Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Грушин, Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в тонких бесконечных трубках, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 687–701

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:47:12

Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в тонких бесконечных трубках

В. В. Грушин

В работе получено асимптотическое разложение собственных значений оператора Лапласа с нулевыми условиями Дирихле в трубках, т.е. в бесконечных изогнутых цилиндрах с внутренним кручением при равномерном сжатии поперечных сечений по малому параметру, характеризующему поперечные размеры трубки. Предложен метод сведения задачи о нахождении собственных значений к решению неявного уравнения.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. Изучению связанных состояний, возникающих в трубках, т.е. при различных возмущениях бесконечных цилиндров (и бесконечных полосок в двумерном случае), называемых также квантовыми волноводами, посвящено большое количество работ (нужно отметить, что ранее подобные вопросы рассматривались в связи с теорией волноводов и резонаторов). В работах Маслова [1], [2], Маслова и Воробьева [3] была построена асимптотика собственных функций и квазистационарных собственных значений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых. Было показано, что, подбирая нужным образом искривленность полоски и длину участка, где происходит искривление, можно добиться, чтобы существовало лишь одно собственное значение, т.е. резонатор имел лишь одну поперечную моду. Аналогичные вопросы исследовались для областей, ограниченных эквидистантными поверхностями. В работах Белова, Доброхотова, Сеницына [4], Белова, Доброхотова, Сеницына, Тудоровского [5], Белова, Доброхотова, Тудоровского [6], [7], Белова, Доброхотова, Маслова, Тудоровского [8], с помощью канонического оператора Маслова построены быстроосциллирующие решения уравнения Шрёдингера и асимптотические собственные значения в тонких трубках. Изучению связанных состояний в трубках посвящены работы Дюкло и Экснера [9], Экснера и Чеба [10], Экснера [11], [12], Булла, Гезтези, Саймона [13], Экснера и Вугалтера [14], Борисова, Экснера, Гадыльшина и Крейсирика [15], Грушина [16], [17], Гадыльшина [18]. В работах [10], [11] было доказано существование собственного значения для слабо изогнутых волноводов, а в [9] была сосчитана его асимптотика по малому параметру. В [9] также рассматривалась асимптотика собственных значений в тонких трубках без внутреннего кручения (подробнее об этих результатах

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00968).

будет сказано в конце п. 2). В [13] в двумерном случае рассматривались локальные деформации бесконечной полосы типа локальных растяжений в поперечных направлениях в некритической ситуации. В двумерном случае в [14] было показано, что в критической ситуации собственное значение может как возникать, так и не возникать. В случае, когда собственное значение все же возникает, его асимптотика была построена в [15]. В [16] были исследованы вопросы возникновения собственного значения и его асимптотики при возмущении волновода малым локализованным дифференциальным оператором второго порядка. В качестве примера на применение полученных общих формул в [16] рассматривались и деформации типа локальных растяжений в поперечных направлениях в некритическом случае, а в [17] рассматривались возмущения, связанные со слабым изгибанием и внутренним кручением волновода. В [18] рассматривались малые возмущения, которые представляют собой произвольный локализованный оператор второго порядка, рассмотрены некоторые примеры деформаций волноводов, которые сводятся к таким возмущениям. В частности, для трехмерного осесимметричного цилиндра рассматривалось возмущение типа локальных растяжений в поперечных направлениях и показано, что в критическом случае собственное значение может как возникать, так и не возникать.

В данной статье рассматривается асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа при равномерном сжатии поперечных сечений изогнутой трубки с внутренним кручением. Основной результат состоит в получении асимптотической формулы для собственных значений по малому параметру, характеризующему поперечные размеры трубки (формула (2.3)). Для получения асимптотической формулы применяется метод, отличный от метода, применявшегося в [9], состоящий в сведении задачи о нахождении собственных значений к решению некоторого неявного уравнения (см. предложение 2).

2. Формулировка основного результата. Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется гладкая несамопересекающаяся кривая Γ , заданная уравнением $x = X(s)$, где s – длина дуги (со знаком) кривой Γ , отсчитанная от фиксированной точки $x_0 \in \Gamma$. Будем предполагать, что кривая Γ снабжена трехгранником Френе, состоящим из взаимно ортогональных единичных векторов класса $C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathbf{v}(s) = \dot{X}(s)$, удовлетворяющих системе уравнений Френе $\dot{\mathbf{v}} = \gamma \mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\gamma \mathbf{v} + \varkappa \mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{b}} = -\varkappa \mathbf{n}$, где $\gamma(s)$ – кривизна (со знаком), $\varkappa(s)$ – кручение кривой Γ , точка здесь и далее означает производную по s . Будем предполагать, что $\varkappa(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$, а $\gamma(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (q_1, q_2) имеется связная ограниченная область M с бесконечно гладкой границей ∂M . Обозначим через $\Pi(s)$ нормальную к кривой Γ плоскость, в которой векторы $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ образуют базис. Рассмотрим в $\Pi(s)$ базис $(\mathbf{n}_\phi(s), \mathbf{b}_\phi(s))$, образованный поворотом базиса $(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ на угол $\phi(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Трубкой* будем называть область $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ в $\mathbb{R}^3$, которая получается как образ прямой трубки (цилиндра)

$$\Omega = \{(s, q) : -\infty < s < +\infty, q \in M\}, \quad q = (q_1, q_2),$$

при отображении

$$\begin{aligned} x &= X(s) + \varepsilon q_1 \mathbf{n}_\phi(s) + \varepsilon q_2 \mathbf{b}_\phi(s) \\ &= X(s) + \varepsilon (q_1 \cos \phi - q_2 \sin \phi) \mathbf{n} + \varepsilon (q_1 \sin \phi + q_2 \cos \phi) \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь малый параметр ε введен для того, чтобы иметь возможность рассматривать “тонкие” трубки.

Будем предполагать, что отображение (2.1) в $\bar{\Omega}$ есть диффеоморфизм, что заведомо выполняется при достаточно малых ε . Таким образом, (s, q_1, q_2) представляют собой криволинейные координаты в $\tilde{\Omega}_\varepsilon$. Трубку можно наглядно представлять себе как результат скручивания и изгибания бесконечного цилиндра, либо область, которую замечает плоская фигура M при таком движении ее плоскости, что одна из точек этой плоскости движется вдоль кривой Γ , а сама эта плоскость остается нормальной к кривой Γ . Если носитель γ расположен в отрезке $[-l, l]$, то Γ при $s < -l$ и $s > l$ превращается в прямые линии.

Сформулируем основной результат статьи. Введем углы $\alpha(s)$ и $\theta(s)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\dot{\alpha}(s) + \varkappa(s) = 0, \quad \alpha(s) + \theta(s) = \phi(s). \quad (2.2)$$

Угол $\theta(s)$, следуя работе [7], будем называть *внутренним кручением трубки*. Будем предполагать, что $\dot{\theta}(s)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

В трубке $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ рассмотрим оператор Δ_D – расширение по Фридрихсу оператора Лапласа Δ , первоначально определенного на $C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\varepsilon)$, что является математической моделью квантового волновода (см. [4]–[12], [19]). Как показано в [16], областью определения оператора Δ_D является пространство $\mathcal{H}_D^2(\tilde{\Omega}_\varepsilon)$ состоящее из функций соболевского пространства $\mathcal{H}^2(\tilde{\Omega}_\varepsilon)$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле (т.е. обращающихся в нуль на границе области $\tilde{\Omega}_\varepsilon$). Напомним, что $u \in \mathcal{H}^m(\tilde{\Omega}_\varepsilon)$, если функция u и ее обобщенные производные до порядка m включительно принадлежат $L_2(\tilde{\Omega}_\varepsilon)$ (см., например, [20]). Существенную область определения оператора Δ_D составляют функции из $C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\varepsilon)$, обращающиеся в нуль на границе области $\tilde{\Omega}_\varepsilon$.

Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы получить асимптотическую формулу для поведения собственных значений оператора $-\Delta_D$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Особую роль в этой формуле играет некоторый одномерный оператор Шрёдингера T_0 , который, следуя терминологии из [7], будем называть *редуцированным оператором* (в [19] аналогичный оператор называется эффективным гамильтонианом). Чтобы определить этот оператор, обозначим через

$$\nu_0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_n \leq \dots$$

собственные значения оператора $-\Delta_D^M$, т.е. оператора Лапласа со знаком “минус” в области M , а $\{\chi_n\}$ – соответствующая полная ортонормированная система собственных функций оператора $-\Delta_D^M$. Функции χ_n можно выбрать вещественными. Хорошо известно, что основное собственное значение ν_0 невырождено и χ_0 можно выбрать положительной в M (см., например, [21]). Введем оператор момента $L = q_1 \partial_{q_2} - q_2 \partial_{q_1}$ и обозначим через L_{00} его среднее значение в состоянии χ_0 , т.е. $L_{00} = (L\chi_0, \chi_0)_M$, где $(\cdot, \cdot)_M$ – скалярное произведение в $L_2(M)$. Аналогичное обозначение будет использоваться и для других операторов. Положим $a(s) = -\gamma^2(s)/4 - \dot{\theta}^2(s)(L^2)_{00}$ и рассмотрим одномерный оператор Шрёдингера $T_0 = -\partial_s^2 + a(s)$. Пусть μ_k , $k = 1, \dots, r$, – собственные значения оператора T_0 (если таковые имеются), а $\Phi_k(s)$ – соответствующие нормированные собственные функции. Отметим, что все μ_k являются отрицательными и принадлежат дискретному

спектру оператора T_0 (более подробно о свойствах собственных значений оператора T_0 будет сказано в п. 4). Спектр оператора T_0 обозначается как $\sigma(T_0)$.

Выкинем из отрицательной вещественной полуоси $\mathbb{R}_-$ интервалы, содержащие собственные значения μ_k оператора T_0 , и интервал, содержащий начало координат; оставшееся замкнутое множество отрицательной полуоси обозначим через W . Напомним, что кроме бесконечной дифференцируемости всех величин, входящих в систему Френе, мы предполагаем, что $\gamma(s)$ и $\theta(s)$ имеют компактные носители. Пусть l выбрано так, что эти носители содержатся в $[-l, l]$.

ТЕОРЕМА 1. *Для построенного указанным способом множества W существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в $W + \nu_0/\varepsilon^2$ нет собственных значений оператора $-\Delta_D$. Более того, $W + \nu_0/\varepsilon^2$ принадлежит резольвентному множеству оператора $-\Delta_D$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть μ_k – некоторое собственное значение редуцированного оператора T_0 и W_k – такой отрезок, содержащий μ_k , что W_k не содержит других точек из $\sigma(T_0)$. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение $\lambda_k(\varepsilon)$ оператора $-\Delta_D$, принадлежащее $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$; это собственное значение невырождено и $\mu_k(\varepsilon) = \lambda_k(\varepsilon) - \nu_0/\varepsilon^2$ имеет предел μ_k при $\varepsilon \rightarrow +0$. Если положить $\mu_k(0) = \mu_k$, то $\mu_k(\varepsilon) \in C^\infty[0, \varepsilon_0)$.*

Доказательство теорем 1 и 2 будет дано в п. 2–7.

СЛЕДСТВИЕ. *Для собственного значения $\lambda_k(\varepsilon)$ из теоремы 2 при $\varepsilon \rightarrow +0$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\lambda_k(\varepsilon) \sim \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} + \mu_k + \sum_{n=1}^{\infty} d_{k,n} \varepsilon^n. \quad (2.3)$$

Действительно, (2.3) следует из формулы Тейлора, поскольку в силу теоремы 2 функция μ_k бесконечно дифференцируема при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$. Коэффициент $d_{k,1}$ будет вычислен в конце п. 7.

Отметим, что вопрос о поведении собственных значений оператора $-\Delta_D$ в тонких трубках обсуждался в [9], но там рассматривались только “круглые” трубки без внутреннего кручения (M – круг с центром в начале координат и $\theta(s) \equiv 0$). Вместо формулы (2.3) в [9] получено разложение

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{\mu_0}{\varepsilon^2} + \mu_k + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(\varepsilon), \quad (2.4)$$

причем ряд абсолютно сходится для достаточно малых ε , $e_n(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, $e_n(s) \in C^\infty[0, \varepsilon_0)$ для некоторого ε_0 . Отсюда еще не вытекает бесконечной дифференцируемости $\lambda_k(\varepsilon)$ при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ как и асимптотического разложения (2.3), поскольку не указана оценка остаточного члена ряда в (2.4). Кроме того, в доказательстве включения $e_n(s) \in C^\infty[0, \varepsilon_0)$ имеется существенный пробел, поскольку оно основано на лемме 5.4, которая неверна, как будет показано в п. 6.

3. Оператор Лапласа в координатах, связанных с трубкой. В этом пункте мы получим выражение для оператора Лапласа в координатах (2.1). Введем углы $\alpha(s)$ и $\theta(s)$, удовлетворяющие соотношениям (2.2), и пусть

$$h(s) = 1 - \varepsilon \gamma(s)(q_1 \cos \phi(s) - q_2 \sin \phi(s)), \quad L = (q_1 \partial_{q_2} - q_2 \partial_{q_1}). \quad (3.1)$$

В координатах (s, q_1, q_2) оператор Лапласа приобретает вид

$$h^{-1}(\partial_s - \dot{\theta}L)h^{-1}(\partial_s - \dot{\theta}L) + \varepsilon^{-2}(h^{-1}\partial_{q_1}h\partial_{q_1} + h^{-1}\partial_{q_2}h\partial_{q_2}). \quad (3.2)$$

Эту формулу можно получить, используя известное выражение оператора Лапласа в криволинейной системе координат через метрический тензор (ср. [4]–[7], [19]). Но этот путь приводит к довольно громоздким вычислениям, поскольку система координат (s, q_1, q_2) в общем случае не триортогональная. Несколько более простым способом эта формула была получена в [17]. Приведем краткую схему вывода этой формулы.

Мы используем для вывода формулы (3.2) специальную промежуточную триортогональную систему координат (s, τ_1, τ_2) (такие координаты использовались в [5]–[9]).

Пусть (τ_1, τ_2) – координаты на плоскости $\Pi(s)$ в базисе $(\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s))$, полученном из $(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ поворотом на угол $\alpha(s)$. Система координат (s, τ_1, τ_2) является триортогональной. Подсчет метрики в этих координатах с учетом соотношений Френе приводит к простому выражению

$$dx^2 = h^2 ds^2 + \varepsilon^2 d\tau_1^2 + \varepsilon^2 d\tau_2^2, \quad h = 1 - \varepsilon\gamma(\tau_1 \cos \alpha - \tau_2 \sin \alpha).$$

Поэтому оператор Лапласа в координатах (s, τ_1, τ_2) имеет вид

$$h^{-1}\partial_s h^{-1}\partial_s + \varepsilon^{-2}(h^{-1}\partial_{\tau_1}h\partial_{\tau_1} + h^{-1}\partial_{\tau_2}h\partial_{\tau_2}),$$

причем h является якобианом при переходе к координатам (s, τ_1, τ_2) . После поворота базиса $(\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s))$ на угол $\theta(s)$ получаем базис $(\mathbf{n}_\phi(s), \mathbf{b}_\phi(s))$, и остается только перейти из координат (s, τ_1, τ_2) в координаты (s, q_1, q_2) , используя простые соотношения $\tau_1 = q_1 \cos \theta - q_2 \sin \theta$, $\tau_2 = q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta$. В результате получим формулу (3.2), причем h будет якобианом при переходе от координат x к (s, q_1, q_2) . Формула (3.2) использовалась в [17].

Теперь перейдем от оператора $-\Delta_D$ к оператору

$$H_\varepsilon = -h^{1/2}\Delta_D h^{-1/2}, \quad (3.3)$$

который запишем в координатах (s, q_1, q_2) . Представив H_ε в виде

$$\begin{aligned} H_\varepsilon = & -\left(\partial_s - \dot{\theta}L + \frac{(\partial_s - \dot{\theta}L)h}{2h}\right)h^{-2}\left(\partial_s - \dot{\theta}L - \frac{(\partial_s - \dot{\theta}L)h}{2h}\right) \\ & - \varepsilon^{-2}\left(\partial_{q_1} + \frac{\partial_{q_1}h}{2h}\right)\left(\partial_{q_1} - \frac{\partial_{q_1}h}{2h}\right) - \varepsilon^{-2}\left(\partial_{q_2} + \frac{\partial_{q_2}h}{2h}\right)\left(\partial_{q_2} - \frac{\partial_{q_2}h}{2h}\right), \end{aligned}$$

после несложных вычислений получаем формулу

$$H_\varepsilon = -(\partial_s - \dot{\theta}L)\frac{1}{h^2}(\partial_s - \dot{\theta}L) - \frac{1}{\varepsilon^2}(\partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2) - \frac{\gamma^2}{4h^2} + \frac{(\partial_s - \dot{\theta}L)^2 h}{2h^3} - \frac{5}{4}\frac{((\partial_s - \dot{\theta}L)h)^2}{h^4}. \quad (3.4)$$

Именно эта формула и будет использоваться в дальнейшем. Так как H_ε унитарно эквивалентен исходному оператору $-\Delta_D$, собственные значения этих операторов совпадают. Ясно, что для достаточно малых ε оператор H_ε можно записать в виде

$$H\varepsilon = -(\partial_s - \dot{\theta}L)^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}(\partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2) - \frac{\gamma^2}{4} + \varepsilon b(s, q, \partial_s, \partial_{q_1}, \partial_{q_2}, \varepsilon), \quad (3.5)$$

где b – дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми по (s, q, ε) коэффициентами в $\bar{\Omega} \times [0, \varepsilon_0)$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$, обращающимися в нуль при $|s| \geq l$.

Отметим, что формула (3.4) при $\theta(s) \equiv 0$ имеется в [9], т.е. там приведена эта формула в координатах (s, τ_1, τ_2) , связанных с репером $(\mathbf{v}, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha)$; отсюда с помощью преобразования поворота на угол θ также легко получается формула (3.4).

4. Свойства собственных значений редуцированного оператора T_0 . В этом пункте приводятся известные свойства собственных значений оператора T_0 , характерные для любых одномерных операторов Шрёдингера с финитным потенциалом (см., например, [21]). Для полноты изложения для некоторых из них мы приведем доказательства. Часть доказательств основана на том, что вне отрезка $[-l, l]$, содержащего $\text{supp } a(s)$, собственная функция $\Phi_k(s)$ является решением обыкновенного уравнения

$$\ddot{\Phi}_k(s) + \mu_k \Phi_k(s) = 0, \quad (4.1)$$

общее решение которого хорошо известно.

1. Собственные значения μ_k оператора T_0 отрицательны.

Пусть $\mu_k \geq 0$. Так как $\Phi_k(s) \in L_2(\mathbb{R})$, из вида общего решения уравнения (4.1) ясно, что $\Phi_k(s) = 0$ на $(-\infty, -l]$. Теперь из теоремы о единственности решения задачи Коши для обыкновенных уравнений следует, что $\Phi_k(s) \equiv 0$; следовательно, при $\mu_k \geq 0$ собственных значений нет.

2. Собственные значения μ_k невырождены.

Это следует из того, что при $\mu_k < 0$ есть только одно (с точностью до умножения на константу) решение на $(-\infty, -l]$, принадлежащее $L_2(\mathbb{R})$.

3. Оператор T_0 может иметь только конечное число собственных значений.

Из равенства

$$((T_0 - \mu)\Phi_k, \Phi_k) = (\dot{\Phi}_k, \dot{\Phi}_k) + ((a - \mu)\Phi_k, \Phi_k) = 0$$

следует, что при $\mu \leq a_{\min} = \min a(s)$ собственных значений нет. Так как собственные значения можно находить из уравнения

$$G(\eta) = \dot{\Phi}(\eta, l) + \eta \Phi(\eta, l) = 0,$$

где $\mu = -\eta^2$, $\eta > 0$, $\Phi(\eta, s)$ – решение задачи Коши $\Phi(\eta, -l) = 1, \dot{\Phi}(\eta, -l) = \eta$ для уравнения $(T_0 - \mu)\Phi = 0$, а функция $G(\eta)$ аналитична, то на любом конечном отрезке имеется только конечное число собственных значений. В частности, на отрезке $[a_{\min}, 0]$ также имеется только конечное число таких значений.

4. Если $a(s) \geq 0$, то собственных значений у оператора T_0 нет.

Действительно, в этом случае оператор T_0 положительно определен и, следовательно, не имеет отрицательных собственных значений.

5. Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(T_0)$ оператора T_0 составляет $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$.

Доказательство см., например, в [21]. Это также легко доказать с помощью рассуждений из [17], где было доказано, что для трубок $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D) = [\nu_0/\varepsilon^2, +\infty)$ (см. также [22]).

6. Если $\int_{\mathbb{R}} a(s) ds < 0$, то у T_0 есть, по крайней мере, одно собственное значение.

Пусть $\rho(s)$ – такая функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\rho(0) = 1$. Построим последовательность $\rho_n(s) = \rho(s/n)$ и рассмотрим форму $(\dot{\rho}_n, \dot{\rho}_n) + (a\rho_n, \rho_n)$. Ясно, что при

$n \rightarrow \infty$ в пределе получается $\int_{\mathbb{R}} a(s) ds$; следовательно, при некотором n эта форма будет принимать отрицательное значение. Из вариационного принципа (см., например, [21; гл. 8]) отсюда следует, что на отрицательной оси есть точки спектра оператора T_0 . Так как спектр на отрицательной полуоси дискретен, должно существовать собственное значение оператора T_0 .

Отметим, что в доказательстве теорем 1 и 2 используются свойства 1–3 и 5. Свойства 4 и 6 показывают, что наличие или отсутствие собственных значений оператора T_0 зависит от соотношения между слагаемыми, составляющими потенциал $a(x)$, причем $(L^2)_{00} \leq 0$, поскольку

$$(L^2)_{00} = (L^2 \chi_0, \chi_0) = -(L \chi_0, L \chi_0) \leq 0.$$

Как показано в [17], равенство нулю достигается только для областей, представляющих собой круг или кольцо с центром в начале координат, а для остальных областей $(L^2)_{00} < 0$. Как отмечено в [19], с физической точки зрения это означает, что частица отталкивается от областей с большими $|\dot{\theta}^2(s)|$ и притягивается к областям с большой по абсолютной величине кривизной.

5. Доказательство теоремы 1. Для построения резольвенты оператора H_ε запишем уравнение

$$\varepsilon^2(H_\varepsilon - \lambda)u = f \quad (5.1)$$

(H_ε определяется формулой (3.4) или формулой (3.5)) в матричном виде, используя разложение пространства $L_2(M)$ в прямую сумму

$$L_2(M) = [\chi_0] \oplus [\chi_0]^\perp,$$

где $[\chi_0]$ – подпространство, натянутое на вектор χ_0 , а $[\chi_0]^\perp$ – его ортогональное дополнение. Через P_0 и P_1 будем обозначать проекторы на эти подпространства. Так как функции из $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ плотны в $\mathcal{H}_B^2(\Omega)$, функции для дальнейших оценок можно брать из $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, после чего полученные оценки распространять на все пространство $\mathcal{H}_B^2(\Omega)$ с помощью операции замыкания. Разложив функцию $u(s, q) \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ при каждом s в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\chi_n\}$, получим

$$u(s, q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s) \chi_n(q), \quad C_n(s) = (u(s, q), \chi_n(q))_M.$$

Пусть $\mathcal{L}_0$ – подпространство в $L_2(\Omega)$, состоящее из функций $v(s) \chi_0(q)$, где $v(s) \in L_2(\mathbb{R})$, а $\mathcal{L}_0^\perp$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}_0$; соответственно этому функция u раскладывается в сумму $u = u_0 + u_1$. Ясно, что

$$u_0(s, q) = C_0(s) \chi(q), \quad u_1(s, q) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(s) \chi_n(q), \quad (5.2)$$

причем

$$u_0(s, q) = P_0 u(s, q), \quad u_1(s, q) = P_1 u(s, q) = u(s, q) - P_0 u(s, q)$$

при каждом s . Аналогичным образом функция f раскладывается в сумму $f = f_0 + f_1$.

Как показано в [16], оператор Δ_D^Ω осуществляет изоморфизм между $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$; следовательно,

$$\left(\int_{\Omega} |\Delta u(s, q)|^2 ds dq \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\ddot{C}_n(s) - \nu_n C_n(s)|^2 ds \right)^{1/2} \quad (5.3)$$

есть эквивалентная норма в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$.

Положим

$$\mu = \lambda - \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} \quad (5.4)$$

и введем обозначения

$$b_{00} = (b\chi_0, \chi_0)_M, \quad b_{01}u_1 = (bu_1, \chi_0)_M, \quad b_{10} = P_1 b\chi_0, \quad b_{11}u_1 = P_1 bu_1,$$

где b определено в (3.5). Аналогичные обозначения будем использовать и для операторов L и L^2 . Подставив разложение $u = u_0 + u_1$ в (5.1), применив при каждом s проекторы P_0 и P_1 и перейдя от $C_0(s)$ к $v_0(s) = \varepsilon^2 C_0(s)$, получим систему

$$\begin{aligned} -\partial_s^2 v_0 + av_0 - \mu v_0 + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon \partial_s, \varepsilon)u_1 &= f_0(s), \\ -\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1 - (\partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0 + \mu \varepsilon^2)u_1 + B_{10}^0(s, \partial_s)v_0 & \\ + \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon \partial_s, \varepsilon)u_1 &= f_1(s, q), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} B_{00} &= b_{00}, \quad B_{01} = \varepsilon^2 b_{01} + \varepsilon \ddot{\theta} L_{01} - \varepsilon \dot{\theta}^2 (L^2)_{01} + 2\varepsilon \dot{\theta} L_{01} \partial_s, \\ B_{10}^0 &= \ddot{\theta} L_{10} - \dot{\theta}^2 (L^2)_{10} + 2\dot{\theta} L_{10} \partial_s, \\ B_{10} &= b_{10}, \quad B_{11} = \varepsilon^2 b_{11} + \varepsilon \ddot{\theta} L_{11} - \varepsilon \dot{\theta}^2 (L^2)_{11} + 2\varepsilon \dot{\theta} L_{11} \partial_s - \frac{\varepsilon \gamma^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При выводе системы (5.5) использовалось соотношение $L_{00} = 0$, которое следует из антисимметричности оператора L .

Левые части системы (5.5) определяют непрерывный оператор

$$A: \mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \rightarrow L_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}_0^\perp$$

и для доказательства существования резольвенты оператора H_ε при заданных ε и λ достаточно установить, что A является изоморфизмом. Оператор A представляется в виде суммы $A = A_0 + \varepsilon B$, где A_0 определяется из (5.5), если все B_{ij} , $j = 1, 2$ положить равными нулю, а B определяется матричными элементами $B_{i,j}$, $j = 1, 2$. Если $\mu \notin \sigma(T_0)$ ($\sigma(T_0)$ – спектр оператора T_0), то решение системы (5.5) без операторов B_{ij} можно получить в явном виде с помощью разложения (5.2) и преобразования Фурье. В результате получим, что оператор A_0^{-1} определяется формулами

$$\begin{aligned} v_0 &= (T_0 - \mu)^{-1} f_0, \quad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(s) \chi_n(q), \\ C_n(s) &= F_{\xi \rightarrow s}^{-1} \left(\frac{F_{s \rightarrow \xi}(f_1 - B_{10}^0 v_0, \chi_n)_M}{\varepsilon^2 \xi^2 + \nu_n - \mu \varepsilon^2} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $F_{s \rightarrow \xi}$ – прямое, а $F_{\xi \rightarrow s}$ – обратное преобразования Фурье. Учитывая, что $\mu \in W$, для v_0 получаем оценку

$$\|v_0\|_2 - \mu \|v_0\| \leq c \|f_0\|, \quad (5.8)$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$, а константа c не зависит от $f_0 \in L_2(\mathbb{R})$. Неравенство (5.8) следует из известного равенства $\|(T_0 - \mu)^{-1}\| = \text{dist}(\mu, \sigma(T_0))$, справедливого для любых самосопряженных операторов (см., например, [24; гл. 6, п. 1, пример 2]), поскольку $\partial_s^2 v_0$ из уравнения $\partial_s^2 v_0 + a(s)v_0 = f_0$ выражается через f_0 и v_0 . Кроме того, оценка (5.8) получается также из общих оценок статьи [23]. Из (5.7), (5.8) и того, что (5.3) является эквивалентной нормой в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, получаем, что оператор A_0 при $\mu \in W$ и $\varepsilon > 0$ является изоморфизмом.

При $\mu \in W$, где W определено в формулировке теоремы 1, будем рассматривать εB как возмущение и пытаться строить A^{-1} в виде ряда Неймана

$$A^{-1} = A_0^{-1} + A_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon B A_0^{-1})^n. \quad (5.9)$$

Ясно, что теорема 1 будет доказана, если мы установим следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что норма оператора BA_0^{-1} равномерно ограничена при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\mu \in W$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем используются только некоторые свойства операторов B_{10}^0 , $B_{i,j}$, $i, j = 1, 2$, а не их конкретный вид. Так B_{00} , B_{10}^0 , B_{10} – это дифференциальные операторы второго порядка, т.е. суммы 1, ∂_s , ∂_s^2 , умноженные на некоторые коэффициенты. Коэффициенты B_{00} являются обычными функциями от (s, μ, ε) , коэффициенты B_{10}^0 и B_{10} – функциями со значениями в $\mathcal{H}_D^2(M) \cap [\chi_0]^\perp$. А B_{01} и B_{11} – это ε -дифференциальные операторы, т.е. суммы 1, $\varepsilon \partial_s$, $\varepsilon^2 \partial_s^2$, умноженных на коэффициенты, но эти коэффициенты представляют собой функции со значениями в пространстве линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{H}_D^2(M) \cap [\chi_0]^\perp$ или в пространстве линейных непрерывных операторов в $\mathcal{H}_D^2(M) \cap [\chi_0]^\perp$ соответственно. При некотором $\varepsilon_0 > 0$ все эти коэффициенты бесконечно дифференцируемым образом зависят от (s, μ, ε) при всех $s \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ и обращаются в нуль при $|s| \geq l$.

Ввиду указанной структуры операторов B_{ij} , $i, j = 1, 2$, естественно воспользоваться нормами с параметром, аналогичным использовавшимся в [23]. Введем в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ норму, зависящую от параметра ε :

$$\|u\|_{2,\varepsilon} = \|\varepsilon^2 \partial_s^2 u\| + \sum_{j=1}^2 (\|\varepsilon \partial_s \partial_{q_j} u\| + \|\partial_{q_j} u\|) + \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \|\partial_{q_i} \partial_{q_j} u\| + \|\varepsilon \partial_s u\| + \|u\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$. Если сделать замену $s = \varepsilon s'$, то

$$\|u(s, q)\|_{2,\varepsilon} = \varepsilon^{1/2} \|u(\varepsilon s', q)\|_{2,1},$$

а $\|\cdot\|_{2,1}$ – это обычная норма в $\mathcal{H}^2(\Omega)$. Так как (5.3) является эквивалентной нормой в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, с помощью указанной замены легко получается, что с некоторой константой c (другой, чем в (5.8)) выполняется оценка

$$\begin{aligned} c^{-1} \|u_1(s, q)\|_{2,\varepsilon} &\leq \|(\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1 + \partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0) u_1\| \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\varepsilon^2 \ddot{C}_n(s) - (\nu_n - \nu_0) C_n|^2 ds \right)^{1/2} \leq c \|u_1(s, q)\|_{2,\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.10)$$

для всех $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$. С помощью разложения (5.2) и преобразования Фурье получается также неравенство

$$\|(\varepsilon^2 \partial_s^2 + \partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0)u_1\| \leq \|(\varepsilon^2 \partial_s^2 + \partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0 + \mu \varepsilon^2)u_1\| \quad (5.11)$$

для всех $\mu \leq 0$. Из оценок (5.7), (5.8), (5.10) и (5.11) ясно, что для решений системы $A_0(v_0, u_1) = (f_0, f_1)$ с некоторой константой c_1 выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} \leq c_1(\|f_0\| + \|f_1\|) \quad (5.12)$$

для всех $v_0 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$, $\mu \in W$, $\varepsilon > 0$.

В силу отмеченных выше свойств операторов B_{ij} , $i, j = 1, 2$, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ выполняется оценка

$$\|B(v_0, u_1)\| \leq c_2(\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon}). \quad (5.13)$$

Так как $(v_0, u_1) = A_0^{-1}(f_0, f_1)$, из (5.12) и (5.13) теперь получаем, что

$$\|BA_0^{-1}(f_0, f_1)\| \leq c_3(\|f_0\| + \|f_1\|),$$

где $c_3 = c_1 c_2$. Тем самым утверждение леммы доказано.

6. Сведение задачи о нахождении собственных значений оператора H_ε к неявному уравнению. Пусть μ_k и W_k выбраны так, как указано в формулировке теоремы 2. Рассмотрим задачу: по заданным (f_0, f_1, d) найти решение (v_0, u_1, g) системы

$$\begin{aligned} -\partial_s^2 v_0 + av_0 - \mu v_0 + g\Phi_k + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon \partial_s, \varepsilon)u_1 &= f_0(s), \\ -\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1 - (\partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0 + \mu \varepsilon^2)u_1 + B_{10}^0(s, \partial_s)v_0 \\ + \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon \partial_s, \varepsilon)u_1 &= f_1(s, q), \\ (v_0, \Phi_k) &= d, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $B_{i,j}$, $i, j = 1, 2$, определяются формулами (5.6), $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$, а d и g – числа. Подобные задачи рассматривались в [25] в связи с исследованием гипоеллиптичности некоторых операторов. Через A теперь обозначим соответствующий оператор

$$A: \mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C} \rightarrow L_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ оператор A при всех $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ является изоморфизмом и с некоторой константой c выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} + |g| \leq c(\|f_0\| + \|f_1\| + |d|). \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем A в виде $A = A_0 + \varepsilon B$, где A_0 – оператор, отвечающий системе (6.1) без слагаемых с $B_{i,j}$, $i, j = 1, 2$. Обратный оператор к A_0 задается явными формулами. Если $T_0 - \mu$ рассматривать как оператор из $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \cap [\chi_0]^\perp$ в $[\chi_0]^\perp$, то для $\mu \in W_k$ он имеет обратный оператор, который будем называть *редуцированной резольвентой* и обозначать как $\hat{R}_k(\mu)$. Формулы для обращения оператора A_0 имеют вид

$$v_0 = \hat{R}_k(\mu)(f_0 - (f_0, \Phi_k)\Phi_k) + d\Phi_k, \quad g = (\mu - \mu_k)d + (f_0, \Phi_k), \quad (6.3)$$

а u_1 определяется формулой из (5.7). Как и в п. 5, отсюда получаем, что A_0 при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon$ является изоморфизмом и для решений системы $A_0(v_0, u_1, g) = (f_0, f_1, d)$ с некоторой константой c_1 выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} + |g| \leq c_1(\|f_0\| + \|f_1\| + |d|), \quad (6.4)$$

аналогичная оценке (5.12). Вместо (5.13) теперь получаем

$$\|B_{00}v_0 + B_{01}u_1\| + \|B_{10}v_0 + B_{11}u_1\| \leq c_2(\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon}) \quad (6.5)$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым ε_0 . Отсюда получаем, что для решений системы (6.1) при $\mu \in W_k$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ выполняется оценка (6.2).

Будем обозначать g из системы (6.1) как $g(\mu, \varepsilon, f_0, f_1, d)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Число λ , принадлежащее $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где W_k и ε_0 указаны в предположении 1, тогда и только тогда является собственным значением оператора H_ε , когда

$$G(\mu, \varepsilon) = 0, \quad (6.6)$$

где μ связано с λ формулой (5.4), $G(\mu, \varepsilon) = g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что λ является собственным значением оператора H_ε тогда и только тогда, когда система (6.1) при $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ имеет такое решение, что

$$\|u_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} \neq 0 \quad \text{и} \quad g(\mu, \varepsilon, 0, 0, d) = 0.$$

При этом число d должно быть отличным от нуля, поскольку из $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 0$ в силу изоморфности оператора A должно следовать, что $u_0 = 0$, $u_1 = 0$. В силу линейности задачи $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, d) = g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)d$ мы получаем, что собственные значения оператора H_ε определяются уравнением (6.6). Тем самым предложение 2 доказано.

Нам понадобится также утверждение о гладкости решений системы (6.1). Введем пространство $\mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega)$, состоящее из функций, для которых $\partial_s^j u \in \mathcal{H}_D^2(\Omega)$, $j = 0, \dots, m$, и при $\varepsilon > 0$ определим норму, зависящую от ε , в этом пространстве:

$$\|u\|_{(2,m),\varepsilon} = \sum_{j=0}^m \|\partial_s^j u\|_{2,\varepsilon}.$$

При $\varepsilon = 1$ получаем обычную норму. Аналогичным образом определим пространство $\mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega)$, состоящее из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{(0,m)} = \sum_{j=0}^m \|\partial_s^j f\|,$$

так что $\mathcal{H}^{(0,0)}(\Omega) = L_2(\Omega)$. Оператор A можно рассматривать как отображение

$$A: \mathcal{H}^{2+m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}^m(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C}. \quad (6.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого целого $m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_m > 0$ и c_m , что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$ оператор A в (6.7) является изоморфизмом, а если имеется решение системы (6.1) $v_0 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$, $f_0 \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R})$, $f_1 \in \mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$, то

$$v_0 \in \mathcal{H}^{2+m}(\mathbb{R}), \quad u_1 \in \mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \quad (6.8)$$

и выполняется оценка

$$\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon} + |g| \leq c_m(\|f_0\|_m + \|f_1\|_{(0,m)} + |d|). \quad (6.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как при доказательстве предложения 1, из явных формул обращения оператора A_0 для решений системы $A_0(v_0, u_1, g) = (f_0, f_1, d)$ получается оценка

$$\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon} + |g| \leq c_1(\|f_0\|_m + \|f_1\|_{(0,m)} + |d|), \quad (6.10)$$

аналогичная (6.4), а вместо (6.5) получаем

$$\|B_{00}v_0 + B_{01}u_1\|_m + \|B_{10}v_0 + B_{11}u_1\|_{(0,m)} \leq c_2(\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon}) \quad (6.11)$$

с другими константами c_1 и c_2 , зависящими от m . Отсюда получаем, что ряд Неймана (5.9) для наших операторов A_0 и B при $\mu \in W_k$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$ с некоторым $\varepsilon_m > 0$ будет сходиться, если BA_0^{-1} рассматривать как оператор в $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_D^{(0,m)} \cap \mathcal{L}_0^\perp$. В результате мы получаем включения (6.8), а оценка (6.9) непосредственно вытекает из неравенств (6.10) и (6.11); тем самым предложение 3 доказано.

В заключение этого пункта приведем пример, противоречащий лемме 5.4 из [9], которая, в частности, утверждает (если использовать наши обозначения), что оператор $\partial_\varepsilon^n(T_0 - (\partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0)/\varepsilon^2 - \mu)^{-1}$, где $a(s) \geq 0$, $\mu \leq 0$, если рассматривать его как оператор в $\mathcal{L}_0^\perp$, для любых n равномерно ограничен при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Чтобы показать, что это не так даже при $a(s) \equiv 0$, достаточно убедиться в том, что оператор $\partial_\varepsilon^n(-\partial_s^2 + (\nu_1 - \nu_0)/\varepsilon^2 - \mu)^{-1}$ не будет равномерно ограниченным для любого $n > 2$. Действительно, после преобразования Фурье этот оператор переходит в умножение на функцию $f_n(\xi, \varepsilon) = \xi^{-2} \partial_\varepsilon^n F(\varepsilon \xi, \varepsilon)$, где $F(\eta, \varepsilon) = \eta^2/(\eta^2 + \nu_1 - \nu_0 - \mu \varepsilon^2)$. Выберем точку η_n так, чтобы $F^{(n)}(\eta_n, 0) \neq 0$, где $F^{(n)}(\eta, 0) = \partial_\eta^n F(\eta, 0)$, и положим $\xi_n = \eta_n/\varepsilon$. Разложив $F(\eta, \varepsilon)$ в ряд Тейлора по ε , получим $f_n(\xi_n, \varepsilon) \sim \eta_n^{n-2} F^{(n)}(\eta_n, 0)/\varepsilon^{n-2}$, что для $n > 2$ не является ограниченной величиной при $\varepsilon \rightarrow +0$.

7. Доказательство теоремы 2. Докажем, что функция $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ для $\mu \in W_k$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ и, если доопределить ее при $\varepsilon = 0$ этим пределом, то эта функция будет принадлежать $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0))$. А для этого достаточно показать, что она имеет ограниченные частные производные в $W_k \times (0, \varepsilon'_0)$, где ε'_0 любое, $0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_0$.

При $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого ε_0 оператор A аналитически зависит от параметров μ и ε и в силу предложения 1 обратим; следовательно, v_0 , u_1 (как функции со значениями в пространствах $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$) и g также аналитически зависят от этих параметров. Аналогичным образом, в силу предложения 3 они, как элементы пространств из левой части (6.7), аналитически зависят от μ и ε (при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$). Обозначим $v_0^{(n_1, n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} v_0$, $u_1^{(n_1, n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} u_1$, $g^{(n_1, n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} g$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любых целых $n \geq 0$, $m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_{n,m} \geq 0$ и константы $c_{n,m}$, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{n,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n)}$ для решений системы (6.1) выполняются оценки

$$\|v_0^{(0,n)}\|_{2+m} + \|u_1^{(0,n)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(0,n)}| \leq c_{m,n}(\|f_0\|_{m+n} + \|f_1\|_{(0,m+n)} + |d|). \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать (7.1) по индукции. В силу предложения 3 неравенство (7.1) выполнено при $n = 0$. Предположим, что (7.1) выполнено при всех m для $n \leq j-1$ и докажем, что (7.1) будет выполнено при всех m для $n = j$. Дифференцируя (6.1) по ε , получим

$$\begin{aligned} (-\partial_s^2 + a - \mu)v_0^{(0,j)} + g^{(0,j)}\Phi_k + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1^{(0,j)} &= F_0(s), \\ (-\varepsilon^2\partial_s^2 - \partial_{q_1}^2 - \partial_{q_2}^2 - \nu_0 - \mu\varepsilon^2)u_1^{(0,j)} + B_{10}^0(s, \partial_s)v_0^{(0,j)} &+ \\ + \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1^{(0,j)} &= F_1(s, q), \\ (v_0^{(0,j)}, \Phi_k) &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь F_0 состоит из суммы слагаемых $-C_j^i(\partial_\varepsilon^{j-i}(\varepsilon B_{00}))v_0^{(0,i)}$ и $-C_j^i(\partial_\varepsilon^{j-i}(\varepsilon B_{01}))u_1^{(0,i)}$, где $i \leq j-1$. Используя структуру операторов B_{ij} , $i, j = 1, 2$, и предположение индукции, получаем

$$\|F_0\|_m \leq c \sum_{i=0}^{j-1} (\|v_0^{(0,i)}\|_{2+m} + \|u_1^{(0,i)}\|_{(2,m+j-i),\varepsilon}) \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|).$$

А F_1 состоит из слагаемых, которые оцениваются аналогичным образом, и еще двух слагаемых $2C_j^1\varepsilon\partial_s^2u_1^{(0,j-1)}$ и $2C_j^2\partial_s^2u_1^{(0,j-2)}$, которые оцениваются так:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\partial_s^2u_1^{(0,j-1)}\|_{(0,m)} + \|\partial_s^2u_1^{(0,j-2)}\|_{(0,m)} &\leq \|\varepsilon\partial u_1^{(0,j-1)}\|_{(0,m+1)} + \|u_1^{(0,j-2)}\|_{(0,2+m)} \\ &\leq \|u_1^{(0,j-1)}\|_{(2,m+1),\varepsilon} + \|u_1^{(0,j-2)}\|_{(2,m+2),\varepsilon} \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\|F_0\|_m + \|F_1\|_{(0,m)} \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|).$$

Теперь (7.1) следует из предложения 3, примененного к системе (7.2), и предложение 4 доказано.

С помощью индукции по n_1 аналогичным образом устанавливается оценка производных, содержащих дифференцирования по μ , при этом оценка (7.1) является началом индукции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любых целых $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $m \geq 0$ найдутся такие константы $c_{n_1,n_2,m}$, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{n_2,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n_2}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n_2)}$ для решений системы (6.1) выполняются оценки

$$\|v_0^{(n_1,n_2)}\|_{2+m} + \|u_1^{(n_1,n_2)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(n_1,n_2)}| \leq c_{n_1,n_1,m}(\|f_0\|_{m+n_2} + \|f_1\|_{(0,m+n_2)} + |d|). \quad (7.3)$$

Теперь мы можем доказать бесконечную дифференцируемость функции $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ на $W_k \times [0, \varepsilon_0)$. Как уже отмечалось выше, для этого достаточно установить ограниченность производных от $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ на $[0, \varepsilon'_0)$, где $0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_0$. Но это следует из установленной ранее аналитичности функции $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и оценок (7.3).

Аналогичным образом устанавливается, что v_0 и u_1 (как функции со значениями в $\mathcal{H}^{2+m}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega)$) для $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$ имеют пределы при $\varepsilon \rightarrow +0$. Доопределив их этими пределами при $\varepsilon = 0$, получим функции из $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_m))$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в первом и третьем уравнениях системы (6.1), получим

$$(T_0 - \mu)v_0 + G(\mu, 0)\Phi_k = 0, \quad (v_0, \Phi_k) = 1;$$

следовательно, $v_0 = \Phi_k$ и $G(\mu, 0) = \mu - \mu_k$. Поэтому $\partial_\mu G(\mu, 0) = 1 \neq 0$ и утверждение теоремы 2 теперь вытекает из предложения 2 и теоремы о неявной функции.

В заключение этого пункта вычислим коэффициент $d_{k,1}$ из асимптотического разложения (2.3). Опять взяв $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в первом уравнении системы (7.2) при $j = 1$, получим

$$(T_0 - \mu_k)v_0^{(0,1)} + G^{(0,1)}(\mu_k, 0)\Phi_k + b_{00}(s, \partial_s, 0)v_0 = 0,$$

где b определяется из (3.5). Как только что было показано, $v_0 = \Phi_k$, поэтому, умножая скалярно на Φ_k это уравнение, получим, что

$$G^{(0,1)}(\mu_k, 0) = -(b_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k, \Phi_k);$$

следовательно,

$$d_{k,1} = -\frac{G^{(0,1)}(\mu_k, 0)}{G^{(1,0)}(\mu_k, 0)} = (b_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k, \Phi_k).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, “Асимптотика собственных функций уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых и рассеяние электромагнитных волн в волноводе”, *Докл. АН СССР*, **123**:4 (1958), 631–633.
- [2] V. P. Maslov, “Mathematical aspects of integral optics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 83–105.
- [3] В. П. Маслов, Е. М. Воробьев, “Об одномодовых открытых резонаторах”, *Докл. АН СССР*, **179**:3 (1968), 558–561.
- [4] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, С. О. Сеницын, “Асимптотические решения уравнения Шрёдингера в тонких трубках”, *Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН*, **9**:1 (2003), 1–11.
- [5] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, С. О. Сеницын, Т. Я. Тудоровский, “Квазиклассическое приближение и канонический оператор Маслова для нерелятивистских уравнений квантовой механики в нанотрубках”, *Докл. РАН*, **393**:4 (2003), 460–464.
- [6] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskii, “Quantum and classical dynamics of electron in thin curved tubes with spin and external electromagnetic fields taken into account”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 109–119.
- [7] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, “Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках. I. Редукция к пространственно-одномерным уравнениям”, *ТМФ*, **141**:2 (2004), 267–303.

- [8] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, “Обобщенный адиабатический принцип для описания динамики электрона в искривленных наноструктурах”, *УФН*, **175**:9 (2005), 1004–1010.
- [9] P. Duclos, P. Exner, “Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions”, *Rev. Math. Phys.*, **7**:1 (1995), 73–102.
- [10] P. Exner, P. Šeba, “Bound states in curved quantum waveguides”, *J. Math. Phys.*, **30**:11 (1989), 2574–2580.
- [11] P. Exner, “Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature”, *J. Math. Phys.*, **34**:1 (1993), 23–28.
- [12] P. Exner, “A quantum pipette”, *J. Phys. A*, **28**:18 (1995), 5323–5330.
- [13] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1487–1495.
- [14] P. Exner, S. A. Vugalter, “Bound states in a locally deformed waveguide: the critical case”, *Lett. Math. Phys.*, **39**:1 (1997), 59–68.
- [15] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl’shin, D. Krejčířík, “Bound states in a weakly deformed strips and layers”, *Ann. Henri Poincaré*, **2**:3 (2001), 553–572.
- [16] В. В. Грушин, “О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях”, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 360–371.
- [17] В. В. Грушин, “Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрёдингера с поперечным потенциалом в слабо искривленных бесконечных цилиндрах”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 656–664.
- [18] Р. Р. Гадыйшин, “О локальных возмущениях квантовых волноводов”, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 358–371.
- [19] Л. И. Магарилл, М. В. Энтин, “Электроны в криволинейной квантовой проволоке”, *ЖЭТФ*, **123**:4 (2003), 867–876.
- [20] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Grundlehren Math. Wiss., **116**, Springer-Verlag, Berlin, 1963; рус. пер.: Л. Хермандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965.
- [21] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1978.; рус. пер.: М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [22] B. Chenuaud, P. Duclos, P. Freitas, D. Krejčířík, “Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes”, *Differential Geom. Appl.*, **23**:2 (2005), 95–105.
- [23] М. С. Агранович, М. И. Вишик, “Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида”, *УМН*, **19**:3 (1964), 53–161.
- [24] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972; рус. пер.: М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [25] В. В. Грушин, “Об одном классе псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии”, *Матем. сб.*, **84**:2 (1971), 163–195.

В. В. Грушин

Московский государственный институт электроники и математики

E-mail: pm@miem.edu.ru

Поступило

05.10.2006