что равномерно по $\xi \in [-q, 0]$

$$h_1 = \varepsilon^{k_0} \int_{-q}^{\xi} u_{**}^0(s) ds + O(\varepsilon^{k_0+1/2}), \quad \frac{\partial h_1}{\partial \delta_1} = O(\varepsilon^{k_0+1/2}).$$

Объединяя, далее, эти равенства с аналогичными представлениями

$$h_2 = -\varepsilon^{k_0} \int_{\xi}^q u_{**}^0(s) ds + O(\varepsilon^{k_0+1/2}), \quad \frac{\partial h_2}{\partial \delta_2} = O(\varepsilon^{k_0+1/2}),$$

заключаем, что из первого уравнения (35) δ_2 выражается через δ_1 :

$$\delta_2 = \delta_1 + \int_{-q}^q u_{**}^0(s) ds + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (36)$$

Для исследования второго уравнения (35) учтем более детально структуру функции u_* :

$$u_* = \delta_1 \Omega'_v(\xi, 0) + u_*^0(\xi) + O(\varepsilon), \quad (37)$$

где $u_*^0(\xi)$ – некоторая гладкая функция (ее явное выражение не потребуется). После этого сделаем в интегралах, стоящих в правой части (32), замены $s/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow s$, $\tau/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \tau$, а затем воспользуемся свойствами (31), (34), (37). В результате придем к асимптотическим равенствам

$$g_1(0, \varepsilon, \delta_1) = \varepsilon^{k_0-1/2}(\kappa_{1,1}\delta_1 + \kappa_{1,2}) + O(\varepsilon^{k_0}), \quad \frac{\partial g_1}{\partial \delta_1}(0, \varepsilon, \delta_1) = \varepsilon^{k_0-1/2}\kappa_{1,1} + O(\varepsilon^{k_0}),$$

где значение постоянной $\kappa_{1,2}$ несущественно, а

$$\kappa_{1,1} = \Omega'_v(0, 0) \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau \neq 0$$

(см. (24)). Объединяя их с аналогичными равенствами для g_2 :

$$g_2(0, \varepsilon, \delta_2) = \varepsilon^{k_0-1/2}(\kappa_{2,1}\delta_2 + \kappa_{2,2}) + O(\varepsilon^{k_0}), \quad \frac{\partial g_2}{\partial \delta_2}(0, \varepsilon, \delta_2) = \varepsilon^{k_0-1/2}\kappa_{2,1} + O(\varepsilon^{k_0}),$$

где

$$\kappa_{2,1} = -\Omega'_v(0,0) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau \neq 0,$$

приходим к выводу, что второе уравнение (35) преобразуется к виду

$$F(\delta_1, \delta_2, \varepsilon) = 0, \quad (38)$$

где

$$F = \Omega'_v(0,0) \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta_1 + \delta_2) + \kappa_{1,2} - \kappa_{2,2} + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_j} = \Omega'_v(0,0) \sqrt{\frac{\pi}{2}} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad j = 1, 2.$$

И наконец, подставляя в (38) равенство (36) и применяя к получившемуся уравнению теорему о неявной функции, однозначно определяем ограниченные функции $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Отметим, что аналог установленной леммы содержится в работе [5], где система вида (17) рассматривается как самостоятельный объект исследования.

Для завершения обоснования теоремы остается совершить обратный переход от локальной постановки задачи к глобальной, а точнее говоря, продолжить доставляемую леммой траекторию системы (23) по лентам $y = S_1(x, \varepsilon)$ и $y = S_2(x, \varepsilon)$ до пересечения с кривыми l^- и l^+ соответственно. В результате получим единственную траекторию системы (1) с концами на l^- и l^+ и с требуемым нулевым приближением L . Теорема доказана.

Сделаем еще два небольших замечания. Во-первых, отметим, что все вышеизложенное очевидным образом переносится на случай, когда правые части системы (1) – функции f и g – зависят дополнительно и от параметра ε . Во-вторых, укажем, что в рассматриваемой задаче (1) фазовые траектории, не являющиеся траекториями-утками, исследовались в статье [6].

3. Заключение. Следует подчеркнуть, что используемая выше стратегия “охоты на уток” отличается от предложенной в статье [2]. Действительно, в [2] предполагалось, что правые части рассматриваемой системы зависят от некоторого вспомогательного параметра, необходимого в случае одной медленной переменной для склейки траекторий-уток в окрестности точки пересечения кривых медленных движений. В нашей же ситуации указанная склейка осуществляется за счет варьирования начальных условий на кривых l^- , l^+ или, что то же самое, на лентах $y = S_j(x, \varepsilon)$, $j = 1, 2$. Более того, при количестве медленных переменных, равном $n \geq 3$, появление новых степеней свободы приводит к эффекту неединственности траектории-утки с концами на заданных $(n-1)$ -мерных поверхностях l^- , l^+ и с фиксированным нулевым приближением L . Точнее говоря, опираясь на развитую выше технику, можно показать, что при выполнении аналогов условий 1–4 в этом случае имеется целое $(n-2)$ -параметрическое семейство таких траекторий.

Остановимся еще на одной стратегии “охоты на уток”, которую уместнее назвать стратегией “выращивания уток”. С этой целью рассмотрим аналогичную (1) систему

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \mu), \quad (39)$$

правая часть g которой гладко зависит от некоторого вспомогательного параметра μ . Будем считать, что при $\mu = 0$ справедливы условия 1–3, а вместо условия 4 выполняется неравенство $g'_\mu(x, y, 0) \neq 0$ в точках кривой l . Тогда, используя те же конструкции, что и выше, можно показать (см. также [5]) существование такого значения

$$\mu = \mu_*(\varepsilon), \quad \mu_*(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \Phi(s_0)}{g'_\mu(x_0, \varphi(x_0), 0)} + O(\varepsilon^2),$$

что при $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ система (39) имеет траекторию-утку с наперед заданным нулевым приближением L (см. рис. 3). Таким образом, при подходящем выборе параметра μ можно добиться выживания при $\varepsilon > 0$ любой из траекторий семейства (6). Добавим, наконец, что если считать параметр μ гладкой функцией переменных x и ε , то при некотором $\mu = \mu_*(x, \varepsilon)$, $\mu_*(x, 0) \equiv 0$, можно обеспечить выживание всех траекторий-уток из указанного семейства. (См. статью [7], где эта идея реализована в близкой ситуации.)

В заключение отметим, что при отсутствии вспомогательного параметра μ равенство $\Phi(s_0) = 0$, достаточное для существования у системы (1) траектории-утки с выбранным нулевым приближением, является в то же время и необходимым. В самом деле, как следует из содержащихся в [2], [6] построений, при его нарушении траектория системы (1) с начальными условиями $(x, y)|_{t=0} = (x^-, \varphi(x^-))$ имеет нулевое приближение одного из двух типов, показанных на рис. 5.

Рис. 5

Отметим еще, что в случае а), реализующемся при $\Phi(s_0) > 0$, интересующая нас траектория переходит с участка Γ_1^- на устойчивый участок поверхности Γ_2 , см. рис. 5 а). В случае же $\Phi(s_0) < 0$, показанном на рис. 5 б), в точке $(x_0, \varphi(x_0))$ происходит ее “срыв” с поверхности Γ_1 и последующее асимптотически быстрое движение вдоль вертикальной прямой $x = x_0$.

Итак, при некоторой общности положения в системе (1) “выживают” лишь траектории-утки с отдельно взятыми изолированными нулевыми приближениями (6), на которых обращается в нуль функция (7). Эти траектории служат своего рода сепаратрисами, разделяющими массивы траекторий системы (1) с различным асимптотическим поведением (см. рис. 5).

Авторы считают своим прямым долгом выразить искреннюю признательность рецензенту за его глубокое внимание к настоящей работе и исключительно полезные конструктивные замечания, несомненно способствовавшие улучшению ее содержания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
- [2] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Решение сингулярно возмущенных краевых задач методом “охоты на уток” // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 187–207.
- [3] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
- [4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [5] Соболев В. А., Шепаккина Е. А. Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1175–1184.
- [6] Lebovitz N. R., Schaar R. J. Exchange of stabilities in autonomous systems // Stud. Appl. Math. 1975. V. 54. P. 229–260.
- [7] Соболев В. А., Шепаккина Е. А. Интегральные поверхности со сменой устойчивости и траектории-утки // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1. № 3. С. 176–187.

(А. С. Бобкова, Н. Х. Розов) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(А. Ю. Колесов) Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова

Поступило
22.02.2001
Исправленный вариант
05.11.2001