Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, C^* -алгебры, порожденные отображениями, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 694–703

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:24:02

C^* -Алгебры, порожденные отображениями

С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова

В работе исследуется ряд свойств C^* -подалгебр алгебры всех ограниченных операторов $B(l^2(X))$ на гильбертовом пространстве $l^2(X)$ с одним порождающим элементом T_φ , индуцированным отображением φ бесконечного множества X в себя. Приводится условие на φ , при котором оператор T_φ непрерывен, и показывается, что в этом случае изучение таких алгебр можно свести к изучению C^* -алгебр, порожденных конечным семейством частичных изометрий специального вида. Дается полное описание C^* -алгебр, порожденных с помощью инъективного отображения на X . Разобраны примеры некоторых C^* -алгебр, порожденных неинъективными отображениями.

Библиография: 12 названий.

Введение. C^* -Алгебры, порожденные изометрическими операторами, играют важную роль в различных вопросах квантовой механики и квантовой теории поля [1], [2]. Классическим примером таких C^* -алгебр являются алгебра Тёплица [3] и алгебра Кунца [4]. Первая порождается одним изометрическим оператором U , $U^*U = I$, $UU^* = P < I$, а вторая – конечным набором изометрических операторов $U_1, U_2 \dots U_n$ таких, что $U_1U_1^* + U_2U_2^* + \dots + U_nU_n^* = I$. Существует ряд обобщений данных алгебр, позволяющий существенно расширить круг исследований C^* -алгебр, имеющих приложения к физическим задачам [5]–[11]. В данной работе исследуются некоторые свойства C^* -алгебр, порожденных конечным семейством элементов частичной изометрии $U_1, U_2 \dots U_m$ таких, что

$$\begin{aligned} U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \dots + U_m^*U_m &= P, \\ U_1U_1^* + U_2U_2^* + \dots + U_mU_m^* &= Q, \end{aligned}$$

где P и Q – проекторы.

Именно к таким алгебрам сводится задача исследования C^* -алгебр, порожденных отображением некоторого множества X в себя. Под термином C^* -алгебра, порожденная отображением, понимается алгебра, порожденная оператором $T_\varphi \in B(l^2(X))$, который индуцируется отображением $\varphi: X \rightarrow X$. Работа состоит из пяти пунктов. В первом пункте приводится условие, при котором оператор T_φ на $l^2(X)$, порожденный отображением φ , является ограниченным. В следующих двух пунктах дается описание свойств операторов T_φ и T_φ^* . В четвертом пункте классифицируются C^* -алгебры, порожденные инъективным отображением φ . В последнем пункте описываются некоторые C^* -алгебры, порожденные неинъективным отображением.

1. Критерий расширения линейного отображения T_φ . Пусть X – некоторое множество, и $l^2(X)$ – множество всех комплекснозначных функций f на X , для которых справедливо неравенство $\sum_{x \in X} |f(x)|^2 < \infty$. Это множество есть гильбертово пространство относительно скалярного произведения $(f, g) = \sum_{x \in X} f(x)\bar{g}(x)$. Семейство функций $\{e_x\}_{x \in X}$ на X таких, что

$$e_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

образует ортонормированный базис в $l^2(X)$. Пусть $P(X)$ – пространство всех конечнозначных функций на X вида $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_{x_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Каждое отображение $\varphi: X \rightarrow X$ порождает линейный оператор на $P(X)$ такой, что

$$T_\varphi \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i e_{x_i} \right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_{\varphi(x_i)}.$$

Пусть $E_y = \{x \in X : \varphi(x) = y\}$ и $\gamma(y) = \text{card } E_y$ – мощность множества E_y .

ТЕОРЕМА 1.1. *Линейное отображение $T_\varphi: P(X) \rightarrow P(X)$ продолжается до ограниченного линейного оператора на $l^2(X)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(\varphi) = \sup_{y \in X} \text{card } E_y < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что $\gamma(\varphi) = \infty$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой $y \in X$, что $\gamma(y) > n$. Пусть $y \in X$ и $\text{card } E_y > n$, т.е. $E_y = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, где $\varphi(x_k) = y$ и $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$. Конечная комбинация $\sum_{k=1}^n e_{x_k}/k$ принадлежит $P(X)$, и ее норма не превосходит $(\sum_{k=1}^n 1/k^2)^{1/2} < \sqrt{2}$. С другой стороны,

$$\left\| T_\varphi \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e_{x_k} \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e_y \right\| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Таким образом, для любого n найдется $f \in P(X)$ такой, что $\|f\| < \sqrt{2}$ и $\|T_\varphi f\| > \sum_{k=1}^n 1/k$. Следовательно, T_φ не является ограниченным на $P(X)$ и, соответственно, не продолжим на $l^2(X)$.

Достаточность. Пусть $\gamma(\varphi) < \infty$. Элемент $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_{x_k}$ из $P(X)$ представим в виде

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k e_{x_k} = \sum_i \sum_{x_j \in E_{y_i}} \alpha_{ij} e_{x_j}.$$

Тогда

$$\left\| T_\varphi \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_{x_k} \right) \right\|^2 = \left\| \sum_i \sum_j \alpha_{ij} e_{y_i} \right\|^2 = \left\| \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} \right) e_{y_i} \right\|^2 = \sum_i \left| \sum_j \alpha_{ij} \right|^2.$$

Так как $j \leq M = \gamma(\varphi)$, то $\sum_j |\alpha_{ij}|^2 \leq M^2 \max_j |\alpha_{ij}|^2$. Отсюда

$$\sum_i \left| \sum_j \alpha_{ij} \right|^2 \leq M^2 \sum_i \max_j |\alpha_{ij}|^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = M^2 \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e_{x_k} \right\|^2.$$

Следовательно, T_φ ограничен на $P(X)$, и потому в силу плотности $P(X)$ в $l^2(X)$ продолжается до ограниченного оператора на $l^2(X)$.

В дальнейшем везде будем предполагать, что $\gamma(\varphi) = M < \infty$ и продолжение T_φ до ограниченного линейного оператора на $l^2(X)$ также будем обозначать T_φ .

2. Собственные векторы операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$. Обозначим через T_φ^* оператор, сопряженный к T_φ .

ЛЕММА 2.1. *Оператор T_φ^* удовлетворяет следующим равенствам:*

- а) $T_\varphi^* e_y = \sum_{x \in E_y} e_x$;
- б) $T_\varphi^* e_y = e_y \circ \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Скалярное произведение $(T_\varphi^* e_y, e_x) = (e_y, e_{\varphi(x)})$ равно 1, если $\varphi(x) = y$, т.е. $x \in E_y$, и равно нулю в противном случае. Этим свойством обладает и вектор $e_{x_1} + e_{x_2} + \dots + e_{x_n}$, где $e_{x_i} \in E_y$, так как $(e_{x_1} + e_{x_2} + \dots + e_{x_n}, e_x) = 1$, если $e_{x_i} \in E_y$, и равно нулю, если $e_{x_i} \notin E_y$. Следовательно, $T_\varphi^* e_y = \sum_{x \in E_y} e_x$, если $\gamma(y) \neq 0$. Если же $\gamma(y) = 0$, т.е. $E_y = \emptyset$, то $T_\varphi^* e_y = 0$.

б) Из а) следует, что для всех $y \in X$ функция $T_\varphi^* e_y(X)$ принимает значение 1, если $x \in E_y$, и значение 0 в противоположном случае. Легко проверить, что и функция $(e_y \circ \varphi)(X) = e_y(\varphi(x))$ есть характеристическая функция множества E_y . Поэтому $T_\varphi^* e_y = e_y \circ \varphi$.

Перейдем к изучению свойств положительных операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$.

ЛЕММА 2.2. *Для операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ выполняются следующие равенства:*

- а) $T_\varphi T_\varphi^* e_y = \gamma(y) e_y$;
- б) $T_\varphi^* T_\varphi e_y = \sum_{x \in E_{\varphi(y)}} e_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 2.1, а).

Отметим, что множество тех y из X , для которых $\gamma(y) \neq 0$, совпадает с множеством $\varphi(X)$.

Пусть

$$g_y = \frac{1}{\sqrt{\gamma(y)}} \sum_{i=1}^{\gamma(y)} e_{x_i},$$

где $x_i \in E_y$. Очевидно, что $\|g_y\| = 1$ для всех $y \in \varphi(X)$.

ЛЕММА 2.3. *Для семейства функций g_y , $y \in \varphi(X)$, справедливы следующие утверждения:*

- а) *эти функции являются попарно ортогональными;*
- б) $T_\varphi g_y = \sqrt{\gamma(y)} e_y$;
- в) $T_\varphi^* T_\varphi g_y = \gamma(y) g_y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из определения g_y следует, что если $y_1 \neq y_2$, то выполнено $E_{y_1} \cap E_{y_2} = \emptyset$. Поэтому функция g_{y_1} ортогональна к g_{y_2} и семейство g_y , $y \in \varphi(X)$, является ортонормированным.

б) Имеем

$$T_\varphi g_y = \frac{1}{\sqrt{\gamma(y)}} \sum_{i=1}^{\gamma(y)} T_\varphi e_{x_i} = \sqrt{\gamma(y)} e_y.$$

в) Следует из леммы 2.1, а).

Из лемм 2.2, 2.3 следует, что спектр положительных операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ состоит из конечного числа неотрицательных целых чисел, не превосходящих $\gamma(\varphi)$.

Представим множество X в виде объединения непересекающихся множеств $X_k = \{y \in X : \text{card } E_y = k\}$. Соответственно, гильбертово пространство $l^2(X)$ можно представить в виде прямой суммы попарно ортогональных гильбертовых пространств $l^2(X_k)$, где $l^2(X_k)$ – это множество всех функций из $l^2(X)$, являющихся собственными векторами для оператора $T_\varphi T_\varphi^*$ (лемма 2.2, а)) и имеющих собственное значение k . Таким образом, $l^2(X) = \bigoplus_{k \in \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)} l^2(X_k)$, k принимает значения из спектра положительного оператора $T_\varphi T_\varphi^*$.

В дальнейшем для удобства будем записывать $l^2(X) = \bigoplus_{k=0}^M l^2(X_k)$, полагая $l^2(X_k) = \emptyset$, если $k \notin \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)$.

Пусть P_k , $k \in \sigma(T_\varphi T_\varphi^*)$, – проектор на $l^2(X_k)$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Оператор $T_\varphi T_\varphi^*$ представляется в виде*

$$T_\varphi T_\varphi^* = P_1 + 2P_2 + \dots + MP_M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из лемм 2.1, 2.2.

Перейдем теперь к изучению оператора $T_\varphi^* T_\varphi$. Разобьем гильбертово пространство $l^2(X)$ с помощью оператора $T_\varphi^* T_\varphi$ на инвариантные подпространства l_k^2 , каждое из которых состоит из его собственных векторов с собственным значением k . Отметим, что для $k \geq 1$ семейство тех g_y , для которых $\gamma(y) = k$, образует ортонормированный базис в l_k^2 . Множество всех векторов, ортогональных ко всем g_y с $\gamma(y) \geq 1$, образует гильбертово подпространство l_0^2 в $l^2(X)$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Гильбертово пространство $l^2(X)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $l^2(X) = \bigoplus_{k=0}^M l_k^2$, а оператор $T_\varphi^* T_\varphi$ представляется в виде*

$$T_\varphi^* T_\varphi = Q_1 + 2Q_2 + \dots + MQ_M,$$

где Q_k – проектор из $l^2(X)$ на подпространство l_k^2 , который может быть нулевым, если не существует такого элемента $y \in X$, что $\gamma(y) = k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует непосредственно из леммы 2.3.

3. C*-Алгебры, порожденные оператором T_φ . Определим оператор частичной изометрии U на $l^2(X)$, полагая на базисных элементах

$$Ue_y = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma(y) = 0, \\ g_y, & \text{если } \gamma(y) \neq 0, \end{cases}$$

и продолжая по линейности на $l^2(X)$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть U^* – оператор, сопряженный к U . Тогда*

- а) $U^* g_y = e_y$, если $\gamma(y) \geq 1$;
- б) $U^* f = 0$, если $f \in l_0^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим скалярное произведение $(U^* g_y, e_y) = (g_y, Ue_y) = (g_y, g_y) = 1$ и $(U^* g_y, e_x) = (g_y, Ue_x) = 0$, если $x \neq y$. Следовательно, $U^* g_y = e_y$.

Пусть теперь $f \in l_0^2$. Тогда $(U^* f, e_y) = (f, Ue_y) = 0$, для всех $y \in X$. Следовательно, $U^* f = 0$.

ЛЕММА 3.2. *Оператор UU^* является проектором на гильбертово подпространство $\bigoplus_{k=1}^M l_k^2$, а оператор U^*U – на гильбертово подпространство $\bigoplus_{k=1}^M l^2(X_k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для векторов g_y , являющихся базисными в l_k^2 , $k \neq 0$, $UU^*g_y = Ue_e = g_y$, и $UU^*f = 0$ для векторов $f \in l_0^2$. Поэтому оператор UU^* действительно является проектором на подпространство $\bigoplus_{k=1}^M l_k^2$. Аналогично, $U^*Ue_x = U^*g_x = e_x$, если $\gamma(x) \geq 1$, и $U^*Ue_x = 0$, если $\gamma(x) = 0$. Следовательно, оператор U^*U является проектором на подпространство $\bigoplus_{k=1}^M l^2(X_k)$.

Таким образом, $U^*U = P_1 + P_2 + \dots + P_M$, а $UU^* = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_M$. Следующее утверждение необходимо для доказательства основного результата данного пункта.

ЛЕММА 3.3. *Имеем*

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \dots + \sqrt{M}U_M,$$

где U_k – такие операторы частичной изометрии, что $U_k^*U_l = 0$, если $k \neq l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $U_k = U^*Q_k$. Тогда $U_k^*U_k = Q_kUU^*Q_k = Q_k$, поскольку Q_k есть проектор на l_k^2 , а UU^* – проектор на $\bigoplus_{k=1}^M l_k^2$. Соответственно, оператор

$$U_kU_k^* = (U_kU_k^*)^* = U^*Q_kU = (U^*Q_kU)^2 = P_k,$$

что следует из леммы 2.3, б).

Обозначим через $C_\varphi^*(X)$ равномерно замкнутую подалгебру алгебры $B(l^2(X))$, порожденную оператором T_φ . Очевидно, что $C_\varphi^*(X)$ – минимальная C^* -подалгебра алгебры $B(l^2(X))$, содержащая оператор T_φ .

ТЕОРЕМА 3.4. *Алгебра $C_\varphi^*(X)$ изоморфна C^* -алгебре, порожденной конечным семейством операторов частичной изометрии $U_1, U_2, \dots, U_m$, для которых справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned} U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \dots + U_m^*U_m &= Q, \\ U_1U_1^* + U_2U_2^* + \dots + U_mU_m^* &= P, \end{aligned}$$

где P и Q – проекторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 2.4 и 2.5 следует, что проекторы P_k и Q_k , $k = 1, \dots, M$, принадлежат алгебре $C_\varphi^*(X)$. Согласно лемме 3.3 $U_k = T_\varphi Q_k / \sqrt{k}$ тоже принадлежит $C_\varphi^*(X)$. Операторы U_k и U_k^* порождают алгебру $C_\varphi^*(X)$ и удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \dots + U_m^*U_m &= Q, \\ U_1U_1^* + U_2U_2^* + \dots + U_mU_m^* &= P. \end{aligned}$$

4. C^* -ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ $B(l^2(X))$, ПОРОЖДЕННЫЕ ИНЪЕКТИВНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ. Пусть φ – инъективное отображение. Тогда $T_\varphi = U_1$ и $T_\varphi^*T_\varphi = Q_1 = I$ по лемме 3.3 и теореме 2.5, т.е. T_φ является изометричным оператором. Согласно теореме Уолда–фон Нойманна [3; с. 136] T_φ либо унитарен, либо является прямой суммой копий одностороннего сдвига, либо прямой суммой унитарного оператора и копий одностороннего сдвига.

В данном пункте в терминах свойств отображения φ мы дадим полную классификацию C^* -алгебр, порожденных данным отображением, и опишем основные приводящие подпространства этих алгебр.

Элемент $x \in X$ назовем φ -периодическим, если существует $k \in \mathbb{N}$, что $\varphi^k = x$. Минимальное из таких чисел назовем φ -периодом элемента x .

Пусть X_c – множество всех φ -периодических элементов множества X . Если $x \in X_c$, то очевидно, что $\varphi(x) \in X_c$ и подпространство $l^2(X_c)$ является инвариантным относительно оператора T_φ в $l^2(X)$. Так как $\varphi(X_c) = X_c$, то сужение оператора T_φ на $l^2(X_c)$ есть унитарный оператор.

Обозначим

$$n_\varphi = \inf\{n > 0 : \varphi^n(x) = x \text{ для всех } x \in X_c\}.$$

ЛЕММА 4.1. Сужение $C_\varphi^*(X)$ на $l^2(X_c)$ изоморфно

- а) коммутативной C^* -алгебре размерности n_φ , если $n_\varphi < \infty$;
- б) алгебре всех непрерывных функций на единичной окружности $C(S^1)$, если $n_\varphi = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $n_\varphi < \infty$. Тогда семейство операторов $I, T_\varphi, T_\varphi^2, \dots, T_\varphi^{n_\varphi-1}$ образует конечную циклическую группу порядка n_φ . Можно указать, что если элемент $x \in X_c$ имеет φ -период n , то поскольку оператор T_φ является циклическим на орбите x , все корни n -й степени из единицы содержатся в точечном спектре оператора T_φ . Так как T_φ является унитарным оператором, то $T_\varphi^* = T_\varphi^{n_\varphi-1}$. Отсюда $C_\varphi^*(X)$ есть конечномерное пространство с базисом, состоящим из $I, T_\varphi, T_\varphi^2, \dots, T_\varphi^{n_\varphi-1}$, и все корни степени n_φ из единицы содержатся в спектре оператора T_φ .

б) Пусть $n_\varphi = \infty$. Тогда для любого $n > 0$ найдется элемент $x \in X$, φ -период которого $m \geq n$. Следовательно (см. а)), все корни m -й степени из единицы принадлежат точечному спектру оператора T_φ . Таким образом, точечный спектр T_φ плотен в S^1 . Поэтому в силу унитарности спектр T_φ есть S^1 , и согласно функциональному исчислению [3; с. 61] $C_\varphi^*(X_c)$ изоморфна $C(S^1)$.

Пусть $B = X \setminus \varphi(X)$. Очевидно, что $B \cap X_c = \emptyset$ и для любого $b \in B$ не существует такого элемента $x \in X$, что $\varphi(x) = b$. Точки множества B назовем начальными. Пусть $X_b = \{\varphi^n(b)\}_{n=0}^\infty$ ($\varphi^0 \equiv b$) – орбита элемента b . Поскольку φ инъективно, то $X_{b_1} \cap X_{b_2} = \emptyset$ для $b_1 \neq b_2$, и $T_\varphi e_{\varphi^k(b)} = e_{\varphi^{k+1}(b)}$ для всех k , а $T_\varphi^* e_{\varphi^k(b)} = e_{\varphi^{k-1}(b)}$ для $k \geq 1$, и $T_\varphi^* e_b = 0$, т.е. сужение оператора T_φ на каждое $l^2(X_b)$ является оператором сдвига. Отсюда согласно теореме Кобурна [3; с. 137], справедлива

ЛЕММА 4.2. Пространство $\bigoplus_{b \in B} l^2(X_b)$ является инвариантным подпространством для алгебры $C_\varphi^*(X)$, а сужение $C_\varphi^*(X)$ на $\bigoplus_{b \in B} l^2(X_b)$ изоморфно алгебре Тёплица.

Наконец рассмотрим множество $Z = X \setminus (X_c \cup \varphi(B))$. Разобьем множество Z на классы эквивалентности: $x \sim y$, если существуют такие целые положительные числа m и n , что либо $\varphi^n(x) = y$, либо $\varphi^m(y) = x$. Пусть J – разбиение Z на классы эквивалентности. Каждый X_j , $j \in J$, изоморфен группе целых чисел $\mathbb{Z}$ и сужение оператора T_φ на $l^2(X_j)$ есть унитарный оператор, изоморфный оператору сдвига на

$l^2(\mathbb{Z})$. Поэтому $l^2(Z) = \bigoplus_{j \in J} l^2(X_j)$, где каждое $l^2(X_j)$ есть инвариантное подпространство для алгебры $C_\varphi^*(X)$, изоморфное $l^2(\mathbb{Z})$. Из вышесказанного и лемм 4.1, 4.2 следует

ТЕОРЕМА 4.3. *Пространство $l^2(X)$ можно представить в виде прямой суммы*

$$l^2(X) = l^2(X_c) \oplus \left(\bigoplus_{b \in B} l^2(X_b) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} l^2(X_j) \right),$$

где каждое из подпространств является инвариантным относительно $C_\varphi^*(X)$, и сужение $C_\varphi^*(X)$ на $l^2(X_c)$ есть либо конечномерная коммутативная C^* -алгебра, либо $C(S^1)$; сужение $C_\varphi^*(X)$ на $\bigoplus_{b \in B} l^2(X_b)$ есть алгебра Тёплица, а сужение $C_\varphi^*(X)$ на $\bigoplus_{j \in J} l^2(X_j)$ – алгебра $C(S^1)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Пусть φ -инъективное отображение. Тогда алгебра $C_\varphi^*(X)$:*

- коммутативна и конечномерна тогда и только тогда, когда X – конечное множество;
- изоморфна $C(S^1)$ тогда и только тогда, когда φ – сюръекция;
- изоморфна алгебре Тёплица, если φ не является сюръекцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из теоремы 4.3 и теоремы Кобурна.

5. Примеры C^* -алгебр, порожденных неинъективным отображением.

C^* -Алгебры, порожденные неинъективным отображением, по-видимому, невозможно полностью классифицировать в отличие от инъективного случая. Можно лишь только сказать, что эти алгебры не являются коммутативными.

В данном пункте мы рассмотрим два вида таких алгебр.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть φ – сюръективное отображение такое, что $\gamma(y) = n < \infty$ для всех $y \in X$. Если $n = 1$, то алгебра $C_\varphi^*(X)$ либо конечномерна, либо изоморфна алгебре $C(S^1)$. Если $n \geq 2$, то алгебра $C_\varphi^*(X)$ изоморфна алгебре Тёплица.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то φ – инъективное отображение, и первая часть данного утверждения следует из теоремы 4.4.

Пусть $n \geq 2$. Тогда по лемме 3.3 $T_\varphi = \sqrt{n}U_n$, и по теореме 2.5 $T_\varphi T_\varphi^* = nP_n$, $T_\varphi^* T_\varphi = nQ_n$, причем $P_n = I$, а $Q_n < I$, поскольку $l_0^2 \neq \{0\}$ (например, в него входят все векторы вида $e_{x_1} - e_{x_2}$, $x_1, x_2 \in E_y$). Поэтому по теореме Кобурна $C_\varphi^*(X)$ есть алгебра Тёплица.

Рассмотрим еще одну алгебру, которая порождена неинъективным отображением. Пусть $X = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times \{1\})$ и

$$\varphi(n, 0) = (n + 1, 0), \quad \varphi(n, 1) = (n + 1, 0).$$

Переобозначим ортонормированный базис $\{e_{(n,i)}\}_{n,i \in X}$, $i = 0, 1$, в $l^2(X)$, полагая $e_{n,0} = e_n$, $e_{n,1} = f_n$. Тогда оператор T_φ переводит элементы e_n и f_n в e_{n+1} .

ТЕОРЕМА 5.2. *C^* -Алгебра, порожденная оператором T_φ , изоморфна тензорному произведению $C(S) \otimes M_2(\mathbb{C})$, где $M_2(\mathbb{C})$ – алгебра матриц второго порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гильбертово пространство $l^2(X)$ можно разложить в прямую сумму гильбертовых подпространств:

$$l^2(X) = l^2(\mathbb{Z} \times \{0\}) \oplus l^2(\mathbb{Z} \times \{1\}),$$

или в терминах пп. 2, 3

$$l^2(X) = l^2(X_2) \oplus l^2(X_0).$$

Семейство $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $l^2(X_2)$, а $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – в $l^2(X_0)$. Согласно лемме 2.2

$$T_\varphi T_\varphi^* e_n = 2e_n, \quad T_\varphi T_\varphi^* f_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому $P_2 = (1/2)T_\varphi T_\varphi^*$ – проектор на пространство $l^2(X_2)$.

Покажем, что оператор

$$P_0 = T_\varphi^* T_\varphi - T_\varphi^* T_\varphi P_2 - P_2 T_\varphi^* T_\varphi + P_2 T_\varphi^* T_\varphi P_2$$

есть проектор на $l^2(X_0)$. Действительно,

$$\begin{aligned} P_0 e_n &= T_\varphi^* T_\varphi e_n - T_\varphi^* T_\varphi P_2 e_n - P_2 T_\varphi^* T_\varphi e_n + P_2 T_\varphi^* T_\varphi P_2 e_n = 0, \\ P_0 f_n &= T_\varphi^* T_\varphi f_n - P_2 T_\varphi^* T_\varphi f_n = f_n. \end{aligned}$$

Таким образом, P_2 и P_0 – взаимноортогональные проекторы соответственно на $l^2(X_2)$ и $l^2(X_0)$, и $P_2 + P_0 = I$. Введем еще один оператор

$$L = T_\varphi P_2 + P_0 T_\varphi^* T_\varphi P_0.$$

Можно проверить непосредственно, что $Le_n = e_{n+1}$ и $Lf_n = f_{n+1}$. В частности, L – унитарный оператор. Перейдем теперь к рассмотрению C^* -алгебры, порожденной оператором $T_\varphi^* T_\varphi$.

Пусть H_n , $n \in \mathbb{Z}$, – двумерное гильбертово пространство в $l^2(X)$, порожденное функциями e_n и f_n . Очевидно, $l^2(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$. Так как

$$T_\varphi^* T_\varphi e_n = T_\varphi^* T_\varphi f_n = e_n + f_n, \quad T_\varphi T_\varphi^* e_n = 2e_n, \quad T_\varphi T_\varphi^* f_n = 0,$$

то H_n для всех n является инвариантным подпространством в $l^2(X)$ для операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$, и в матричной записи относительно базиса $\{e_n, f_n\}$ эти операторы отождествляются с двумерными матрицами

$$T_\varphi T_\varphi^* \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\varphi^* T_\varphi \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку эти матрицы не коммутируют, алгебра, порожденная этими матрицами, есть $M_2(\mathbb{C})$. Пусть $E_{ij} \in C_\varphi^*(X)$, $i, j = 1, 2$, – матричные единицы в $M_2(\mathbb{C})$,

$$E_{11} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ C^* -подалгебру алгебры $C_\varphi^*(X)$, порожденную оператором L . Из равенств $L(T_\varphi T_\varphi^*) = (T_\varphi T_\varphi^*)L$ и $L(T_\varphi^* T_\varphi) = (T_\varphi^* T_\varphi)L$ вытекает, что $LE_{ij} = E_{ij}L$, $i, j = 1, 2$. Поэтому $AE_{ij} = E_{ij}A$, $A \in \mathfrak{A}$. Следовательно, C^* -алгебра $M_2(\mathfrak{A})$ матриц второго порядка с коэффициентами из $\mathfrak{A}$ *-изоморфна C^* -подалгебре алгебры $C_\varphi^*(X)$ вида

$$M_2(\mathfrak{A}) \simeq \mathfrak{A}E_{11} + \mathfrak{A}E_{12} + \mathfrak{A}E_{21} + \mathfrak{A}E_{22}.$$

Покажем, что

$$C_{\varphi}^*(X) = \mathfrak{A}E_{11} + \mathfrak{A}E_{12} + \mathfrak{A}E_{21} + \mathfrak{A}E_{22}.$$

Это будет следовать из того, что $T_{\varphi} = L(E_{11} + E_{12})$ и $T_{\varphi} \in M_2(\mathfrak{A})$. Проверим, что

$$E_{11} + E_{12} = \frac{1}{2}(T_{\varphi}T_{\varphi}^*T_{\varphi}^*T_{\varphi}).$$

Переходя к матричной записи в базисе $\{e_n, f_n\}$, слева получим

$$E_{11} + E_{12} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а справа

$$\frac{1}{2}(T_{\varphi}T_{\varphi}^*)(T_{\varphi}^*T_{\varphi}) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из лемм 2.1 и 2.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}LT_{\varphi}T_{\varphi}^*T_{\varphi}^*T_{\varphi}e_n &= \frac{1}{2}LT_{\varphi}T_{\varphi}^*(e_n + f_n) = \frac{1}{2}L(2e_n) = e_{n+1} = T_{\varphi}e_n, \\ \frac{1}{2}LT_{\varphi}T_{\varphi}^*T_{\varphi}^*T_{\varphi}f_n &= \frac{1}{2}LT_{\varphi}T_{\varphi}^*(e_n + f_n) = e_{n+1} = T_{\varphi}f_n. \end{aligned}$$

Таким образом, $T_{\varphi} = L(E_{11} + E_{12})$ и, следовательно,

$$C_{\varphi}^*(X) = \mathfrak{A}E_{11} + \mathfrak{A}E_{12} + \mathfrak{A}E_{21} + \mathfrak{A}E_{22} \simeq M_2(\mathfrak{A}).$$

Для завершения доказательства теоремы напомним, что $\mathfrak{A}$ изоморфна $C(S)$ (изоморфизм между $C(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A}$ согласно функциональному исчислению осуществляется отображением $f(z) \rightarrow f(L)$). Таким образом,

$$M_2(\mathfrak{A}) \simeq M_2(C(S)) = C(S) \otimes M_2(\mathbb{C}).$$

Часть результатов данной работы была доложена на XVIII Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики [12]. Авторы благодарят участников семинара за плодотворное обсуждение данных результатов.

Авторы также выражают благодарность В. А. Арзуманяну за ряд ценных советов и консультаций по теории C^* -алгебр, порожденных изометриями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*, Мир, М., 1976.
- [2] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics.*, v. 2, Texts Monogr. Phys., Equilibrium States, Models in Quantum Statistical Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [3] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.
- [4] J. Cuntz, “Simple C^* -algebras generated by isometries”, *Comm. Math. Phys.*, **57**:2 (1977), 173–185.

- [5] C. A. Berger, L. A. Coburn, A. Lebow, “Representation and index theory for C^* -algebras generated by commuting isometries”, *J. Funct. Anal.*, **27**:1 (1978), 51–99.
- [6] V. A. Arzumanyan, A. M. Vershik, “Star algebras associated with endomorphisms”, *Operator Algebras and Group Representations*, Vol. 1 (Neptun, 1980), Monogr. Stud. Math., **17**, Pitman Press, Boston, MA, 1984, 17–27.
- [7] V. Deaconu, “Generalized Cuntz–Krieger algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:11 (1996), 3427–3435.
- [8] M. V. Pimsner, “A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$ ”, *Free Probability Theory* (Waterloo, ON, 1995), Field Inst. Commun., **12**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 189–212.
- [9] A. Kumjian, *On certain Cuntz–Pimsner algebras*, arXiv: [math.OA/0108194](https://arxiv.org/abs/math.OA/0108194).
- [10] P. E. T. Jorgensen, D. P. Proskurin, Y. S. Samoilenko, *On C^* -algebras generated by pairs of q -commuting isometries*, arXiv: [math.OA/0311115](https://arxiv.org/abs/math.OA/0311115).
- [11] A. Hopenwasser, J. R. Peters, S. C. Power, “Subalgebras of graph C^* -algebras”, *New York J. Math.*, **11** (2005), 351–386.
- [12] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, “ C^* -алгебры, порожденные отображениями”, *Материалы школы-семинара “Волга-2006”*, Казань, 2006, 28.

С. А. Григорян

Казанский государственный энергетический университет

Поступило

22.08.2006

А. Ю. Кузнецова

Казанский государственный университет

Исправленный вариант

30.01.2007

E-mail: alla_kuznetsova@rambler.ru