Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Гордиенко, Гипотеза Реева и кохарактеры тождеств ассоциативных алгебр PI-экспоненты 1 и 2, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 815–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:22:53

Гипотеза Регева и кохарактеры тождеств ассоциативных алгебр PI-экспоненты 1 и 2

А. С. Гордиенко

Получен результат, подтверждающий гипотезу А. Регева для коразмерности ассоциативных алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2. Доказано, что последовательность кратностей неприводимых слагаемых в собственных кохарактерах алгебр PI-экспоненты 2 имеет, начиная с некоторого места, период 2, а для обычных кохарактеров алгебр PI-экспоненты 1 эта последовательность, постоянна.

Библиография: 10 названий.

В середине 80-х гг. С. А. Амицуrom и А. Реговом были выдвинуты гипотезы об асимптотическом поведении коразмерностей тождеств ассоциативных алгебр. Гипотеза Амицура была доказана Зайцевым и Джамбруно [1] в 1999 г. Гипотеза Регева была доказана Дренски для алгебр полиномиального роста [2], Реговом для конечномерных полупростых алгебр [3], Зайцевым и Джамбруно [4] для алгебр блочно-треугольных матриц. Кроме того, ее справедливость доказана для ряда других алгебр, асимптотику коразмерностей которых можно вычислить явно (см., например, [5]–[7]). Настоящая работа, в частности, посвящена доказательству гипотезы Регева для алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2.

Дренски показал, что при фиксированных нижних строчках последовательность кратностей неприводимых кохарактеров алгебр полиномиального роста периодична. В данной работе установлено, что эта последовательность, начиная с некоторого места, постоянна. Отсюда получено новое доказательство гипотезы Регева для алгебр PI-экспоненты 1. Также исследована периодичность последовательности собственных кохарактеров алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2.

Цель настоящей работы – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – алгебра с единицей (необязательно конечномерная) над полем F , $\text{char } F = 0$, причем $\text{PIexp } A = 2$. Тогда в алгебре A выполнена гипотеза Регева.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – алгебра с единицей над полем F , $\text{char } F = 0$, причем $\text{PIexp } A = 2$. Тогда существуют такие числа $p, \ell_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $\ell > \ell_1$ и $\nu \vdash \ell$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00485).

выполнено

$$\begin{aligned} k(\nu_1, \dots, \nu_s) &= k(\nu_1 + 2, \dots, \nu_s) && \text{при } \nu_1 > p, \\ k(\nu_1, \dots, \nu_s) &= k(\nu_1, \dots, \nu_s, 1, 1) && \text{при } s > p, \end{aligned}$$

где $\eta_\ell = \sum_{\nu \vdash \ell} k(\nu) \chi_\nu$ – разложение собственного кохарактера в неприводимые.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – алгебра (необязательно с единицей) над полем F характеристики $\text{char } F = 0$, причем $\text{PIexp } A = 1$. Тогда существуют такие числа $p, n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_1$ и $\lambda \vdash n$ выполнено

$$m(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = m(\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_s) \quad \text{при } \lambda_1 > p,$$

где $\chi_n = \sum_{\lambda \vdash n} m(\lambda) \chi_\lambda$ – разложение обычного кохарактера в неприводимые.

Введение. Напомним основные понятия и фиксируем обозначения, используемые в работе (см., например, [8]). С методами теории представлений симметрических групп и их применением с целью изучения тождественных соотношений можно познакомиться также в [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра $F\langle X \rangle$ всех многочленов от счетного набора некоммутирующих переменных $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ называется *свободной ассоциативной алгеброй* над полем F . Многочлен $f \in F\langle X \rangle$ называется *тождеством* для F -алгебры A , если он обращается в нуль при любой подстановке элементов из A вместо переменных X .

Совокупность $\text{Id}(A)$ тождеств алгебры A является T -идеалом в $F\langle X \rangle$. Обозначим через P_n пространство полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогда число

$$c_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$$

называется *n -й коразмерностью* алгебры A . Зайцев и Джамбруно показали [1], что для всякой ассоциативной алгебры A существуют такие константы $C_1, C_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 > 0$, и число $d \in \mathbb{Z}_+$, называемое *PI-экспонентой* алгебры A , что

$$C_1 n^{q_1} d^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{q_2} d^n$$

(обозначение: $\text{PIexp } A = d$). Алгебры PI-экспоненты 1 называют *алгебрами полиномиального роста*. Говорят, что в алгебре A выполнена *гипотеза Регева*, если существуют числа $C \in \mathbb{R}$ и $d, q \in \mathbb{Z}$, причем $d \geq 0$, такие, что

$$c_n(A) \sim C n^{q/2} d^n \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

(Здесь $f \sim g$, если $\lim f/g = 1$).

На

$$\frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$$

определена естественная структура FS_n -модуля. Характер $\chi_n(A)$ представления группы S_n на пространстве $P_n/(P_n \cap \text{Id}(A))$ называется n -м *кохарактером* алгебры A . Как известно, каждому неприводимому представлению S_n соответствует разбиение $\lambda \vdash n$ числа n на положительные слагаемые. Обозначим через

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in C_{T_\lambda} \\ \rho \in R_{T_\lambda}}} (-1)^\sigma \rho \sigma$$

квазиидемпотент, отвечающий таблице Юнга T_λ .

Линейные комбинации произведений левонормированных коммутаторов от переменных x_i называются *собственными многочленами*. Обозначим через Γ_ℓ пространство собственных полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_\ell$. Числа

$$\gamma_\ell = \dim \frac{\Gamma_\ell}{\Gamma_\ell \cap \text{Id}(A)}$$

называются *собственными коразмерностями*. Аналогично определяются и *собственные кохарактеры* $\eta_\ell(A)$ – характеры представления группы S_ℓ на пространстве $\Gamma_\ell/(\Gamma_\ell \cap \text{Id}(A))$.

Напомним известный результат из теории представлений группы S_n .

ЛЕММА 1. Пусть T_λ – таблица Юнга, отвечающая разбиению $\lambda \vdash n$,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_m,$$

где M_i – неприводимые FS_n -модули с характеристиками χ_λ , тогда m равно максимальному числу линейно независимых элементов вида $e_{T_\lambda} f \in M$. В частности, если $e_{T_\lambda} M = 0$, то и $M = 0$.

В силу теоремы Кемера [10] $\text{Id}(A) = \text{Id}(G(B))$, где $B = B^{(0)} + B^{(1)}$ – некоторая конечномерная супералгебра, $G = G^{(0)} + G^{(1)}$ – алгебра Грассмана с единицей, а

$$G(B) = B^{(0)} \otimes G^{(0)} + B^{(1)} \otimes G^{(1)}$$

– грассманова оболочка супералгебры B .

Согласно теореме Веддерберна–Мальцева для супералгебр, $B = B_{ss} + J$, где J – радикал, B_{ss} – максимальная полупростая суперподалгебра. Так как при расширении основного поля коразмерности не меняются, можно считать поле алгебраически замкнутым, т.е. B_{ss} – прямая сумма простых супералгебр вида $M_n(F) + 0$,

$$M_{k,l}(F) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} k \times k & 0 \\ \hline 0 & l \times l \end{array} \right) \right\} + \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & k \times l \\ \hline l \times k & 0 \end{array} \right) \right\}$$

и $M_s(F) + cM_s(F)$, где c – нечетный элемент, $c^2 = 1$.

Если $\text{PIexp } A \leq 3$ (см. алгебраическую характеристику в [1]), то

$$B_{ss} = \bigoplus_{k=1}^s Fe_k \oplus \bigoplus_{\ell=s+1}^t (Fe_\ell + Fc_\ell)$$

– прямая сумма полей и двумерных супералгебр. Здесь $e_k^2 = e_k$, где $k = 1, \dots, t$, и $c_\ell^2 = e_\ell$, где $\ell = s + 1, \dots, t$.

Пусть $p \in \mathbb{N}$ – такое число, что $J^p = 0$, $J^{p-1} \neq 0$.

1. Общая схема. Фиксируем число $q \in \mathbb{N}$. Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ заданы множества $\mathcal{M}^{(n)} \subseteq P_n$, $S_n \mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{M}^{(n)}$. Обозначим $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}^{(n)}$, $\mathcal{M}_0 = \bigcup_n \mathcal{M}_0^{(n)}$, где $\mathcal{M}_0^{(n)}$ – некоторые заданные множества полилинейных многочленов от переменных $\xi, x_1, \dots, x_n$, а $|\mathcal{M}_0^{(n)}|, |\mathcal{M}^{(n)}| < \infty$.

Пусть на $\mathcal{M}_0$ задано правило R , которое позволяет для любого набора переменных

$$x_{i_k}, \quad i_k > 2p, \quad 1 \leq k \leq \ell q, \quad \ell q \geq p(q+1), \quad \ell \in \mathbb{N},$$

заменять все вхождения буквы ξ на выражения $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_{\ell q}})$, в которых переменные x_{i_k} записаны определенным образом, возможно, с участием квадратных скобок и запятых. Результат применения правила лежит в $\mathcal{M}$. Будем говорить, что многочлен $f \in \mathcal{M}$ *выводится* из $f_0 \in \mathcal{M}_0$, если он получен применением правила R .

Пусть фиксировано число $t \in \{0, 1\}$; $B = B^{(0)} + B^{(1)}$ – конечномерная супералгебра;

$$D = G(J) + F \cdot d \otimes G^{(t)} \subseteq G(B)$$

– подпространство в ее грассмановой оболочке, $d \in B^{(t)}$.

Обозначим через M_n^{Id} подпространство многочленов из $M_n = \langle \mathcal{M}^{(n)} \rangle_F$, обращающихся в нуль при подстановке элементов из D .

Считаем, что выполнены следующие два условия:

- 1) существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что всякий $f \in \mathcal{M}^{(n)}$, $n \geq n_0$, либо выводится из некоторого $f_0 \in \mathcal{M}_0$, либо лежит в M_n^{Id} ;
- 2) пусть $f_n \in M_n$ и $f_{n+q} \in M_{n+q}$ были выведены из $f_0 \in \mathcal{M}_0$, причем при выводе f_n букву ξ заменили на выражение $R(W_1, x_i, W_2)$, где W_1, W_2 – некоторые наборы переменных, а при выводе f_{n+q} букву ξ заменили на

$$R(W_1, x_i, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+q}, W_2);$$

тогда значения f_n и f_{n+q} на всех наборах таких, что в переменные $x_i, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+q}$ подставляются элементы из $d \otimes G^{(t)}$, совпадают с точностью до множителя $\otimes G$.

Нас будут интересовать три конкретных примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $q = 1$, $\mathcal{M}^{(n)} = S_n \cdot x_1 x_2 \cdots x_n$, $\mathcal{M}_0$ – все полилинейные одночлены от $\xi, x_1, x_2, \dots$; $R(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{\ell q}}) = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{\ell q}}$. Понятно, что при

$$n \geq (2p+1)(p(1+1)+1)$$

всякий одночлен из P_n выводится из некоторого одночлена из $\mathcal{M}_0$. $B_{ss} = Fa$, $a^2 = a$, $t = 0$, $d = a$. Тогда $dd = d$, и условие 2) выполнено.

ПРИМЕР 2. Пусть $q = 2$, $t = 0$, $B_{ss} = Fa \oplus Fb$, $a + b = 1$, $B_{ss}^{(1)} = 0$, $d = a$, $\mathcal{M}$ – собственные полилинейные одночлены, $\mathcal{M}_0$ – полилинейные произведения не более $p-1$ длинных коммутаторов букв $\xi, x_1, x_2, \dots$. Правило R позволяет делать замену

$$[\dots, \xi, \dots] \mapsto [\dots, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{\ell q}}, \dots].$$

В алгебре $G(B)$ выполнено тождество $[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2p-1}, x_{2p}] \equiv 0$, так как образ всякого коммутатора лежит в радикале. Поэтому при

$$n \geq (p-1)((2p+1)(p(2+1)+1)+1)$$

всякий одночлен из $\mathcal{M}^{(n)}$ выводится из некоторого одночлена из $\mathcal{M}_0$. Так как

$$[\dots, a, a, a, \dots] = [\dots, a, \dots],$$

то условие 2) выполнено.

ПРИМЕР 3. Пусть $q = 2$, $t = 1$, $B_{ss}^{(0)} = F \cdot 1$, $B_{ss}^{(1)} = Fc$, $c^2 = 1$, $d = c$, $\mathcal{M}$ – собственные полилинейные одночлены, $\mathcal{M}_0$ – полилинейные произведения переменной ξ и коммутаторов длины не более $2p$, среди которых не более $p - 1$ имеют длины 3 и больше. Правило R позволяет делать замену

$$\xi \mapsto [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{\ell q-1}}, x_{i_{\ell q}}].$$

Заметим, что для всех $u \in G(B)$ выполнено

$$[u, c \otimes e_1, c \otimes e_2] = [u(c \otimes e_1) - (c \otimes e_1)u, c \otimes e_2] = (u - cuc)(1 \otimes (e_1 e_2 + e_2 e_1)) = 0.$$

Поэтому в $G(B)$ выполнены тождества $[x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}] \equiv 0$ и

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6] \cdots [x_{3s-2}, x_{3s-1}, x_{3s}] \equiv 0 \quad \text{при} \quad 2s \geq p.$$

Следовательно, при

$$n \geq 2p^2 + (2p + 1)(2 + p(2 + 1))$$

всякий одночлен из $\mathcal{M}^{(n)}$ выводится из некоторого одночлена из $\mathcal{M}_0$. Так как

$$[c \otimes e_1, c \otimes e_2] = 1 \otimes e_1 e_2,$$

то условие 2) выполнено.

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash n$, причем

$$\sum_{i=2}^s \lambda_i < p \quad \text{для} \quad t = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^s (\lambda_i - 1) < p \quad \text{для} \quad t = 1,$$

$$T_\lambda = \begin{cases} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{переменные } x_r, \\ 1 \leq r \leq 2p \\ \hline x_{2p+1} & x_{2p+2} & \dots & x_n \\ \hline \end{array} & \text{при } t = 0, \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{переменные } x_r, \\ 1 \leq r \leq 2p \\ \hline x_{2p+1} \\ \hline x_{2p+2} \\ \hline \dots \\ \hline x_n \\ \hline \end{array} & \text{при } t = 1, \end{cases}$$

а $w(\lambda)$ – максимальное число линейно независимых многочленов вида $e_{T_\lambda} f$ в фактормодуле M_n/M_n^{Id} . Тогда существует такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_1$ выполнено

$$w(\lambda) = \begin{cases} w(\lambda_1 + q, \lambda_2, \dots, \lambda_s) & \text{при } t = 0, \\ w(\lambda_1, \dots, \lambda_s, 1^q) & \text{при } t = 1. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее считаем, что все e_i в подставляемых элементах $\alpha \otimes e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m}$ различны, т.е. результат подстановки есть некий элемент $\gamma \otimes \beta$, где $\beta \neq 0$. Тогда конкретные значения номеров i_j не играют роли, значение подстановки зависит только от четности m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. При $t = 0$ многочлены $e_{T_\lambda} f$ симметричны по переменным x_r , $r > 2p$, а при $t = 1$ косимметричны. Поэтому для вычисления их значения (с точностью до множителя $\otimes G$) достаточно задать набор элементов

$$\Delta = (h_1, \dots, h_{2p}, \{u_1, u_2, \dots, u_L\}), \quad h_i \in D, \quad u_k \in J.$$

Подстановка осуществляется следующим образом: вместо переменных x_r , где $1 \leq r \leq 2p$, подставляются соответствующие h_i . Вместо переменных x_r , где $2p < r \leq n$, подставляются L элементов $u_i \otimes w$ из $G(J)$, $w \in G$, и $n - L$ элементов $d \otimes z$, $z \in G^{(t)}$. В силу замечания и конечности B число различных подстановок Δ можно считать конечным. Пусть $\{\Delta_1, \dots, \Delta_\kappa\}$ – все такие подстановки.

Пусть $\mathcal{M}^{(n)} = \{f_1, \dots, f_\theta\}$,

$$e_{T_\lambda} f_r(\Delta_i) = \left(\sum_v H_r^{i,v} w_v \right) \otimes \beta,$$

$\beta \in G \setminus \{0\}$ общее для всех f_r , (w_v) – базис в B . Тогда количество линейно независимых многочленов вида $e_{T_\lambda} f$, где $\lambda \vdash n$, равно $\text{rank } H$. Мы считаем (i, v) единственным номером строки в матрице H . Понятно, что число строк равно $\kappa \cdot \dim B$, т.е. $w(\lambda) = \text{rank } H \leq \kappa \cdot \dim B$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Число же столбцов в матрице, вообще говоря, меняется с ростом n .

Итак, фиксируем исходное число $\tilde{n} \geq n_0$. Функция $\text{rank } H(\tilde{n} + \ell q)$ имеет максимум w_0 при некотором $N = \tilde{n} + \ell q$, так как ограничена и принимает только целые значения. Пусть соответствующие линейно независимые столбцы отвечают многочленам $e_{T_\lambda} \varphi_r$, $\varphi_r \in \mathcal{M}^{(n)}$, $1 \leq r \leq w_0$. Мы будем строить аналогичные системы линейно из w_0 независимых многочленов при больших n путем добавления ℓq новых букв на места ξ в тех многочленах $\tilde{\varphi}_r \in \mathcal{M}_0$, из которых φ_r были выведены. Тогда мы докажем, что $w(\lambda) = w_0$ при больших n .

Пусть произведена подстановка Δ в многочлены $e_{T_\lambda} g_1$ и $e_{T_\mu} g_2$, $\lambda \vdash n_1$, $\mu \vdash n_2$, $n_1 = q\ell + n_2$, $\ell \in \mathbb{N}$, где λ и μ отличаются лишь числом клеточек в первой строке при $t = 0$ и первом столбце при $t = 1$, а g_1 и g_2 выведены из одного и того же многочлена. Тогда в выражениях $e_{T_\lambda} g_1(\Delta)$ и $e_{T_\mu} g_2(\Delta)$ окажутся сходные слагаемые, возможно отличающиеся на кратное q число элементов $d \otimes z$ между элементами радикала на местах ξ . В силу условия 2) значение сходных слагаемых в разных выражениях будет различаться разве лишь на общий для всех множитель $\otimes G$. Однако количество таких слагаемых в $e_{T_\lambda} g_1$ и $e_{T_\mu} g_2$ будет, вообще говоря, различным.

Значение многочлена от базисных элементов зависит от расположения и значений переменных вне участков ξ и порядка элементов из радикала внутри этих участков, а также от того, какой остаток при делении на q имеет количество элементов $d \otimes z$, которые стоят между элементами радикала.

Определим для слагаемого в многочлене, в который произведена подстановка Δ , следующие числа. Пусть m – число элементов из J , подставляемых в переменные первой строчки для $t = 0$ и первого столбца для $t = 1$ таблицы T_λ плюс число клеток

в остальных строчках (соответственно столбцах) таблицы, ℓ – число переменных из первой строчки (столбца), в которые подставлено значение вида $d \otimes z$, $z \in G^{(t)}$, и которые после действия симметризатора оказались за пределами участков ξ , k_v – число промежутков в ξ , заполненных $uq + v > 0$ элементами $d \otimes z$, $u \in \mathbb{Z}$.

Пусть φ_r были получены при помощи замены $\xi \mapsto R(W_r)$, W_r – некоторые переменные. Получим из $\tilde{\varphi}_r$ многочлены $\varphi_r^{(n)}$, где $n = N + uq$, $u \in \mathbb{N}$, при помощи замены $\xi \mapsto R(W_r, x_{N+1}, \dots, x_{N+uq})$. Тогда соответствующие $\varphi_r^{(n)}$ столбцы матрицы H имеют вид

$$H_r^{i,v}(n) = \sum_{\nu} \alpha_{\nu}(n) Q_r^{(\nu),i,v}.$$

Индексом ν мы занумеровали все наборы $(m, \ell, k_0, \dots, k_{q-1})$ такие, что $m < 2p$, $k_0 + \dots + k_{q-1} \leq p$. Параметр ℓ также принимает ограниченное число значений, так как число букв вне участка ξ в многочленах φ_r ограничено. При этом $Q_r^{(\nu),i,v}$ зависит только от φ_r , но не от n . Это компоненты суммы выражений с фиксированными параметрами $(m, \ell, k_0, \dots, k_{q-1})$, встречающихся в разложении $e_{T_i} \varphi_r^{(n)}(\Delta_i)$. Кратность $\alpha_{\nu}(n)$ – это число способов, которым можно расставить $n - m$ элементов $d \otimes z$, подставляемых в переменные первой строчки (столбца), по своим местам вне участка ξ и внутри него с учетом остатка при делении требуемого количества элементов на q . Таким образом,

$$\alpha_{\nu}(n) = \binom{n-m}{\ell} \ell! \cdot y(n-m-\ell, k_0, \dots, k_{q-1}),$$

где $y(n-m-\ell, k_0, \dots, k_{q-1})$ – число способов расставить $n-m-\ell$ букв d по $uq+j > 0$ штук на k_j мест для $j = 0, \dots, q-1$. Очевидно,

$$\begin{aligned} y(n-m-\ell, k_0, \dots, k_{q-1}) &= (n-m-\ell)! \cdot y_1(n-m-\ell, k_0, \dots, k_{q-1}) \\ &= (n-m-\ell)! \cdot y_2\left(\frac{1}{q}\left(n-m-\ell + \sum_{j=1}^{q-1} (q-j)k_j\right), \sum_{j=0}^{q-1} k_j\right) \\ &= (n-m-\ell)! \cdot \left(\frac{1}{q}\left(n-m-\ell + \sum_{j=1}^{q-1} (q-j)k_j\right), \sum_{j=0}^{q-1} k_j - 1\right). \end{aligned}$$

Здесь $y_1(n-m-\ell, k_0, \dots, k_{q-1})$ – число упорядоченных разбиений числа $n-m-\ell$ в сумму, в которой ровно k_j положительных слагаемых имеют остаток j при делении на q , $y_2(a, b)$ – число упорядоченных разбиений целого числа a на b положительных слагаемых. Таким образом,

$$\alpha_{\nu}(n) = (n-m)! \cdot \left(\frac{1}{q}\left(n-m-\ell + \sum_{j=1}^{q-1} (q-j)k_j\right), \sum_{j=0}^{q-1} k_j - 1\right).$$

Количество линейно независимых многочленов вида $e_{T_\lambda} \varphi_r^{(n)}$ – ранг подматрицы в H . Поделим каждую строчку на $(n - m_{\max})!$, тогда элементы подматрицы в H станут многочленами от n . Поэтому и миноры подматрицы будут многочленами от n , причем каждый либо будет иметь конечное число нулей, либо будет тождественным нулем. Поэтому всегда можно выбрать такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_1$ эти многочлены либо тождественные нули, либо не обращаются в нуль. Это означает, что при $n > n_1$ ранг системы столбцов в H , отвечающих $\varphi_r^{(n)}$, будет полным, т.е. $w(\lambda) \geq w_0$ при $n = \tilde{n} + \ell q > n_1$. А так как $w(\lambda) \leq w_0$, то получаем равенство. Взяв среди n_1 максимум по $\lambda \vdash \tilde{n}$ и по всем остаткам от $\tilde{n}$ при делении на q , получим утверждение леммы.

2. Доказательство теорем. Нам понадобятся следующие утверждения.

ЛЕММА 3. Пусть $B_{ss} = Fa \oplus Fb$, $B_{ss}^{(1)} = 0$. Если

$$\sum_{i=2}^s \nu_i \geq p,$$

то χ_ν в разложение η_ℓ не входит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \Gamma_\ell$. Докажем, что $e_{T_\nu} f \in \text{Id}(A)$ для всякой такой таблицы T_ν .

Зафиксируем базис в B , состоящий из элементов вида $1 \otimes z = (a+b) \otimes z$, $a \otimes z$, где $z \in G^{(0)} = ZG$, и базиса в $G(J)$. При проверке многочлена из P_n на принадлежность $\text{Id}(G(B))$ достаточно подставлять только базисные элементы. Если $g \in \Gamma_\ell$ и мы делаем подстановку $x_i = 1 \otimes z$, $z \in G^{(0)}$, для некоторого i , то многочлен g обращается в 0.

Поэтому достаточно подставлять не более $p - 1$ элементов из радикала, а во все остальные переменные подставлять $a \otimes z$. Но если мы распишем симметризацию по $\rho \in R_{T_\nu}$, то получим сумму многочленов, для каждого из которых существуют множества переменных

$$U_i, \quad i = 1, \dots, \nu_2, \quad \sum_{i=1}^{\nu_2} |U_i| \geq \nu_2 + p,$$

по которым он кососимметричен. Таким образом, в переменные каждого множества можно подставлять не более одного элемента вида $a \otimes z$ (иначе выражение обратится в 0). Отсюда в переменные должно подставляться не менее $(\nu_2 + p) - \nu_2 = p$ элементов из радикала, т.е. выражение обращается в 0.

ЛЕММА 4. Пусть $B_{ss} = Fe \oplus Fc$, $B_{ss}^{(0)} = Fe$, $B_{ss}^{(1)} = Fc$, $e^2 = c^2 = e$. Если

$$\sum_{i=1}^s (\nu_i - 1) \geq p,$$

то χ_ν в разложение η_ℓ не входит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \Gamma_\ell$. Докажем, что $e_{T_\nu} f \in \text{Id}(A)$ для всякой такой таблицы T_ν .

Зафиксируем базис в B , состоящий из элементов вида $e \otimes z$, где $z \in G^{(0)} = ZG$, $c \otimes w$, где $w \in G^{(1)}$, и базиса в $G(J)$.

Если $g \in \Gamma_\ell$ и мы делаем подстановку $x_i = e \otimes z$, $z \in G^{(0)}$, для некоторого i , то многочлен g обращается в 0.

Поэтому достаточно подставлять не более $p - 1$ элементов из радикала, а во все остальные переменные подставлять $c \otimes e_i$. Но многочлен $e_{T_\nu} f$ симметричен по строкам таблицы. Таким образом, в переменные каждой строки можно подставлять не более одного элемента вида $c \otimes e_i$ (иначе выражение обратится в 0). Отсюда в переменные должно подставляться не менее

$$\left(\sum_{i=1}^s \nu_i \right) - s = \sum_{i=1}^s (\nu_i - 1) \geq p$$

элементов из радикала, т.е. выражение обращается в 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Применяя леммы 1–4 к примерам 2 и 3, получаем теорему 2 в случае $B = Fa + Fb + J$ и $B = Fe + Fc + J$. Рассмотрим общий случай. Пусть

$$B_{ss} = \bigoplus_{k=1}^s Fe_k \oplus \bigoplus_{\ell=s+1}^t (Fe_\ell + Fc_\ell)$$

– прямая сумма полей и двумерных супералгебр.

Так как $\text{PIexp } A = 2$, то $e_i Je_k Je_l = 0$ для всех попарно различных i, k, l , причем $e_i Je_k = 0$, если $i \neq k$ и либо $i > s$, либо $k > s$. Отсюда, если полилинейный многочлен после подстановки идемпотентов и базисных элементов из J не обратился в 0, то либо существует $i \leq s$ и $k \leq s$, что подставляемые элементы лежат в

$$Fe_i + Fe_k + e_i Je_i + e_i Je_k + e_k Je_i + e_k Je_k$$

(на этой подалгебре $e_i + e_k$ действует как 1), либо существует $i > s$, что подставляемые элементы лежат в $Fe_i + Fc_i + e_i Je_i$.

Отсюда можно считать, что в полилинейный многочлен всякий раз подставляются $1 = \sum_{k=1}^s e_k$, элементы из J и один из e_i или c_i . При достаточно больших n в силу лемм 3 и 4 подмодуль, отвечающий длинной первой строке, зануляется при подстановке c_i , а отвечающий длинному первому столбцу – при подстановке e_i , и эти два случая не смешиваются. Кроме того, так как собственный многочлен обнуляется при подстановке 1, можно считать, что во все переменные подставляются e_i (соответственно, c_i), с одним и тем же индексом i . Увеличим число различных подстановок Δ в доказательстве леммы 2 по числу различных e_i (соответственно, c_i), на которые в этих подстановках надо заменить элемент d . Повторив доказательство леммы 2, получим, что теорема 2 верна и в общем случае.

Аналогично, применяя лемму 2 к примеру 1, получаем теорему 3. Используя формулы для размерности неприводимых FS_n -модулей находим, что последовательность $c_n(A) \sim Cn^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $C > 0$, для любой алгебры A , $\text{PIexp}(A) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Напомним, что если A – алгебра с единицей, то $c_n(A) = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \gamma_\ell$. Поэтому в силу теоремы 2 и формулы для размерности

неприводимых FS_n -модулей получаем, что

$$c_n(A) = \sum_{\ell=0}^{\ell_1} \binom{n}{\ell} \gamma_\ell + \sum_{\ell_1 < 2k \leq n} \binom{n}{2k} P_1(2k) + \sum_{\ell_1 < 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} P_2(2k+1),$$

где P_1 и P_2 – многочлены. Эти многочлены можно привести к виду

$$P_1(m) = \sum_{s=0}^t \alpha_s \frac{m!}{(m-s)!} \quad \text{и} \quad P_2(m) = \sum_{s=0}^t \beta_s \frac{m!}{(m-s)!}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_n(A) &= \sum_{\ell=0}^{\ell_1} \binom{n}{\ell} \gamma_\ell + \sum_{s=0}^t \alpha_s \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{\ell_1 < 2k \leq n} \binom{n-s}{2k-s} \\ &\quad + \sum_{s=0}^t \beta_s \frac{n!}{(n-s)!} \sum_{\ell_1 < 2k+1 \leq n} \binom{n-s}{2k+1-s} \\ &= \sum_{s=0}^t (\alpha_s + \beta_s) \frac{n!}{(n-s)!} 2^{n-s-1} + P(n), \end{aligned}$$

где $P(n)$ – некий многочлен. Таким образом, гипотеза Реева доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Giambruno, M. Zaicev, “Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate”, *Adv. Math.*, **142**:2 (1999), 221–243.
- [2] V. S. Drensky, “Relations for the cocharacter sequences of T -ideals”, *Proceedings of the International Conference on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Mal'cev*, part 2 (Novosibirsk, 1989), *Contemp. Math.*, **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 285–300.
- [3] A. Regev, “Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal”, *Israel J. Math.*, **48**:2–3 (1984), 246–250.
- [4] A. Giambruno, M. Zaicev, “Minimal varieties of algebras of exponential growth”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **6** (2000), 40–44.
- [5] D. Krakowski, A. Regev, “The polynomial identities of the Grassmann algebra”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **181** (1973), 429–438.
- [6] А. С. Гордиенко, “Коразмерность и кодлина одной пятимерной алгебры”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, № 4, 18–25.
- [7] А. С. Гордиенко, “Коразмерности коммутатора длины 4”, *УМН*, **62**:1 (2007), 191–192.
- [8] V. S. Drensky, *Free Algebras and PI-algebras*, Grad. Course in Algebra, Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.
- [9] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [10] А. Р. Кемер, “Представимость приведенных алгебр”, *Алгебра и логика*, **27**:3 (1988), 274–294.

А. С. Гордиенко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: gordienko_a_s@mail.ru

Поступило

11.04.2007

Исправленный вариант

25.09.2007