Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Х. Салихов, Г. Г. Вискина, Алгебраические соотношения между гипергеометрической E -функцией и ее производными, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 832–844

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:21:29

УДК 511.36

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ E -ФУНКЦИЕЙ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫМИ

Г. Г. Вискина, В. Х. Салихов

В статье рассматривается обобщенная гипергеометрическая функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_n \cdots (\lambda_t + 1)_n} \left(\frac{z}{t}\right)^{tn}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

где t – четное число, и ее производные до порядка $t - 1$ включительно. В случае алгебраической зависимости этих функций над $\mathbb{C}(z)$ приводится полная структура алгебраических связей между ними.

Библиография: 8 названий.

Рассмотрим гипергеометрическую E -функцию

$$\varphi(z) = \varphi_{\overline{\lambda}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1 + 1)_n \cdots (\lambda_t + 1)_n} \left(\frac{z}{t}\right)^{tn}, \quad (1)$$

где $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $-\lambda_i \notin \mathbb{N}$, t – четно, $t = 2\kappa$.

Функция (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L_{\overline{\lambda}}(y) = L(y) = ((\delta + t\lambda_1) \cdots (\delta + t\lambda_t) - z^t)(y) = t^t \lambda_1 \cdots \lambda_t, \quad \delta = z \frac{d}{dz}. \quad (2)$$

В работе [1] был установлен критерий алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций

$$\overline{\varphi} = (\varphi(z), \delta\varphi(z), \dots, \delta^{t-1}\varphi(z)). \quad (3)$$

В настоящей работе описывается полная структура алгебраических связей над $\mathbb{C}(z)$ функций (3) в случае, когда они алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Полученный результат можно применить для установления оценок снизу мер алгебраической независимости чисел $\varphi(\alpha), \dots, \delta^{l-1}\varphi(\alpha)$, где $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$, l – степень трансцендентности функций (3) над $\mathbb{C}(z)$. Мы ниже остановимся на другом приложении. В работе [2, теорема 1, следствие 1] было установлено эффективное достаточное условие линейной независимости значений E -функций над $\overline{\mathbb{Q}}$. С помощью этого результата ниже доказывается следующая

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант IR-97-1904.

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$. Тогда числа $1, \varphi(\alpha), \delta\varphi(\alpha), \dots, \delta^{t-1}\varphi(\alpha)$ линейно независимы над $\overline{\mathbb{Q}}$.

Отметим, что ввиду критерия, полученного в работе [3], этот результат справедлив и в случае, когда для функции (1) t нечетно. Утверждение теоремы очевидно выполнено, если функции (3) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Всюду далее считаем функции (3) алгебраически зависимыми над $\mathbb{C}(z)$. В этом случае (см. [1]) среди параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ функции (1) найдется (неотрицательный) целый параметр λ_i . Ввиду возможности провести целочисленные сдвиги $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$ (подробности см. ниже), будем считать, что этот параметр $\lambda_i = 0$.

Рассмотрим ряд случаев.

1) Уравнение $L(y) = 0$ (см. (2)) линейно неприводимо. В работе [1] показано, что уравнение $L(y) = 0$ квадратично приводимо, существуют $X_0, \dots, X_{\varkappa-1} \in \mathbb{Q}$ такие, что $-1/2 < X_0 < 1/2$, $0 \leq X_i \leq 1/2$, $i = 1, 2, \dots, \varkappa - 1$; $\varkappa > 1$,

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) = X_0 + \left(0, \frac{1}{2}, X_1, -X_1, \dots, X_{\varkappa-1}, -X_{\varkappa-1}\right). \quad (4)$$

Если $X_0 = 0$, то соответствующий единственный многочлен P , связывающий функции (3), построен в [4, с. 469–470]. Напомним конструкцию этого многочлена. Определим числа $\xi_0, \dots, \xi_{t-1} \in \mathbb{Q}$ из равенства

$$(\delta - t\lambda_1) \cdots (\delta - t\lambda_t) = \delta^t + \dots + \xi_1\delta + \xi_0,$$

или, учитывая (4) при $X_0 = 0$,

$$\delta(\delta - \varkappa)(\delta^2 - t^2X_1^2) \cdots (\delta^2 - t^2X_{\varkappa-1}^2) = \delta^t + \dots + \xi_1\delta,$$

где $\xi_1 = (-1)^{\varkappa} \varkappa t^{2\varkappa-2} X_1^2 \cdots X_{\varkappa-1}^2$.

Далее, определим коэффициенты $\alpha_{r,i} \in \mathbb{Q}$, полагая $\alpha_{r,i} = 0$ при $r + i > t + 1$; из равенства

$$\begin{aligned} &(\delta + \varkappa)(\delta^{t-1} + \xi_{t-1}\delta^{t-2} + \dots + \xi_1) - \delta(\delta + \varkappa)(\delta^2 - t^2X_1^2) \cdots (\delta^2 - t^2X_{\varkappa-1}^2) \\ &= \alpha_{1,t-1}\delta^{t-1} + \dots + \alpha_{1,0} \end{aligned}$$

получим $\alpha_{1,i} = (-1)^i \varkappa \xi_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, t-1$; далее,

$$\begin{aligned} &(-1)^{r-1}(\delta + \varkappa)(\delta^{t-r} + \xi_{t-1}\delta^{t-r-1} + \dots + \xi_r) \\ &= \alpha_{r,0} + \alpha_{r,1}\delta + \dots + \alpha_{r,t-r+1}\delta^{t-r+1}, \quad r = 2, \dots, t; \end{aligned}$$

в частности, $\alpha_{r,t-r+1} = (-1)^{r-1}$. Тогда многочлен

$$P = \sum_{r=1}^t \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_{ri} z_{r-1} z_i + z^t z_0^2 \in \mathbb{Q}[z^t][z_0, \dots, z_{t-1}]. \quad (5)$$

дает искомую алгебраическую связь между функциями (3):

$$P(\varphi(z), \dots, \delta^{t-1}\varphi(z)) = C, \quad (6)$$

где $C = \alpha_{1,0} = \varkappa \xi_1 = (1/4)(-1)^{\varkappa} t^t X_1^2 \cdots X_{\varkappa-1}^2$.

Многочлен P неприводим над $\overline{\mathbb{C}(z)}$, так как уравнение $L(y) = 0$ в рассматриваемом случае линейно неприводимо над $\overline{\mathbb{C}(z)}$. Для доказательства теоремы понадобится еще одно свойство многочлена P .

ЛЕММА 1. Для всех $\theta \in \mathbb{C}$ многочлен

$$P_\theta = \sum_{r=1}^t \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_{ri} z_{r-1} z_i + \theta^t z_0^2 \quad (7)$$

неприводим в $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_{t-1}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда

$$P_\theta = (a_0 z_0 + \dots + a_{t-1} z_{t-1})(b_0 z_0 + \dots + b_{t-1} z_{t-1}), \quad (8)$$

где все $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $a_{t-1} \neq 0$.

Определим s из условий $b_s \neq 0$, $b_i = 0$ при $i > s$. Так как $\alpha_{r,i} = 0$ при $r + i > t + 1$, то, сравнивая коэффициенты при $z_{t-1} z_s$ в обеих частях равенства (8), получим $s \leq 1$. С другой стороны, коэффициент при $z_{t-2} z_2$ в многочлене P_θ равен $\alpha_{t-1,2} + \alpha_{3,t-2} = 1 + 1 = 2$, если $t > 4$, или $\alpha_{3,2} = 1$, если $t = 4$. Так как в правой части (8) это слагаемое отсутствует, то (8) невозможно, и лемма доказана.

Переход к случаю $X_0 \neq 0$ проведем, как в работе [4, с. 463]. Пусть L_0 – оператор L из (2), отвечающий $X_0 = 0$ в случае (4). Отображение $v = s(tX_0)u$ осуществляет изоморфизм пространств решений уравнений $L_0(v) = 0$ и $L(u) = 0$. Здесь и далее используется введенное в [5] обозначение $s(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, для фиксированного нетривиального решения уравнения $y' = (\alpha/z)y$; всюду $\alpha \in \mathbb{Q}$, поэтому можно считать, что $s(\alpha) = z^\alpha$ – некоторая фиксированная ветвь показательной функции. Пусть $(x + tX_0)^r = x^r + c_{r,r-1}x^{r-1} + \dots + c_{r,0}$, $r = 1, \dots, t-1$,

$$\overline{P} = P(z_0, z_1 + c_{1,0}z_0, \dots, z_{t-1} + c_{t-1,t-2}z_{t-2} + \dots + c_{t-1,0}z_0). \quad (9)$$

Для любого решения v уравнения $L_0(v) = 0$ имеем аналогично (6) $P(v, \dots, \delta^{t-1}v) = c \in \mathbb{C}$. Поэтому из (9) получаем

$$c = P(v, \dots, \delta^{t-1}v) = P(s(tX_0)u, \dots, \delta^{t-1}(s(tX_0)u)) = s(2tX_0)\overline{P}(u, \dots, \delta^{t-1}u),$$

или

$$\overline{P}(u, \dots, \delta^{t-1}u) = c(u)s(-2tX_0),$$

где u – произвольное решение уравнения $L(u) = 0$, $c(u) \in \mathbb{C}$.

В частности (см. (2) и условие $\lambda_i = 0$),

$$\overline{P}(\varphi(z), \dots, \delta^{t-1}\varphi(z)) = c \cdot s(-2tX_0), \quad c \in \mathbb{Q}. \quad (10)$$

Так как левая часть равенства (10) имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{tn}$, $c_n \in \mathbb{Q}$ (см. (1), (5) и (9)), то ввиду оценки $-t < (-2tX_0) < t$, $X_0 \neq 0$, получаем $c = 0$ в (10), т.е.

$$\overline{P}(\varphi(z), \dots, \delta^{t-1}\varphi(z)) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь влияние целочисленных сдвигов параметров λ_j на соотношения (6), (11). Пусть $\psi(z)$ — функция вида (1) с $\lambda_1 \rightarrow (\lambda_1 - 1)$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда (см. [5, с. 254])

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \delta\psi \\ \vdots \\ \delta^{t-1}\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{1}{t\lambda_1} \\ \frac{z^t}{t\lambda_1} + c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \delta\varphi \\ \vdots \\ \delta^{t-1}\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix},$$

где $c, c_i \in \mathbb{Q}$; определитель выписанной матрицы линейного невырожденного преобразования равен $(-1)^{t+1}z^t/(t\lambda_1)^t$.

Следовательно, изменение нескольких параметров λ_j вида $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}$, приводят к преобразованию вида

$$(\psi, \dots, \delta^{t-1}\psi) = (\varphi, \dots, \delta^{t-1}\varphi) \cdot A + (a_0, \dots, a_{t-1}), \quad (12)$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,t}$, $a_{ij} = \sum_{r=-M}^N c_{ijr} z^{rt}$, $c_{ijr} \in \mathbb{Q}$, $\det A = c \cdot z^{dt}$, $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $d = N - M$, $a_k = \sum_{r=-M}^N c_{kr} z^{rt}$, $c_{kr} \in \mathbb{Q}$, N — количество сдвигов параметров типа $\lambda_j \rightarrow \lambda_j - 1$, M — количество сдвигов параметров типа $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + 1$.

Подстановка $(z_0, \dots, z_{t-1}) \rightarrow (z_0, \dots, z_{t-1})A + (a_0, \dots, a_{t-1})$ в многочлен P в случае $X_0 = 0$ или в многочлен $\bar{P}$ в случае $X_0 \neq 0$ приводит после домножения соответственно (6) или (11) на некоторый моном z^{st} , $s \in \mathbb{Z}$, к неприводимому квадратичному соотношению между функциями (3) с коэффициентами из $\mathbb{Q}[z^t]$.

2) Уравнение $L(y) = 0$ линейно приводимо. В этом случае (см. [5]) существует делитель g числа t такой, что

$$\bar{\lambda} + \frac{1}{g} \sim \bar{\lambda}. \quad (13)$$

Будем считать g максимально возможным.

2.1) $g = t$. Так как существует $\lambda_i \in \mathbb{Z}^+$, то из (13) находим

$$\bar{\lambda} \sim \left(0, -\frac{1}{t}, \dots, -\frac{t-1}{t}\right).$$

Мы ограничимся рассмотрением ситуации, когда

$$\bar{\lambda} = \left(0, -\frac{1}{t}, \dots, -\frac{t-1}{t}\right).$$

Соответствующие целочисленные сдвиги можно провести, как и в случае 1). Как в работе [5, равенство (114)], получаем

$$\varphi(z) = \frac{1}{t} \sum_{\nu=0}^{t-1} (\exp \xi^\nu z);$$

здесь и далее ξ – примитивный корень степени t из 1. Имеем

$$(\varphi(z), \dots, \varphi^{(t-1)}(z)) = \frac{1}{t}(e^z, e^{\xi z}, \dots, e^{\xi^{t-1}z}) \cdot C, \quad \text{где } C = (\xi^{(i-1)(j-1)})_{i,j=1,\dots,t}. \quad (14)$$

Алгебраические связи между функциями $\varphi(z), \dots, \varphi^{(t-1)}(z)$ над $\mathbb{C}(z)$ ввиду (14) сводятся к алгебраическим связям между функциями $e^z, e^{\xi z}, \dots, e^{\xi^{t-1}z}$. Пусть m – значение функции Эйлера от t , а $x^m - n_{m-1}x^{m-1} - \dots - n_0$ – примитивный многочлен над $\mathbb{Q}$ числа ξ . Тогда

$$\exp(\xi^m z) = \prod_{\nu=0}^{m-1} (\exp(\xi^\nu z))^{n_\nu}, \quad n_\nu \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичные выражения всех $\exp(\xi^k z)$, $k = m+1, \dots, t-1$, через базис трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ – набор экспонент $\exp(\xi^\nu z)$, $\nu = 0, \dots, m-1$, – получаются тривиально.

2.2) $\tau = t/g$ чётно. В этом случае [1, с. 283] существуют $X'_0, \dots, X'_s \in \mathbb{Q}$, $s = \tau/2 - 1$, такие, что

$$-\frac{1}{2} < X'_0 < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq X'_i \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, s, \quad s \geq 1, \\ \bar{\lambda} \sim \left(\frac{\gamma_j - k}{g}, j = 1, \dots, \tau, k = 0, 1, \dots, g-1 \right),$$

где

$$\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_\tau) = X'_0 + \left(0, \frac{1}{2}; X'_1, -X'_1; \dots; X'_s, -X'_s \right), \quad (15)$$

причем $\gamma_j = 0$ для некоторого j . Учитывая возможность провести целочисленные сдвиги параметров λ_j , как и в [3, равенство (60)], можно считать, что

$$\varphi_{\bar{\lambda}}(z) = \frac{1}{g} \sum_{\nu=0}^{g-1} \varphi_{\bar{\gamma}}(\xi^\nu z). \quad (16)$$

Пусть $\mathcal{F} = (f_1(z), \dots, f_t(z))$, $G = (g_1(z), \dots, g_t(z))$, где все $f_i(z), g_i(z)$ – аналитические функции. Будет удобно ввести отношение эквивалентности $\mathcal{F} \sim G$, если $G = \mathcal{F} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{D}_0$, где $\mathcal{D} = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,t}$, $\mathcal{D}_0 = (d_{0,1}, \dots, d_{0,t})$, все $d_{ij} = \sum_{k=k_1}^{k_2} d_{ijk} z^k$, все $d_{ijk} \in \overline{\mathbb{Q}}$; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$; $\det \mathcal{D} = cz^s$, $c \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$, $s \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выше было показано, что целочисленные сдвиги параметров у функции (1) преобразуют набор (3) в эквивалентный набор функций. Кроме того, очевидно, что теорему достаточно доказать для любого набора E -функций эквивалентного набора (3).

В условиях (16) в работе [3, с. 208–209] было показано, что

$$\bar{\varphi} \sim (\delta^i \varphi_{\bar{\gamma}}(\xi^\nu z), i = 0, \dots, \tau-1, \nu = 0, \dots, g-1). \quad (17)$$

Функция $\varphi_{\bar{\gamma}}(\xi^\nu z)$ является решением уравнения

$$L_\nu(y) = ((\delta + \tau\gamma_1) \cdots (\delta + \tau\gamma_\tau) - \xi^{\nu\tau} z^\tau)(y) = 0. \quad (18)$$

Для функции $\varphi_{\bar{\gamma}}(\xi^\nu z)$ выполнены все условия случая 1) (см. (15)): существует $\gamma_i = 0$, уравнение (18) линейно неприводимо ввиду выбора в (13) максимального g . Поэтому

после замены $t \rightarrow \tau$, $\bar{\lambda} \rightarrow \bar{\gamma}$, $z \rightarrow \xi^\nu z$, $(z_0, \dots, z_{t-1}) \rightarrow \bar{z}_\nu = (z_{0,\nu}, \dots, z_{\tau-1,\nu})$ в многочлене (5) для каждого набора функций

$$F_\nu = \{\varphi_{\bar{\gamma}}(\xi^\nu z), \dots, \delta^{(\tau-1)} \varphi_{\bar{\gamma}}(\xi^\nu z)\} \quad (19)$$

получаем соотношение вида (6) при $X'_0 = 0$ либо вида (11) при $X'_0 \neq 0$.

Обозначим полученные многочлены от переменных $\bar{z}_\nu$ соответственно через P_ν и $\bar{P}_\nu$. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{z} &= (\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_{g-1}) = (z_{i,v}, i = 0, \dots, \tau-1, \nu = 0, \dots, g-1), \\ C &= \frac{1}{4}(-1)^{s+1} \tau^\tau X_1'^2 \dots X_s'^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Идеал J , порожденный в кольце $\mathbb{C}(z)[\bar{z}]$ набором g многочленов

$$\{P_0(\bar{z}_0) - C, \dots, P_{g-1}(\bar{z}_{g-1}) - C\}$$

либо набором g многочленов

$$\{\bar{P}_0(\bar{z}_0), \dots, \bar{P}_{g-1}(\bar{z}_{g-1})\},$$

является идеалом всех алгебраических связей над $\mathbb{C}(z)$ между функциями (17) соответственно в случае $X'_0 = 0$ и в случае $X'_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осуществим для каждой функции $\varphi_{\bar{\gamma}}(\xi^\nu z)$ замену переменной $(z/\tau)^\tau \rightarrow z$ и обозначим полученную функцию через $f_\nu(z)$. Функция $f_\nu(z)$ является решением уравнения (см. (18))

$$\bar{L}_\nu(y) = ((\delta + \gamma_1) \dots (\delta + \gamma_\tau) - \xi^{\nu\tau} z)(y) = 0. \quad (20)$$

Обозначим через Φ_ν расширение Пикара–Вессии поля $\mathbb{C}(z)$ для уравнения (20), содержащее функцию $f_\nu(z)$ (соответствующая фундаментальная система решений подробно описана, например, в [5, с. 235]). Пусть Φ – аналогичное расширение Пикара–Вессии для совокупности уравнений (20) при $\nu = 0, \dots, g-1$; G_ν, G – соответствующие этим расширениям дифференциальные группы Галуа; $G_\nu^{0,\text{der}}, G^{0,\text{der}}$ – соответствующие коммутаторные группы для связанных компонент единиц G_ν^0, G^0 групп G_ν, G .

Согласно [6, предложение 3.8.2] с учетом того, что уравнения (20) при $\nu = 0, \dots, g-1$ попарно некогредииентны и неконтргредииентны (см. [1, с. 283] и [7, с. 300]) получаем

$$G^{0,\text{der}} = \prod_{\nu=0}^{g-1} G_\nu^{0,\text{der}}. \quad (21)$$

По следствию 3.6.1 и теореме 3.6 работы [6] все $G_\nu^{0,\text{der}} = G_\nu^0 = Sp(\tau)$, $\nu = 0, \dots, g-1$. Из (21) находим (см. также [8, с. 83])

$$\dim G \geq \dim G^{0,\text{der}} = \sum_{\nu=0}^{g-1} \dim G_\nu^{0,\text{der}} = \sum_{\nu=0}^{g-1} \dim G_\nu^0 = \sum_{\nu=0}^{g-1} \dim G.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\dim G \leq \sum_{\nu=0}^{g-1} \dim G_{\nu}.$$

Поэтому

$$\dim G = \sum_{\nu=0}^{g-1} \dim G_{\nu}.$$

В частности, база трансцендентности поля Φ над $\mathbb{C}(z)$ может быть получена объединением баз трансцендентности всех полей $\Phi_0, \dots, \Phi_{g-1}$ над $\mathbb{C}(z)$. Так как, очевидно (см. (19)), что

$$\tau - 1 = \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)} F_{\nu} = \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)} (f_{\nu}(z), \dots, \delta^{\tau-2} f_{\nu}(z)),$$

то $(\tau - 1)g = \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)} (\delta^i f_{\nu}(z), i = 0, \dots, \tau - 2, \nu = 0, \dots, g - 1)$. Поэтому степень трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ набора функций (17) также равна $(\tau - 1)g = t - g$. Ввиду неприводимости многочленов $P_{\nu}(\bar{z}_{\nu}) - C$ (соответственно $\bar{P}_{\nu}(\bar{z}_{\nu})$) в кольце $\overline{\mathbb{C}(z)}[\bar{z}_{\nu}]$ главный идеал $(P_{\nu} - C)$ (соответственно $(\bar{P}_{\nu})$) определяет многообразие, и поэтому [8, с. 80] идеал J простой с общей точкой (17). Лемма доказана.

2.3) $\tau = t/g$ нечетно, $\tau > 1$. В этом случае (см. [1, с. 283–284]) вместо (15) выполнено соотношение

$$\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{\tau}) = X'_0 + (0, X'_1, -X'_1, \dots, X'_s, -X'_s), \quad s = \frac{\tau - 1}{2}. \quad (22)$$

Пусть G – дифференциальная группа Галуа для совокупности уравнений (20) при $\nu = 0, \dots, g/2 - 1$. Сохраним в остальном все обозначения, введенные при рассмотрении случая 2.2). Аналогично получим, что уравнения (20) при $\nu = 0, \dots, g/2 - 1$ попарно некогрдиентны и неконтргрдиентны; $g/2$ пар уравнений

$$\bar{L}_{\nu}(y) = 0, \quad \bar{L}_{\nu+g/2}(y) = 0, \quad \nu \in \left\{0, \dots, \frac{g}{2} - 1\right\},$$

контргрдиентны. Вместо (21) получим по предложению 3.8.2 из [6] представление

$$G^{0, \operatorname{der}} = \prod_{\nu=0}^{g/2-1} G_{\nu}^{0, \operatorname{der}}. \quad (23)$$

По теореме 3.6 работы [6] в рассматриваемом случае все $G_{\nu}^{0, \operatorname{der}} = G_{\nu}^0 = SL(\tau)$, значит, как в случае 2.2), из (23) получаем

$$\dim G = \sum_{\nu=0}^{g/2-1} \dim G_{\nu}. \quad (24)$$

Кроме того, нам понадобится соотношение

$$\dim G_{\nu} = \dim G_{\nu}^0 = \dim SL(\tau) = \tau^2 - 1. \quad (25)$$

Обозначим через $U_\nu \subset \Phi_\nu$ линейное пространство всех решений уравнения (20), через $\bar{L}_\nu^*$ сопряженный оператор для оператора $\bar{L}_\nu$, $\nu = 0, \dots, g/2 - 1$.

Пусть $\nu \in \{0, \dots, g/2 - 1\}$, $u \in U_\nu$, $v \in U_{\nu+g/2}$, $\bar{v} = s(2X_0 - 1)v$. Положим $u_0 = u$, $u_k = (\delta + \gamma_1) \cdots (\delta + \gamma_k)u$, $k = 1, \dots, \tau - 1$; $\bar{v}_0 = \bar{v}$, $\bar{v}_k = (\delta + 1 - \gamma_{\tau-k+1}) \cdots (\delta + 1 - \gamma_\tau)\bar{v}$, $k = 1, \dots, \tau - 1$.

Интегрируя τ раз по частям, находим

$$\begin{aligned} \int \bar{L}_\nu(u) \bar{v} dz &= \int (\delta + \gamma_\tau) u_{\tau-1} \bar{v} dz - \int z \xi^{\nu\tau} u \bar{v} dz \\ &= z u_{\tau-1} \bar{v} - \int u_{\tau-1} \bar{v}_1 dz + \int z \xi^{(\nu+g/2)\tau} u \bar{v} dz = \dots \\ &= z \sum_{j=0}^{\tau-1} (-1)^j u_j \bar{v}_{\tau-j-1} - \int \bar{L}_\nu^*(\bar{v}) u dz, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\bar{L}_\nu^*(\bar{v}) = (\delta + 1 - \gamma_1) \cdots (\delta + 1 - \gamma_\tau) - \xi^{(\nu+g/2)\tau} \cdot z$.

Из (22) имеем $1 - \bar{\gamma} = 1 - 2X'_0 + \bar{\gamma}'$, где $\gamma'_1 = \gamma_1$, $\gamma'_{2k} = \gamma_{2k+1}$, $\gamma'_{2k+1} = \gamma_{2k}$, $k = 1, \dots, s$.

Следовательно, $\bar{L}_\nu^*(\bar{v}) = s(2X'_0 - 1) \cdot \bar{L}_{\nu+g/2}(v) = 0$; значит, из (26) ввиду $\bar{L}_\nu(u) = 0$ получаем

$$z \cdot \sum_{j=0}^{\tau-1} (-1)^j u_j \bar{v}_{\tau-j-1} = c(u, v) \in \mathbb{C},$$

или в обозначениях $v_0 = v$, $v_k = (\delta + \gamma'_{\tau-k+1}) \cdots (\delta + \gamma'_\tau)v$, $k = 1, \dots, \tau - 1$, с учетом $(\delta + 1 - \gamma_j)(s(2X'_0 - 1)v) = s(2X'_0 - 1)(\delta + \gamma'_j)v$ заключаем

$$s(2X'_0) \cdot \sum_{j=0}^{\tau-1} (-1)^j u_j v_{\tau-j-1} = c(u, v). \quad (27)$$

В частности, соотношение (27) справедливо для $u = f_\nu(z)$, $v = f_{\nu+g/2}(z)$. Далее покажем, что соотношения (27) являются искомыми базисными соотношениями. Для этого нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3. Пусть $m > 2$, функции $a_{ij} \in \Phi_\nu$, $i = 1, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, m$, алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, $\Delta_k = \det(a_{ij})_{i=1, \dots, m-1, j=1, \dots, m, j \neq k}$. Тогда функции $a_{1,1}, \dots, a_{1,m-1}, \Delta_1, \dots, \Delta_m$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по m . При $m = 3$ для доказательства леммы достаточно установить следующее: если

$$F_1 = \mathbb{C}(z)(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \quad \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)} F_1 = 6,$$

то

$$\left\{ a_1, a_2, b_1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

– базис трансцендентности поля F_1 над $\mathbb{C}(z)$. Из очевидных соотношений

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta_3, \quad b_1 \Delta_1 - b_2 \Delta_2 + b_3 \Delta_3 = 0, \quad a_1 \Delta_1 - a_2 \Delta_2 + a_3 \Delta_3 = 0$$

легко получаем рациональные выражения для b_2, b_3, a_3 в терминах $a_1, a_2, b_1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, поэтому утверждение леммы при $m = 3$ выполнено.

Проведем шаг индукции $m \rightarrow m + 1$. Пусть в условии леммы $m \rightarrow m + 1$ и для некоторого $\{a_{ij}\}$ утверждение леммы не выполнено, т.е.

$$\sum_{s_i \in \mathbb{Z}^+} r_{\bar{s}} a_{11}^{s_1} \cdots a_{1m}^{s_m} \Delta_1^{s_{m+1}} \cdots \Delta_{m+1}^{s_{2m+1}} = 0, \quad (28)$$

где все $r_{\bar{s}} \in \mathbb{C}(z)$, $r_{\bar{s}} \neq 0$, и суммирование в (28) проходит по некоторому конечному множеству $\bar{s} = (s_1, \dots, s_{2m+1})$.

Вычисляя в (28) коэффициент при старшей степени a_{m1}^t , получаем

$$\sum r_{\bar{s}} a_{11}^{s_1} \cdots a_{1m}^{s_m} \Delta_1^{s_{m+1}} \Delta_2'^{s_{m+2}} \cdots \Delta_{m+1}'^{s_{2m+1}} = 0, \quad (29)$$

где суммирование распространяется на все $\bar{s}$ такие, что $r_{\bar{s}} \neq 0$, $t = s_{m+2} + \cdots + s_{2m+1}$ максимально возможное;

$$\Delta_k' = \det(a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m-1, \quad j = 2, \dots, m+1, \quad j \neq k, \quad k \in \{2, \dots, m+1\}.$$

Раскладывая Δ_1 по последней строке, находим

$$\Delta_1 = \omega_2 a_{m2} + \cdots + \omega_{m+1} a_{m, m+1},$$

причем все $\omega_j \neq 0$, $\omega_i \in F_2$, где $F_2 = \mathbb{C}(z)(a_{ij}, i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, m+1)$.

Так как $a_{m2}, \dots, a_{m, m+1}$ алгебраически независимы над F_2 , то Δ_1 трансцендентен над F_2 , поэтому из равенства (29) получаем нетривиальное соотношение вида

$$\sum r_{\bar{s}} a_{11}^{s_1} \cdots a_{1m}^{s_m} \Delta_2'^{s_{m+2}} \cdots \Delta_{m+1}'^{s_{2m+1}} = 0.$$

Так как $\Delta_2', \dots, \Delta_{m+1}'$ не содержат a_{11} , то из последнего соотношения аналогично имеем

$$\sum r_{\bar{s}} a_{12}^{s_2} \cdots a_{1m}^{s_m} \Delta_2'^{s_{m+2}} \cdots \Delta_{m+1}'^{s_{2m+1}} = 0. \quad (30)$$

Равенство (30) противоречит индуктивному предположению для множества $\{a_{ij}, i = 1, \dots, m-1, j = 2, \dots, m+1\}$, и лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi_0, \dots, \varphi_{\tau-1}$ — произвольный базис U_ν . Тогда функции

$$\varphi_0, \delta\varphi_0, \dots, \delta^{\tau-2}\varphi_0, \delta^j\varphi_i, \quad i = 0, \dots, \tau-1, \quad j = 1, \dots, \tau-1,$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_1, \dots, y_r \in U_\nu$.

Пусть $W(y_1, \dots, y_r) = \det(\delta^{j-1} y_i)_{i,j=1,\dots,r}$ – вронскиан. Из (22) и уравнения (20) имеем

$$\delta W(\varphi_0, \dots, \varphi_{\tau-1}) = -\tau X'_0 \cdot W(\varphi_0, \dots, \varphi_{\tau-1}),$$

т.е.

$$W(\varphi_0, \dots, \varphi_{\tau-1}) = c \cdot s(-\tau X'_0), \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ввиду (25) выполнено $\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)}(\delta^j \varphi_i, i, j = 0, \dots, \tau-1) = \tau^2 - 1$.

С другой стороны, раскладывая $W(\varphi_0, \dots, \varphi_{\tau-1})$ по первой строке, находим

$$\varphi_0 W_0 + \dots + \delta^{\tau-1} \varphi_{\tau-1} W_{\tau-1} = c \cdot s(-\tau X'_0),$$

где все

$$\begin{aligned} W_k &\in F_1 = \mathbb{C}(z)(\delta^j \varphi_i, i = 1, \dots, \tau-1, j = 0, \dots, \tau-1), \\ W_{\tau-1} &= W(\varphi_1, \dots, \varphi_{\tau-1}) \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\delta^{\tau-1} \varphi_0$ алгебраичен над $F_1(\varphi_0, \dots, \delta^{\tau-2} \varphi_0)$,

$$\tau^2 - 1 = \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)}(\delta^j \varphi_i, i, j = 0, \dots, \tau-1, (i, j) \neq (0, \tau-1)),$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\nu \in \{0, \dots, g/2 - 1\}$, $u \in U_\nu$, $v \in U_{\nu+g/2}$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Тогда $\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)}(u, \delta u, \dots, \delta^{\tau-1} u, v, \delta v, \dots, \delta^{\tau-1} v) = 2\tau - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что (27) – единственное соотношение над $\mathbb{C}(z)$ между рассматриваемыми элементами. Рассмотрим два случая: а) $c(u, v) \neq 0$; б) $c(u, v) = 0$.

а) Фиксируем $\{\psi_0 = u/c(u, v), \psi_1, \dots, \psi_{\tau-1}\}$ – базис U_ν такой, что $c(\psi_0, v) = 1$, $c(\psi_i, v) = 0$, $i = 1, \dots, \tau-1$, $W(\psi_0, \dots, \psi_{\tau-1}) = s(-\tau X'_0)$. Такой базис существует ввиду линейности $c(u, v)$ по u (см. также доказательство леммы 4).

Положим $a_{ij} = (-1)^j (\delta + \gamma_1) \cdots (\delta + \gamma_j) \psi_i$, $i, j = 0, \dots, \tau-1$. Из равенств (27) при $u = \psi_i$, $i = 0, \dots, \tau-1$, получаем

$$v = v_0 = \frac{\det B}{s(2X'_0) \det A},$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,\tau-1}$, $B = (a_{ij})_{i=1,\dots,\tau-1, j=0,\dots,\tau-2}$, т.е.

$$\det A = (-1)^{\tau(\tau-1)/2} W(\psi_0, \dots, \psi_{\tau-1}), \quad \det B = (-1)^{(\tau-1)(\tau-2)/2} W(\psi_1, \dots, \psi_{\tau-1}),$$

и поэтому

$$v = s((\tau-2)X'_0) \tilde{v}, \quad \tilde{v} = W(\psi_1, \dots, \psi_{\tau-1}) \in \Phi_\nu. \quad (31)$$

Для доказательства леммы в рассматриваемом случае достаточно показать, что

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)}(\psi_0, \delta \psi_0, \dots, \delta^{\tau-2} \psi_0, \tilde{v}, \delta \tilde{v}, \dots, \delta^{\tau-1} \tilde{v}) = 2\tau - 1. \quad (32)$$

Введем обозначение

$$\omega_k = \det(\delta^j \psi_i)_{i=1,\dots,\tau-1, j=0,\dots,\tau-1, j \neq \tau-1-k}, \quad k = 0, \dots, \tau-1; \quad (33)$$

при этом из (31) и (33) имеем $\omega_0 = \tilde{v}$, $\omega_1 = \delta\tilde{v}$. Дифференцируя ω_k и учитывая, что $\psi_1, \dots, \psi_{\tau-1} \in U_\nu$, получаем соотношение вида

$$\omega_i = \delta^i \tilde{v} + r_{i,i-1} \delta^{i-1} \tilde{v} + \dots + r_{i,0} \tilde{v}, \quad i = 0, \dots, \tau-1,$$

где все $r_{i,j} \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Следовательно, соотношение (32) равносильно условию

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)}(\psi_0, \delta\psi_0, \dots, \delta^{\tau-2}\psi_0, \omega_0, \dots, \omega_{\tau-1}) = 2\tau - 1. \quad (34)$$

Согласно леммам 3, 4 $\omega_0, \dots, \omega_{\tau-1}$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, а по лемме 4 $\psi_0, \delta\psi_0, \dots, \delta^{\tau-2}\psi_0$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)(\omega_0, \dots, \omega_{\tau-1})$, что доказывает равенство (34) и лемму в случае $c(u, v) \neq 0$.

б) Очевидно, что существует $\psi \in U_\nu$ такой, что $c(\psi, v) \neq 0$, так как в противном случае из (27) следует, что $v = 0$.

Фиксируем базис U_ν $\{\psi_0 = \psi/c(\psi, v), \psi_1 = u, \psi_2, \dots, \psi_{\tau-1}\}$ такой, что выполнены все те же условия, что и в случае а).

Аналогично случаю а) получаем, что утверждение леммы равносильно условию (в обозначениях (33))

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)}(\psi_1, \delta\psi_1, \dots, \delta^{\tau-2}\psi_1, \omega_0, \dots, \omega_{\tau-1}) = 2\tau - 1. \quad (35)$$

Равенство (35) непосредственно следует из лемм 3, 4. Лемма доказана.

Рассмотрим равенство (27) при $u = f_\nu(z)$, $v = f_{\nu+g/2}(z)$.

Положим (см. (22))

$$\tilde{c} = \begin{cases} 0, & \text{если } X'_0 \neq 0, \\ (-1)^s X_1'^2 \dots X_s'^2, & \text{если } X'_0 = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Как и при выводе равенства (11), имеем $c(u, v) = 0$ в случае $X'_0 \neq 0$. В случае $X'_0 = 0$, подставляя в (27) вместо u, v соответствующие степенные ряды, получаем $c(u, v) = \gamma'_2 \dots \gamma'_\tau = \gamma_2 \dots \gamma_\tau = (-1)^s X_1'^2 \dots X_s'^2 = \tilde{c}$. Поэтому из (36) находим

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= f_\nu(z) \cdot (\delta + \gamma'_2) \dots (\delta + \gamma'_\tau) f_{\nu+g/2}(z) + f_{\nu+g/2}(z) \cdot (\delta + \gamma_1) \dots (\delta + \gamma_{\tau-1}) f_\nu(z) \\ &+ \sum_{j=1}^{\tau-2} (-1)^j (\delta + \gamma_1) \dots (\delta + \gamma_j) f_\nu(z) \cdot (\delta + \gamma'_{j+2}) \dots (\delta + \gamma'_\tau) f_{\nu+g/2}(z) \\ &= \sum_{k,r=0}^{\tau-1} \alpha_{kr} \left(\frac{1}{\tau} \delta\right)^k f_\nu(z) \left(\frac{1}{\tau} \delta\right)^r f_{\nu+g/2}(z), \end{aligned} \quad (37)$$

где все $\alpha_{kr} \in \mathbb{Q}$, $\alpha_{kr} = 0$, при $k + r \geq \tau$.

Осуществляя в равенстве (37) замену $z \rightarrow (z/\tau)^\tau$ и учитывая (19), получаем соотношение

$$\sum_{k,r=0}^{\tau-1} \alpha_{kr} \delta^k \varphi_{\overline{\gamma}}(\xi^\nu z) \cdot \delta^r \varphi_{\overline{\gamma}}(\xi^{\nu+g/2} z) = \tilde{c}. \quad (38)$$

Введем для $\nu = 0, \dots, g/2 - 1$ обозначения

$$\begin{aligned} \overline{z}_\nu &= (z_{0,\nu}, \dots, z_{2\tau-1,\nu}), \\ \overline{z} &= (\overline{z}_0, \dots, \overline{z}_{g/2-1}) = \left(z_{i,\nu}, i = 0, \dots, 2\tau-1, \nu = 0, \dots, \frac{g}{2} - 1 \right), \\ Q_\nu(\overline{z}_\nu) &= \sum_{k,r=0}^{\tau-1} \alpha_{kr} z_{k,\nu} z_{\tau+r,\nu} - \tilde{c}. \end{aligned} \quad (39)$$

ЛЕММА 6. Идеал J , порожденный в кольце $\mathbb{C}(z)[\bar{z}]$ набором $g/2$ многочленов $\{Q_0(\bar{z}_0), \dots, Q_{g/2-1}(\bar{z}_{g/2-1})\}$, является идеалом всех алгебраических связей над $\mathbb{C}(z)$ между функциями (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая равенство (31) при $v = f_{\nu+g/2}$, находим, что $\tilde{v} = s((2-\tau)X'_0) \cdot f_{\nu+g/2}(z) \in \Phi_\nu$, $\nu = 0, \dots, g/2 - 1$, поэтому из (37) и леммы 5 получаем, что для элементов поля Φ_ν выполнено

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{C}(z)}(f_\nu(z), \dots, \delta^{\tau-1}f_\nu(z), \tilde{v}, \dots, \delta^{\tau-1}\tilde{v}) = 2\tau - 1.$$

Ввиду (24) аналогично доказательству леммы 2 заключаем, что база трансцендентности поля Φ может быть получена объединением баз трансцендентности полей $\Phi_0, \dots, \Phi_{g/2-1}$; в частности, степень трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ набора функций (17) равна $g(2\tau - 1)/2 = t - g/2$.

Покажем, что все многочлены (39) неприводимы в кольце $\overline{\mathbb{C}(z)}[\bar{z}_\nu]$. Предположим противное. Тогда многочлен

$$\tilde{Q}_\nu = \sum_{k,r=0}^{\tau-1} \alpha_{k,r} z_{k,\nu} z_{\tau+r,\nu} \quad (40)$$

приводим в кольце $\overline{\mathbb{C}(z)}[\bar{z}_\nu]$. Но многочлен $\tilde{Q}_\nu$ однороден и имеет степень 1 по каждой группе переменных $(z_{0,\nu}, \dots, z_{\tau-1,\nu})$, $(z_{\tau,\nu}, \dots, z_{2\tau-1,\nu})$. Поэтому

$$\tilde{Q}_\nu = (h_0 z_{0,\nu} + \dots + h_{\tau-1} z_{\tau-1,\nu})(\tilde{h}_0 z_{\tau,\nu} + \dots + \tilde{h}_{\tau-1} z_{2\tau-1,\nu}), \quad (41)$$

где все $h_i, \tilde{h}_i \in \overline{\mathbb{C}(z)}$. Из (37) и (41) имеем

$$\alpha_{0,\tau-1} = \tau^{\tau-1} = h_0 \cdot \tilde{h}_{\tau-1}, \quad \alpha_{\tau-1,0} = \tau^{\tau-1} = h_{\tau-1} \tilde{h}_0,$$

т.е. $\tilde{h}_{\tau-1} \neq 0$, $h_{\tau-1} \neq 0$. Тогда из (41) $\alpha_{\tau-1,\tau-1} = h_{\tau-1} \cdot \tilde{h}_{\tau-1} \neq 0$, что невозможно ввиду условия $\alpha_{k,r} = 0$ при $k+r \geq \tau$.

Итак, многочлены (39) неприводимы в кольце $\overline{\mathbb{C}(z)}[\bar{z}_\nu]$. В полной аналогии с доказательством леммы 2 заключаем, что идеал J простой с общей точкой (17). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим последовательно случаи 1), 2.1), 2.2) и 2.3).

1) Положим $y_r = \delta^r \varphi$, $r = 0, \dots, t-1$, $y_t = 1$. Функции $y_0, \dots, y_t$ составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеющей единственную особую точку $z = 0$ (система (4) работы [2]). Пусть ρ — простой идеал, порожденный всеми однородными по $z_0, \dots, z_t$ многочленами R кольца $\mathbb{C}[z, z_0, \dots, z_t]$ такими, что $R(z, y_0(z), \dots, y_t(z)) \equiv 0$; $\rho_\alpha = \{R(\alpha, z_0, \dots, z_t) \mid R \in \rho\}$ — однородный идеал кольца $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_t]$. Согласно следствию 1 теоремы 1 работы [2] для доказательства теоремы достаточно показать, что

- i) функции $y_0, \dots, y_t$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$;
- ii) идеал ρ_α прост.

Условие i) в этом и во всех остальных случаях выполняется (этот факт хорошо известен, см., например, [7, лемма 4.2] или [5, лемма 24]). Для проверки условия ii) ввиду замечания 1 достаточно ограничиться случаем (4). Условие ii) легко следует из леммы 1.

2.1) Утверждение теоремы в этом случае проще всего получить ввиду замечания 1 как непосредственное следствие теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

2.2) Перенумеруем последовательно функции набора (17), т.е. если $k = s\tau + l$, где $0 \leq l \leq \tau - 1$, $0 \leq s \leq g - 1$, то $y_k = \delta^l \varphi_{\overline{\gamma}}(\xi^s z)$, $k = 0, \dots, t - 1$. Согласно замечанию 1 достаточно установить справедливость условия ii) для набора функций (17). Обозначим для $s \in \{0, \dots, g - 1\}$ через $T_s \in \mathbb{C}[z_{s\tau}, \dots, z_{s\tau + \tau - 1}]$ многочлен, полученный подстановкой $z = \alpha$ и заменой $\overline{z}_s \rightarrow (z_{s\tau}, \dots, z_{s\tau + \tau - 1})$ в многочлене $P_s(\overline{z}_s)$ или $\overline{P}_s(\overline{z}_s)$ (см. формулировку леммы 2). Ввиду леммы 2 простота идеала ρ_α является следствием простоты идеала q , порожденного многочленами $T_0, \dots, T_{g-1}$ в кольце $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_{\tau-1}]$. Все многочлены T_s неприводимы в кольце $\mathbb{C}[z_{s\tau}, \dots, z_{s\tau + \tau - 1}]$ (см. лемму 1 и равенства (7), (9)), поэтому главный идеал (T_s) при всех $s = 0, \dots, g - 1$ определяет многообразие. Но тогда [8, с. 80] идеал q прост, что и доказывает теорему в случае 2.2).

2.3) Этот случай полностью аналогичен предыдущему. Следует лишь воспользоваться леммой 6 и доказанной в этой лемме неприводимостью многочленов (40) в кольце $\mathbb{C}[\overline{z}_\nu]$.

Теорема полностью доказана.

В заключение авторы выражают благодарность проф. Ю.В. Нестеренко, обратившему их внимание на задачи, связанные с линейной независимостью значений E -функций, и проф. Д. Бертрану за полезные обсуждения, особенно в части работы, относящейся к дифференциальным группам Галуа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E -функций (четный случай) // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 2. С. 273–284.
- [2] Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. О линейной независимости значений E -функций // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 93–108.
- [3] Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E -функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
- [4] Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций // Acta Arith. 1990. V. 53. № 5. Р. 453–471.
- [5] Салихов В.Х. Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел // Тр. ММО. 1988. Т. 51. С. 223–256.
- [6] Katz N. M. Exponential Sums and Differential Equations. Ann. of Math. Stud. V. 124. Princeton: Princeton Univ. Press, 1990.
- [7] Beukers F., Brownawell D., Heckman G. Siegel normality // Ann. of Math. 1988. V. 127. Р. 279–308.
- [8] Мерзляков Ю.И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.