Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, Стабильные когомологии компактных однородных пространств, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 803–814

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:18:08

Стабильные когомологии компактных однородных пространств

В. В. Горбачевич

Работа посвящена изучению когомологий некоторых компактных однородных пространств. Вводится понятие стабильных когомологий (не меняющихся при переходе к конечнолистному накрытию), приводятся некоторые примеры вычисления этих когомологий (теорема 1) и их применения к изучению строения компактных однородных пространств (теорема 2). Сформулировано также несколько предположений о свойствах стабильных когомологий, связанных с различными разделами математики (топология, когомологии дискретных, в частности, полициклических групп).

Библиография: 14 названий.

Данная работа посвящена изучению когомологий некоторых компактных однородных пространств. Вводится понятие стабильных когомологий (не меняющихся при переходе к конечнолистному накрытию), приводятся некоторые примеры вычисления этих когомологий (теорема 1) и их применения к изучению строения компактных однородных пространств (теорема 2). Сформулировано также несколько предположений о свойствах стабильных когомологий, связанных с различными разделами математики (топология, когомологии дискретных, в частности, полициклических групп).

1. Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство связной группы Ли G , здесь H – некоторая замкнутая равномерная подгруппа в G (равномерность означает, что фактор-пространство G/H компактно). Для компактных однородных пространств в [1] (см. также обзор [2]) было построено натуральное расслоение (гладкое, локально тривиальное) $M_c \rightarrow M \rightarrow M_a$, база M_a которого асферична (т.е. все ее гомотопические группы, кроме, возможно, фундаментальной группы $\pi_1(M)$ тривиальны), M_c – слой этого расслоения, он является однородным пространством вида K/L некоторой компактной полупростой группы Ли K (фактически, максимальной компактной полупростой подгруппы в группе Ли G , транзитивной на M). Правда, такое расслоение существует не для произвольного компактного однородного пространства, а, вообще говоря, только для некоторого подходящего однородного пространства M' , конечнолистно накрывающего исходное M . Структурной группой этого расслоения является компактная группа Ли $N_K(L)/L$ (группа автоморфизмов однородного пространства K/L), здесь $N_K(L)$ – нормализатор подгруппы L в K .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00647).

Для исходного M тоже можно построить некоторое аналогичное расслоение, но уже не локально тривиальное, а расслоение Зейферта, т.е. расслоение с особенностями, причем база его – орбиобразие, которое может иметь особые точки. Однородное пространство M_c имеет конечную фундаментальную группу, когомологии таких пространств хорошо изучены (см., например, [3]). Что касается многообразия M_a , то в силу своей асферичности оно однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности (а иногда даже и с точностью до диффеоморфизма) определяется своей фундаментальной группой, а его когомологии всегда изоморфны когомологиям этой группы.

База M_a натурального расслоения, а точнее, некоторое многообразие M'_a , его конечнолистно покрывающее (и определяемое подходящей подгруппой конечного индекса в $\pi_1(M)$), имеет гладкое, локально тривиальное расслоение $M_r \rightarrow M'_a \rightarrow M_s$ (см. [2]). Слой M_r этого расслоения, называемого *структурным*, имеет вид R/Γ , где R – некоторая связная, односвязная разрешимая группа Ли, а Γ – решетка в R (т.е. дискретная подгруппа с компактным фактор-пространством). База M_s – локально симметрическое пространство вида $K \setminus S/D$, здесь S – полупростая группа Ли без компактных компонент, K – максимальная компактная подгруппа в S , а D – решетка в S . Многообразие M_r называют *разрешимой компонентой* исходного компактного однородного пространства M , а M_s – его полупростой компонентой. Более подробно о строении произвольных компактных однородных пространств см. обзор [2], где указана и дальнейшая литература.

Кроме компактных однородных пространств можно рассматривать и более общий случай – класс плезиокомпактных однородных пространств (см. [4]), который, наряду с компактными, включает и (некомпактные) однородные пространства с конечной инвариантной мерой. Для плезиокомпактных однородных пространств тоже можно построить натуральное и структурное расслоения, обладающие аналогичными свойствами (кроме, конечно, компактности многообразий M_a и M_s , которая в этом случае имеет место не всегда).

Если полупростая компонента M_s отсутствует (т.е. вырождается в точку), то имеем расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_r$. В этом случае однородное пространство M называют *слабо разрешимым*. *Разрешимыми* или *сольвмногообразиями* называют однородные пространства разрешимых групп Ли, у них отсутствует и компонента M_c , т.е. для них $M' = M_r$. Фундаментальную группу $\pi_1(M)$ называют при вырождении M_s в точку *слабо разрешимой* или *слабо соизмеримой с разрешимой*. Последнее означает, что в $\pi_1(M)$ существует подгруппа конечного индекса, а в той – такой конечный нормальный делитель, что фактор-группа по нему разрешима (подробнее см. [2]). Две подгруппы некоторой группы называют *соизмеримыми*, если их пересечение имеет конечный индекс в каждой из них. Понятие слабой соизмеримости обобщает это понятие соизмеримости. Отметим, что если M – плезиокомпактное слабо разрешимое однородное пространство, то оно обязательно компактно.

2. В данной работе мы рассматриваем пространство когомологий $H^*(M)$ в основном с вещественными коэффициентами, а вкратце также и с другими (целыми и рациональными) коэффициентами. Так как компактные однородные пространства удобно рассматривать с точностью до конечнолистного накрытия (это позволяет резко упростить формулировки многих свойств таких M – см., например, [2]), то естественно возникает вопрос о поведении пространства когомологий при переходе к конечнолистному накрытию и о том, можно ли обозреть пространства когомоло-

гий для всевозможных конечнолистных накрытий данного компактного (или плезиокомпактного, это не вносит здесь существенных изменений) однородного пространства M и можно ли выделить самую существенную, стабильную часть этих когомологий.

Так как M компактно и конечномерно, то ясно, что и $\dim H^*(M, \mathbb{R}) < \infty$. Однако в общем случае может не существовать оценки сверху для $\dim H^*(M, \mathbb{R})$, зависящей только от $\dim M$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим компактное однородное пространство вида $M = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$, где Γ – решетка в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, свободная от кручения. Здесь компонента M_c вырождается в точку (так как M асферично), а структурное расслоение имеет вид $M_r = \mathrm{SO}(2) \rightarrow M \rightarrow M_s = \mathrm{SO}(2) \setminus \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$. База M_s этого расслоения является, как хорошо известно, ориентируемой поверхностью некоторого рода $g \geq 2$. Известно, что $\dim H^1(M, \mathbb{R}) \geq 2g$ (см., например, [5]). Так как род g может быть сколь угодно велик (при подходящем выборе решетки Γ), а размерность $\dim M = 3$ (т.е. постоянна), то оценки сверху, зависящей только от $\dim M$, здесь не существует даже для первого числа Бетти $b^1 = \dim H^1(M, \mathbb{R})$. В этом примере фигурирует полупростая группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, вещественный ранг которой равен 1. Для таких полупростых групп Ли известна гипотеза, в силу которой для любых решеток в них первое число Бетти этих решеток (или некоторых подгрупп конечного индекса в них) положительно. Окончательно эта гипотеза до сих пор не доказана (осталось рассмотреть только исключительные простые группы Ли, подробнее о решетках в классических группах Ли ранга 1 см. обзор [6]). При этом в процессе доказательства оказывалось, что для подходящих подгрупп конечного индекса в таких решетках первое число Бетти может быть сколь угодно большим. Поэтому и отсутствие оценки сверху для размерности пространства когомологий тесно связано с наличием в полупростой компоненте M_s (точнее, в соответствующем симметрическом пространстве) факторов вещественного ранга 1. Если такие факторы есть, то переходом к конечнолистному накрытию можно получить сколь угодно большое число Бетти, а потому размерность пространства когомологий соответствующего однородного пространства при переходе к конечнолистным накрытиям может стать сколь угодно большой.

В приведенном выше примере размерность однородного пространства равна 3. Это не случайно, ибо однородных пространств M размерности ≤ 2 с точностью до диффеоморфизма конечное число (компактных ровно пять, из них одно одномерное), а потому размерности пространств их когомологий ограничены сверху универсальной константой, легко вычисляемой непосредственно: она равна $2^{\dim M}$, т.е. равна 2 и 4 для однородных пространств размерностей 1 и 2 соответственно. Неравенство $\dim H^*(M, \mathbb{R}) \leq 2^{\dim M}$ следует из доказанной ниже теоремы 1, если заметить, что все компактные однородные пространства размерности ≤ 2 являются слабо разрешимыми.

Нижеследующая теорема 1 показывает, что универсальная оценка сверху для размерности пространства когомологий компактных однородных пространств существует, если ограничиться только слабо разрешимыми однородными пространствами. Появление же полупростой компоненты, как показано в вышеприведенном примере, может привести при переходе к конечнолистным накрытиям к неограниченному росту размерности пространства когомологий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – некоторое слабо разрешимое компактное однородное пространство. Тогда $\dim H^*(M, \mathbb{R}) \leq 2^m$, где $m = \dim M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $M' \rightarrow M$ – некоторое конечнолистное регулярное накрытие (оно соответствует выбору нормальной подгруппы конечного индекса в $\pi_1(M)$), то из спектральной последовательности этого накрытия немедленно вытекает, что $\dim H^*(M', \mathbb{R}) \geq \dim H^*(M, \mathbb{R})$. Поэтому при доказательстве нашей теоремы мы можем при желании заменять M на подходящее компактное однородное пространство M' , его конечнолистно покрывающее (причем всегда можем считать, что это накрытие регулярно, так как в любой подгруппе конечного индекса всегда содержится нормальная подгруппа, индекс которой тоже конечен). Поэтому, в частности, мы можем предполагать, что исходное однородное пространство M имеет натуральное расслоение $M_c \rightarrow M \rightarrow M_a$. Положим $\dim M_c = k$, $\dim M_a = l$.

Многообразие M_a асферично, поэтому $H^*(M_a, \mathbb{R}) \simeq H^*(\pi_1(M_a), \mathbb{R})$. Так как по условию M слабо разрешимо, то $M_a = M_r$ и группа $\pi_1(M_a)$ изоморфна решетке в некоторой разрешимой группе Ли, и потому полициклическа (т.е. имеет нормальный ряд с циклическими факторами). Более того, она даже $\mathbb{Z}$ -полициклическа, т.е. получается последовательными расширениями с помощью группы $\mathbb{Z}$ (любая решетка в односвязной разрешимой группе Ли $\mathbb{Z}$ -полициклическа, см., например, [7]). Из спектральной последовательности для расширений групп выводится, что

$$\dim H^*(\pi_1(M_a), \mathbb{R}) \leq \dim H^*(\mathbb{Z}^l, \mathbb{R}) = 2^l,$$

где l равно рангу полициклической группы $\pi_1(M_a)$ или равной ему размерности многообразия M_a . При $l = 1$ это очевидно, а при $l \geq 2$ доказывается по индукции.

Рассмотрим теперь однородное пространство M_c . Имеем $M_c = K/L$, где K – связная компактная группа Ли, а L – ее замкнутая подгруппа. Рассмотрим $H^*(M_c, \mathbb{R})$ как когомологии де Рама (состоящие из когомологических классов дифференциальных форм). Любая p -форма $\phi \in H^p(M_c, \mathbb{R})$ когомологична, как известно, некоторой K -инвариантной форме, которая однозначно определяется своим значением в некоторой фиксированной точке, например, в точке $eL \in K/L$. Поэтому $\dim H^p(M_c, \mathbb{R})$ не превосходит размерности внешней степени $\Lambda^p(T_{eL})$ касательного пространства многообразия M_c в точке eL . Следовательно, $\dim H^p(M_c, \mathbb{R}) \leq C_k^p$, откуда получаем, что $\dim H^*(M_c, \mathbb{R}) \leq 2^k$, где $k = \dim M_c$.

Из спектральной последовательности натурального расслоения легко следует, что $\dim H^*(M, \mathbb{R}) \leq \dim H^*(M_c, \mathbb{R}) \cdot \dim H^*(M_a, \mathbb{R})$, а потому $\dim H^*(M, \mathbb{R}) \leq 2^{k+l} = 2^m$.

Указанное в теореме неравенство превращается в равенство, очевидно, для торов и, как нетрудно доказать, только для них с точностью до диффеоморфизма (среди слабо разрешимых компактных однородных пространств).

3. Доказанная теорема подсказывает нам один полезный инвариант топологических пространств, рассматриваемых с точностью до конечнолистного накрытия, который для слабо разрешимых компактных однородных пространств достаточно обзрим и в простейших случаях может быть явно вычислен.

Пусть $\pi: M' \rightarrow M$ – конечнолистное накрытие некоторого многообразия M (можно рассматривать и более общие топологические пространства, но нам это здесь не понадобится и потому мы ограничиваемся случаем многообразий). Это накрытие индуцирует гомоморфизм групп когомологий $\pi^*: H^*(M, A) \rightarrow H^*(M', A)$, где A – некоторая произвольная абелева группа коэффициентов. Система групп $\{H^*(M', A)\}$ для всевозможных конечнолистных накрытий вместе с индуцированными гомоморфизмами образует индуктивную (или, в другой терминологии, прямую) систему

абелевых групп. Рассмотрим предел этой индуктивной системы $\varinjlim H^*(M', A)$. Предельную группу обозначим $H_{\text{st}}^*(M, A)$ и будем называть *группой* (или *кольцом*, когда A – кольцо, и тогда когомологии получают естественную кольцевую структуру) *стабильных когомологий* многообразия M . Эти когомологии можно было бы назвать и “этальными”, но, к сожалению, этот термин уже использован (в другом смысле) в алгебраической геометрии.

Например, пусть $M = S^1$ – окружность, тогда $H^1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Легко проверить, что группа $H_{\text{st}}^1(S^1, \mathbb{Z})$ изоморфна группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Можно рассматривать не только предел когомологий, но и топологический предел системы (теперь уже проективной или обратной), составленной из всех многообразий, конечнолистно накрывающих данное. Если исходное многообразие компактно, то и этот предел тоже является компактным топологическим пространством (а именно, замкнутым подмножеством прямого произведения всех пространств M' , конечнолистно накрывающих исходное многообразие), однако он не обязательно является многообразием (хотя будет многообразием в некоторых тривиальных случаях, например, если исходное многообразие односвязно или его фундаментальная группа конечна). Можно предположить, что если фундаментальная группа исходного многообразия бесконечна, то указанный предел никогда не будет конечномерным гладким многообразием. Для случая $M = S^1$ предельное пространство – это соленид (хорошо известное в общей топологии пространство).

Пусть теперь M – некоторое компактное однородное пространство. Тогда кольцо $H_{\text{st}}^*(M, \mathbb{R})$ может иметь довольно сложное строение, строение кольца целочисленных когомологий $H_{\text{st}}^*(M, \mathbb{Z})$ может быть еще более сложным. Ясно, что $H_{\text{st}}^k(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ при $k \geq \dim M$, но векторные пространства $H_{\text{st}}^k(M, \mathbb{R})$ при $k \leq \dim M$ могут оказаться бесконечномерными. Например, если $M = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$, где Γ – решетка в $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, то $\dim H_{\text{st}}^i(M, \mathbb{R}) = \infty$ при $i = 1, 2$ (см. пример выше). Однако если M слабо разрешимо, то ясно, что $\dim H_{\text{st}}^i(M, \mathbb{R}) \leq 2^m < \infty$, где $m = \dim M$, т.е. в этом случае все пространства стабильных когомологий конечномерны. Более того, ясно, что $H_{\text{st}}^*(M, \mathbb{R}) \simeq H^*(G/H^*, \mathbb{R})$ для некоторой подгруппы H^* конечного индекса в H . Такого рода однородные пространства G/H^* будем называть *когомологически стабильными*. Наш интерес к алгебре $H_{\text{st}}^*(M, \mathbb{R})$ обусловлен тем, что эта (конечномерная в интересующих нас здесь случаях) алгебра не меняется при переходе от M к любому M' , его конечнолистно накрывающему, и потому для ее вычисления можно применять результаты о строении и классификации компактных однородных пространств (основанные именно на переходе к подходящему конечнолистному накрытию для упрощения описания), особенно в слабо разрешимом случае. Кроме того, стабильные когомологии (с рациональными коэффициентами) полезны при когомологическом изучении произвольных полициклических групп, так как для них рациональные стабильные когомологии конечномерны и не зависят от тех нюансов, которые имеются для обычных когомологий и которые исчезают при переходе к подгруппе конечного индекса (а таких нюансов в теории полициклических групп немало – см., например, [7], [8]). Здесь естественно вводится понятие когомологически стабильных полициклических групп (т.е. тех, для которых когомологии с рациональными коэффициентами изоморфны стабильным). Простейший пример здесь – это $\mathbb{Z}^n$. Чуть более интересен другой пример – группа $N_3(\mathbb{Z})$ унитарных треугольных матриц третьего порядка с целыми коэффициентами, она также когомологически стабильна (см. ниже).

Представляет интерес также и алгебра целочисленных стабильных когомологий $H_{\text{st}}^*(M, \mathbb{Z})$. Тут $H_{\text{st}}^k(M, \mathbb{Z})$ – абелевы группы, вообще говоря, не являющиеся конечно-порожденными. Если M – слабо разрешимое компактное однородное пространство, то эти абелевы группы при тензорном умножении на $\mathbb{Q}$ станут, как легко вытекает из доказанной выше теоремы, конечномерными векторными пространствами над $\mathbb{Q}$, но сами они, вообще говоря, не будут иметь конечного числа образующих (ни в свободной своей части, ни для кручения) – см. примеры ниже. Можно предположить, что на самом деле для указанных M уже сами свободные части стабильных когомологий являются векторными пространствами над $\mathbb{Q}$.

Что касается кручения стабильных когомологий, то из леммы 3.5 работы [9; часть II] и определения стабильных когомологий вытекает такое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если X – некоторый конечный комплекс (например, компактное гладкое многообразие), то группа $H_{\text{st}}^2(X, \mathbb{Z})$ свободна от кручения.*

Доказательство этого факта основано на том, что переходом к подходящему конечнолистному накрытию можно “убить” (т.е. обратить в нуль образ при индуцированном накрытием отображении когомологий) любой элемент конечного порядка в двумерных целочисленных когомологиях (связанных с одномерными гомологиями формулой универсальных коэффициентов).

Отметим, что группа $H_{\text{st}}^3(X, \mathbb{Z})$ уже может иметь кручение. Например, группа Ли $\text{Spin}(5)$ односвязна и в ее трехмерных целочисленных когомологиях имеется нетривиальное кручение (элемент второго порядка). В силу односвязности этой группы Ли никакой переход к нетривиальному конечнолистному накрытию невозможен, и потому стабильные когомологии совпадают с обычными целочисленными когомологиями, кручение тут “не убивается”. Вопрос же о кручении в $H_{\text{st}}^1(X, \mathbb{Z})$ тривиален, так как для любого комплекса X кручение в $H^1(X, \mathbb{Z})$ отсутствует, а потому и $H_{\text{st}}^1(X, \mathbb{Z})$ никогда не имеет кручения.

Возможно, что для стабильных когомологий некоторых асферичных многообразий справедлив аналог предложения 1 в любой размерности. Особенно правдоподобно это предположение для компактных нильмногообразий (компактных однородных пространств нильпотентных групп Ли) и некоторых солвмногообразий (например, солвмногообразий треугольных групп Ли). А вот для компактных локально симметричных римановых многообразий кручение, если оно есть, видимо, далеко не всегда исчезает при переходе к целочисленным стабильным когомологиям.

Перейдем теперь к явному вычислению стабильных когомологий в некоторых частных случаях.

4. Вначале рассмотрим случай, когда M – компактное солвмногообразие. Известно (см., например, [10]), что такое многообразие M конечнолистно накрывается солвмногообразием с дискретной стационарной подгруппой, т.е. имеющим вид R/Γ , где Γ – решетка в разрешимой группе Ли R . При вычислении стабильных когомологий мы можем считать, что уже исходное солвмногообразие имеет такой вид. Если группа Ли R нильпотентна, то в силу наличия решетки в ней ее алгебра Ли $L(R)$ имеет рациональную структуру. Но тогда известно (см. [7]), что алгебра рациональных когомологий $H^*(\Gamma, \mathbb{Q})$ изоморфна алгебре (ассоциативной и косокоммутативной) $H^*(L(R), \mathbb{Q})$ когомологий алгебры Ли $L(R)$ группы Ли R . Поэтому в этом случае получаем, что $H^*(M, \mathbb{Q}) \simeq H^*(L(R), \mathbb{Q})$, аналогичный изоморфизм имеется, конечно, и для когомологий с вещественными коэффициентами. Изоморфизм

этот порождается естественными вложениями $H^*(L(R), \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(R/\Gamma', \mathbb{Q})$ для всевозможных подгрупп конечного индекса $\Gamma' \subset \Gamma$ в решетке Γ . Тем самым, имеется естественное отображение

$$H^*(L(R), \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{st}}^*(R/\Gamma, \mathbb{Q}),$$

которое, как нетрудно проверить, является изоморфизмом.

Этот изоморфизм позволяет свести вычисление рациональных и вещественных стабильных когомологий компактных нильмногообразий (т.е. однородных пространств нильпотентных групп Ли), а также любых многообразий, конечнолистно накрываемых компактными нильмногообразиями (их называют *инфра-нильмногообразиями*) к задаче линейной алгебры – к вычислению когомологий конечномерных алгебр Ли. В явном виде вычислить когомологии нильпотентных алгебр Ли удастся далеко не всегда (хотя в некоторых частных случаях это сделано), но для любой конкретной нильпотентной алгебры Ли эта задача может быть решена без особого труда с помощью какого-либо достаточно мощного математического пакета (например, MapleV, Mathematica и др., а также специализированных программ, например SuperLie Грозмана). Если группа Ли R не является нильпотентной, то когомологии решетки в ней (изоморфные когомологиям соответствующего компактного однородного пространства) не обязательно будут изоморфны когомологиям соответствующей алгебры Ли. Например, в группе Ли $\tilde{E}(2)$ – универсальной накрывающей группы Ли $E(2)$ движений евклидовой плоскости, сохраняющих ориентацию, имеется решетка, изоморфная $\mathbb{Z}^3$ (она является прообразом при универсальном накрытии подгруппы параллельных переносов плоскости на векторы с целочисленными координатами). При этом первое число Бетти этой группы (и соответствующего компактного однородного пространства) $b^1(\mathbb{Z}^3)$ равно 3, а первое число Бетти алгебры Ли $e(2)$ равно 1 (ибо оно равно размерности фактор-алгебры этой алгебры Ли по ее коммутанту). Однако для треугольных разрешимых групп Ли ситуация вполне аналогична нильпотентному случаю (см. [6]).

Для решеток в произвольных разрешимых группах Ли имеет место естественное вложение $H^*(L(R), \mathbb{R}) \rightarrow H^*(R/\Gamma, \mathbb{R})$ [7]. Поэтому $H^*(L(R), \mathbb{R})$ можно рассматривать как подалгебру в $H^*(R/\Gamma, \mathbb{R})$. Если R треугольна, то эта подалгебра совпадает с алгеброй стабильных когомологий. То же имеет место и в более общей ситуации – когда пара (R, Γ) удовлетворяет следующему условию: алгебраические замыкания линейных групп $\text{Ad}_R(R)$ и $\text{Ad}_R(\Gamma)$ совпадают [7] (здесь $\text{Ad}_R: R \rightarrow GL(L(R))$ – присоединенное представление). Однако в общем случае эта подалгебра собственная (пример приведен выше).

Рассмотрим компактные солвмногообразия M небольшой размерности. Если $M = R/\Gamma$ и $\dim M \leq 2$, то группа Ли R абелева и потому когомологии M (с любыми коэффициентами) изоморфны когомологиям тора соответствующей размерности. Поэтому стабильные когомологии солвмногообразия размерности ≤ 2 изоморфны когомологиям некоторого тора. Отметим, что на самом деле существует только одно компактное солвмногообразие размерности ≤ 2 , не диффеоморфное тору – это бутылка Клейна K^2 .

Рассмотрим теперь трехмерные компактные солвмногообразия M . С точностью до конечнолистного накрытия каждое такое многообразие диффеоморфно однородному пространству вида R/Γ , где R – трехмерная односвязная разрешимая группа Ли, изоморфная одной из следующих групп Ли: абелевой $\mathbb{R}^3$, нильпотентной группе Ли $N_3(\mathbb{R})$, состоящей из всех унипотентных треугольных вещественных матриц, или

же группе Ли $T = \mathbb{R} \cdot_{\phi} \mathbb{R}^2$ – полупрямому произведению $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$, отвечающему гомоморфизму $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, задаваемому формулой $\phi(t) = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ (см. [11]). В первом случае M конечнолистно покрывается тором. Ясно, что стабильные целочисленные и рациональные когомологии тора T^n произвольной размерности n изоморфны внешней алгебре над $\mathbb{Q}^n$. Для нильпотентной группы Ли $N_3(\mathbb{R})$ рациональные когомологии соответствующего однородного пространства изоморфны, как было указано выше, рациональным когомологиям соответствующей алгебры Ли (то же верно и для вещественных когомологий). Поэтому числа Бетти b^1 и b^2 (равные между собой в силу двойственности Пуанкаре) нильмногообразия $M = N_3(\mathbb{R})/\Gamma$ равны 2. Поэтому

$$H^1(M, \mathbb{Q}) \simeq H^2(M, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^2.$$

Однако легко проверить, что целочисленные стабильные когомологии $H_{\mathrm{st}}^1(M, \mathbb{Z})$, $H_{\mathrm{st}}^2(M, \mathbb{Z})$ тоже изоморфны $\mathbb{Q}^2$. Для этого заметим, что для всех решеток Γ в $N_3(\mathbb{R})$ будет $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$ и $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2 \oplus F$, где F – некоторая конечная абелева группа. При переходе к конечнолистному накрытию $\mathbb{Z}^2$ -компонента заменяется на подгруппу некоторого конечного индекса n (делителя индекса подгруппы фундаментальной группы, соответствующей накрытию), поэтому при переходе к прямому пределу по индуктивной системе, порожденной всеми конечнолистными накрытиями, получится $\mathbb{Q}^2$. Что касается конечной компоненты, то при переходе к пределу она, как нетрудно видеть (используя хорошо известное строение подгрупп конечного индекса в Γ), аннулируется. Вообще, можно показать (используя некоторые более тонкие связи нильмногообразий и рациональных алгебр Ли), что целочисленные стабильные когомологии любого нильмногообразия, рассматриваемые как абелевы группы, изоморфны $\mathbb{Q}^N$ при некоторых целых N . Кольцевая структура стабильных когомологий для трехмерного компактного нильмногообразия достаточно очевидна. А именно, кольцо когомологий порождается (мультипликативными) образующими x, y (степени 1) и u, v (степени 2) и определяется следующими соотношениями между ними: $x^2 = y^2 = xy = u^2 = v^2 = uv = 0$, а $xu = yv$ – образующая трехмерной группы когомологий.

Рассмотрим теперь солвмногообразия вида T/Γ , где группа Ли T описана выше (кстати, она принадлежит классу треугольных групп Ли, которые характеризуются тем, что все собственные значения линейных операторов присоединенного представления этих групп Ли вещественны). Для треугольных групп Ли вещественные когомологии любой решетки изоморфны (как и в нильпотентном случае) вещественным когомологиям алгебры Ли этой группы Ли. Поэтому числа Бетти b^1, b^2 соответствующего группе Ли T компактного однородного пространства равны 1. Более точно, выпишем образующие одномерных и двумерных когомологий. Для $T = \mathbb{R} \cdot_{\phi} \mathbb{R}^2$ пусть e_1 порождает $\mathbb{R}$, а e_2, e_3 – базис в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через ω_i линейные формы, сопряженные e_i . Тогда нетрудно проверить, что ω_1 порождает одномерные когомологии алгебры Ли $L(T)$, а $\omega_2 \wedge \omega_3$ – двумерные.

Рассмотрим теперь когомологии с целыми коэффициентами для этих однородных пространств. В [9] были с точностью до соизмеримости классифицированы все решетки в T . Оказалось, что любая такая решетка D с точностью до соизмеримости (т.е. с точностью до изоморфизма и перехода к подгруппе конечного индекса) задается некоторым набором простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_N$, соответствующий класс соизмеримых между собой решеток обозначается $\Gamma(p_1, p_2, \dots, p_N)$. Рассуждение, аналогичное приведенному выше для решеток в $N_3(\mathbb{R})$ (и даже более простое, так

как здесь свободная от кручения компонента одномерных и двумерных целочисленных кохомологий изоморфна $\mathbb{Z}$), показывает, что

$$H_{\text{st}}^1(T/D, \mathbb{Z}) \simeq H_{\text{st}}^2(T/D, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}.$$

Этим завершается вычисление размерностей стабильных кохомологий для трехмерных компактных солвмногообразий. Что касается умножения в кохомологиях, то оно описывается без особого труда. А именно, кольцо стабильных кохомологий для T/D изоморфно кольцу кохомологий пространства $S^2 \times S^1$ – прямого произведения двумерной сферы и окружности.

Аналогично можно было бы вычислить и стабильные кохомологии компактных солвмногообразий размерности 4 (перечисление соответствующих минимальных групп Ли приведено, например, в [11], [12]), с ростом размерности явные вычисления становятся все более громоздкими. Общих подходов к вычислению кохомологий (стабильных или обычных) в настоящее время не видно. Отметим только, что для нильмногообразий размерности 4 интересен только случай единственной неразложимой (когда она не распадается в прямую сумму) алгебры Ли. Эта алгебра Ли задается в подходящем базисе коммутационными соотношениями $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$. Алгебра стабильных вещественных кохомологий здесь в терминах образующих и соотношений описывается довольно громоздко, однако ее полином Пуанкаре находится без труда – это

$$t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1 = (1+t)(1+t+t^2+t^3).$$

5. Перейдем к рассмотрению произвольных трехмерных компактных однородных пространств M . Как доказано в [11], если рассматривать их с точностью до конечнолистного накрытия, то M либо является солвмногообразием, либо диффеоморфно многообразию S^3 , $S^2 \times S^1$ или же многообразию вида $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$, где Γ – решетка в группе Ли $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. В последнем случае одномерные и двумерные стабильные кохомологии бесконечномерны (см. выше), а для S^3 и $S^2 \times S^1$ вычисление стабильных кохомологий не представляет труда. В результате нами доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – некоторое трехмерное компактное однородное пространство. Тогда алгебра его стабильных рациональных кохомологий $H_{\text{st}}^*(M)$ изоморфна алгебре рациональных кохомологий одного из следующих однородных пространств S^3 , $S^2 \times S^1$, T^3 , $N_3(\mathbb{R})/N_3(\mathbb{Z})$ или же она бесконечномерна (в размерностях 1 и 2).

Полиномы Пуанкаре этих конечномерных алгебр имеют соответственно вид

$$1 + t^3, \quad (1+t)(1+t^2), \quad (1+t)^3, \quad (1+t)(1+t+t^2).$$

В [12]–[14] получены классификации с точностью до диффеоморфизма компактных однородных пространств размерностей 4, 5 и 6 соответственно (в двух последних случаях – только с точностью до конечнолистного накрытия). Эти результаты позволяют вычислить в явном виде стабильные кохомологии для всех компактных однородных пространств размерности 6, но мы здесь этим заниматься не будем.

6. Используем теперь один подход к изучению произвольных компактных однородных пространств M . Он основан на изучении топологического строения баз натуральных расслоений для таких M . В частности, для слабо разрешимых компактных однородных пространств вычисление стабильных кохомологий, как фактически

было показано в [9], позволяет практически полностью описать топологическое строение многообразий M (по модулю описания произвольных односвязных компактных однородных пространств, о которых в настоящее время известно достаточно много, хотя и далеко не все, см., например, [3]).

Рассмотрим вопрос о вычислении стабильных когомологий баз M_a компактных однородных пространств, которые имеют небольшую размерность (тогда как размерность соответствующего однородного пространства M может быть сколь угодно велика). Топологическое описание M_a для малых размерностей содержится в [13], [14] или может быть без труда выведено из результатов этих работ.

Пусть M_a – база некоторого компактного однородного пространства M . Если $\dim M_a = 1$, то $M_a = S^1$ – окружность. При $\dim M_a = 2$ многообразие M_a , рассматриваемое с точностью до конечнолистного накрытия, диффеоморфно тору T^2 или F_2 – ориентируемой поверхности рода 2 (или ориентируемой поверхности F_g произвольного рода $g \geq 2$, все такие поверхности конечнолистно покрывают F_2). При $\dim M_a = 3$ многообразие M_a с точностью до конечнолистного накрытия диффеоморфно некоторому компактному солвмногообразию (и потому одному из трех, указанных выше: T^3 , $N_3(\mathbb{R})/\Gamma$, T/D , где Γ, D – решетки, причем здесь все решетки в группе Ли $N_3(\mathbb{Z})$ между собой соизмеримы (как абстрактные группы) и можно брать любую из них, когда мы рассматриваем многообразия с точностью до конечнолистного накрытия), либо многообразию $F_2 \times S^1$ (стабильные когомологии которого бесконечномерны), либо многообразиям $SL(2, \mathbb{R})/\Pi$, $SU(2) \backslash SL(2, \mathbb{C})/\Delta$, где Π, Δ – решетки. Все решетки Π , как известно (см., например, [5]), между собой соизмеримы как абстрактные группы, поэтому при нашем рассмотрении многообразий с точностью до конечнолистного накрытия можно ограничиться рассмотрением лишь M_a , соответствующего какой-то одной из них. Что касается решеток Δ в $SL(2, \mathbb{C})$, то их даже с точностью до соизмеримости бесконечно много. Однако для любой такой решетки $H_{st}^1(\Delta, \mathbb{Z}) = \{0\}$ (см. выше), нулевыми тогда будут в силу двойственности Пуанкаре и двумерные стабильные когомологии. В результате мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть M – компактное однородное пространство, база M_a натурального расслоения которого трехмерна. Тогда алгебра стабильных когомологий $H_{st}^*(M_a, \mathbb{R})$ изоморфна алгебре вещественных когомологий одного из следующих однородных пространств S^3 , $S^2 \times S^1$, T^3 , $N_3(\mathbb{R})/N_3(\mathbb{Z})$ или же она бесконечномерна (в размерностях 1 и 2).

Для M_a размерностей 4, 5 тоже можно вычислить стабильные когомологии, используя результаты работ [12], [13] и стандартную когомологическую технику спектральных последовательностей, но этим мы здесь заниматься не будем.

7. Рассмотрим теперь применение понятия стабильных когомологий к изучению топологического строения компактных слабо разрешимых однородных пространств M . Для любого такого M в [9] доказано, что существует конечнолистно покрывающее его компактное однородное пространство специального вида, называемое элементарным слабо разрешимым однородным пространством. Элементарное многообразие M имеет вид $K \times R/H$, где K – некоторая связная компактная полупростая группа Ли, R – некоторая односвязная разрешимая группа Ли, а H – замкнутая подгруппа в $K \times R$ (подробно описанная в [9]), при этом натуральное расслоение для этого элементарного M имеет вид $K/L \rightarrow M \rightarrow R/\Gamma$, где L – замкнутая подгруппа в K , Γ – решетка в R . Структурная группа этого расслоения –

некоторый связный тор $T = T^n$, а потому при заданных слое и базе это расслоение однозначно с точностью до эквивалентности (а M с точностью до диффеоморфизма) определяется характеристическим классом $c \in H^1(R/\Gamma, T) \simeq H^2(R/\Gamma, \mathbb{Z}^n)$, где $n = \dim T$. Рассматривая однородные пространства с точностью до конечнолистного накрытия, мы можем и R/Γ рассматривать с точностью до конечнолистного накрытия, а потому характеристический класс c рассматривать как элемент пространства $H_{\text{st}}^2(R/\Gamma, \mathbb{Z}^n)$ стабильных двумерных кохомологий (фактически целочисленных). Поэтому приведенные выше результаты о стабильных кохомологиях компактных солвмногообразий малой размерности можно использовать для достаточно явного описания некоторых слабо разрешимых компактных однородных пространств. В результате подробного рассмотрения отдельных специальных случаев (выделенных выше) приходим к такому утверждению.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – некоторое компактное слабо разрешимое однородное пространство, размерность базы которого не более трех. Тогда с точностью до конечнолистного накрытия M диффеоморфно одному из следующих однородных пространств:

- 1) расслоения над тором T^k , $k = 0, 1, 2, 3$; при фиксированном слое вида K/L эти расслоения нумеруются элементами из группы $H^2(T^k, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}^l = \mathbb{Z}^{lk(k-1)/2}$, где l – ранг компактной группы Ли $N_K(L)/L$; элементы, которые лежат на одной орбите естественного действия группы $\text{SL}(k, \mathbb{Z})$, порождают диффеоморфные однородные пространства;
- 2) расслоения над многообразием Ивасава $N_3(\mathbb{R})/N_3(\mathbb{Z})$; эти расслоения при фиксированном слое нумеруются элементами группы $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^l = \mathbb{Z}^{2l}$; элементы, которые лежат на одной орбите естественного действия группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, порождают диффеоморфные однородные пространства;
- 3) расслоения над многообразиями вида T/Γ (описанными выше); эти расслоения при фиксированном слое и базе нумеруются элементами группы $\mathbb{Z}^l$ (свободной части соответствующих двумерных кохомологий).

Здесь K/L – произвольное односвязное однородное пространство компактной полупростой группы Ли K (L – связная замкнутая подгруппа в K), являющаяся фактически слоем натурального расслоения для M или некоторого M' , его конечнолистно накрывающего.

Автор благодарен рецензенту за ряд очень полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Горбацевич, “Об одном расслоении компактного однородного пространства”, *Тр. ММО*, **43** (1981), 116–141.
- [2] В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр.*, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240.
- [3] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Наука, М., 1995.
- [4] В. В. Горбацевич, “О псевдокомпактных однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **30:2** (1989), 61–72.
- [5] Л. Ауслендер, Л. Хан, Ф. Грин, *Потоки на однородных пространствах*, Мир, М., 1966.
- [6] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Строение групп и алгебр Ли”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр.*, **41**, ВИНТИ, М., 1990, 5–259.

- [7] М. Рагунатан, *Дискретные подгруппы групп Ли*, Мир, М., 1977.
- [8] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, О. В. Шварцман, “Дискретные подгруппы групп Ли”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр.*, **21**, ВИНИТИ, М., 1988, 5–120.
- [9] В. В. Горбацевич, “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. I”, *Геометрические методы в задачах анализа и алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 71–87; “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. II”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1982, 13–28; “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. III”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1985, 93–103; “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. IV”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1991, 88–98.
- [10] L. Auslander, “An exposition of the structure of solvmanifolds. I. Algebraic theory”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79**:2 (1973), 227–261; “An exposition of the structure of solvmanifolds. II. G -induced flows”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79**:2 (1973), 262–285.
- [11] В. В. Горбацевич, “О трехмерных однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **18**:2 (1977), 280–293.
- [12] В. В. Горбацевич, “О классификации четырехмерных компактных однородных пространств”, *УМН*, **32**:2 (1977), 207–208.
- [13] В. В. Горбацевич, “О компактных однородных пространствах размерности 5 и выше”, *УМН*, **33**:3 (1978), 161–162.
- [14] В. В. Горбацевич, “О компактных однородных многообразиях малой размерности”, *Геометрические методы в задачах алгебры и анализа*, ЯрГУ, Ярославль, 1980, 37–60.

В. В. Горбацевич

Московский авиационно-технологический институт
им. К. Э. Циолковского

Поступило

25.10.2002

Исправленный вариант

22.08.2007