Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Глазырин, О симплициальных разбиениях многогранников, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 840–848

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:12:44

О симплицальных разбиениях многогранников

А. А. Глазырин

В работе доказаны некоторые общие свойства призматиков, т.е. многогранников, все вершины которых лежат в двух параллельных гиперплоскостях. На основе этих свойств получена нетривиальная нижняя оценка для числа симплексов, осуществляющих триангуляцию n -мерного куба.

Библиография: 3 названия.

1. Введение

В этой работе пойдет речь о некоторых свойствах разбиений выпуклых многогранников на симплексы с вершинами в вершинах многогранника. Под *разбиением*¹ будем понимать представление многогранника в виде объединения неперекрывающихся, т.е. пересекающихся только по границе, многогранников. В случае дополнительного условия, когда пересечение любых двух симплексов осуществляется по целой общей грани, разбиение является *триангуляцией*. Очевидно, что в случае плоскости любое разбиение многоугольника есть триангуляция. Однако для больших размерностей это не так.

Важнейшей задачей, связанной с триангуляцией многогранников, является задача отыскания для данного многогранника минимальной триангуляции, т.е. триангуляции с минимальным числом симплексов. В случае многоугольника количество треугольников в триангуляции всегда равно $v - 2$, где v – число вершин многоугольника. Уже начиная с 3-мерного пространства ситуация меняется: 3-мерный куб, например, можно триангулировать как на 6, так и на 5 тетраэдров.

Также достаточно интересен вопрос, какие многогранники размерности n с v вершинами триангулируются на $v - n$ симплексов (нетрудно показать, что $v - n$ – минимальное число симплексов в триангуляции при фиксированных значениях v и n). Например, в случае $n = 2$ таковыми являются все многогранники – в данном случае многоугольники. В случае $n = 3$ этот вопрос достаточно подробно изучен в работе [1].

Отдельный интерес представляет вопрос о триангуляции и разбиении на симплексы кубов различных размерностей. Нетрудно показать, что в разбиении n -мерного куба участвует не более $n!$ симплексов. Вопрос о нижней границе числа симплексов

¹ В настоящей работе под словом “разбиение” *всегда* понимается разбиение на многогранники, все вершины которых – вершины данного многогранника (примечание редактора).

в триангуляции в общем виде до сих пор не решен, однако для небольших размерностей этот минимум найден и получены общие оценки для произвольных размерностей.

В этой работе мы докажем некоторые общие свойства разбиений на симплексы так называемых *призматиков*, т.е. многогранников, все вершины которых лежат в двух параллельных гиперплоскостях. Призматик – обобщение понятия призматика на многомерный случай. В частности, призматиками являются кубы, вообще призмы, а также выпуклые оболочки подмножеств вершин этих многогранников, например, все $(0, 1)$ -многогранники (т.е. многогранники, у которых все декартовы координаты всех вершин равны 0 или 1, см. [2]). Воспользовавшись полученными свойствами, мы покажем, как можно получить нетривиальную нижнюю оценку для числа симплексов, осуществляющих триангуляцию n -мерного куба.

2. Основная теорема

Пусть все вершины n -мерного многогранника $P \in \mathbb{R}^n$ лежат в двух параллельных гиперплоскостях, т.е. P является n -мерным призматиком. Для определенности будем считать, что эти гиперплоскости задаются уравнениями $x_1 = 0$ и $x_1 = s$. Будем считать $s = 1$, так как это никак не влияет на все дальнейшие рассуждения. Пусть у нас также есть разбиение Δ многогранника P на n -мерные симплексы. Напомним, что вершины симплексов разбиения являются вершинами многогранника.

Определим S_i как множество всех $(0, 1)$ -симплексов, у которых i вершин лежат на $x_1 = 0$, а $n + 1 - i$ – соответственно на $x_1 = 1$.

Обозначим

$$\Delta_i = \{T \in \Delta \mid \text{ровно } i \text{ вершин симплекса } T \text{ лежат в } x_1 = 0\}.$$

Таким образом, $\Delta_i = S_i \cap \Delta$. Обозначим через q_i количество симплексов, лежащих в Δ_i , через T_i^j – j -й симплекс множества Δ_i , а через $V(T_i^j)$ – его n -мерный объем.

Пусть для данного призматика и его разбиения Δ на симплексы $V(i)$ обозначает суммарный объем симплексов из Δ_i , т.е.

$$V(i) = \sum_{j=1}^{q_i} V(T_i^j).$$

ТЕОРЕМА 1. *Объем $V(i)$ – функция, не зависящая от разбиения Δ , $1 \leq i \leq n$.*

Рассмотрим T_i^j и его пересечение M_i с гиперплоскостью $x_1 = t$, где $t \in [0, 1]$. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. *$(n - 1)$ -Мерный объем*

$$S(M_t) = c_i^j (1 - t)^{i-1} t^{n-i},$$

где c_i^j – некоторая константа, не зависящая от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – это выпуклая оболочка i вершин симплекса T_i^j , лежащих на плоскости $x_1 = 0$, а B – выпуклая оболочка $n + 1 - i$ вершин симплекса T_i^j , лежащих на плоскости $x_1 = 1$. Тогда покажем, что

$$M_t = \{(1 - t)A + tB\}$$

(имеется в виду сумма этих множеств по Минковскому). Действительно, заметим, что любая точка Z искомого пересечения делит некоторый отрезок XY в отношении $t : (1 - t)$, где $X \in A$, а $Y \in B$. Значит, $Z = (1 - t)X + tY$ и все точки M получаются таким образом, кроме того, очевидно, что все точки Z , удовлетворяющие данному условию, лежат в пересечении M_t . Пусть теперь A_j , $1 \leq j \leq i$, — j -я вершина симплекса A , а B_k , $1 \leq k \leq n + 1 - i$, — k -я вершина симплекса B . Заметим, что все векторы вида

$$\overrightarrow{A_1 A_j}, \quad 1 < j \leq i, \quad \text{и} \quad \overrightarrow{B_1 B_k}, \quad 1 < k \leq k \leq n + 1 - i,$$

линейно независимы в совокупности (поскольку иначе были бы зависимы векторы $\overrightarrow{A_1 A_j}$, $\overrightarrow{A_1 B_1}$, $\overrightarrow{B_1 B_k}$, а следовательно, и все векторы $\overrightarrow{A_1 A_j}$, $\overrightarrow{A_1 B_k}$, что противоречит тому, что точки A_j , B_k являются вершинами n -мерного симплекса). Пусть O — точка пересечения $A_1 B_1$ с гиперплоскостью $x_1 = t$. Теперь растянем M_t относительно O с коэффициентом $1/(1 - t)$ вдоль лучей, сонаправленных векторам $\overrightarrow{A_1 A_j}$, и с коэффициентом $1/t$ вдоль лучей, сонаправленных векторам $\overrightarrow{B_1 B_k}$. При таком преобразовании M_t перейдет в фигуру, равную $\{A + B\}$. Тогда вследствие линейной независимости векторов $\overrightarrow{A_1 A_j}$, $\overrightarrow{B_1 B_k}$ получаем, что

$$S(M_t) = t^{n-i}(1 - t)^{i-1}S(A + B),$$

где под S понимается $(n - 1)$ -мерный объем. Осталось в качестве c_i^j принять $S(A + B)$, и доказательство леммы завершено.

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Для любого $m \in \mathbb{N}$ многочлены

$$P_i = t^i(1 - t)^{m-i}, \quad 0 \leq i \leq m$$

(базисные многочлены Бернштейна [3; с. 105–106]), линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку многочленов ровно $m + 1$, для их линейной независимости достаточно доказать, что их линейными комбинациями являются все многочлены степени не выше m . Для этого покажем, что их линейными комбинациями являются образующие базис многочлены $1, t, t^2, \dots, t^m$. Используя тождество $(1 - t) + t \equiv 1$, получаем

$$\begin{aligned} \binom{m}{0}P_0 + \binom{m}{1}P_1 + \dots + \binom{m}{m}P_m &\equiv 1, \\ \binom{m-1}{0}P_1 + \binom{m-1}{1}P_2 + \dots + \binom{m-1}{m-1}P_m &\equiv t, \\ &\dots\dots\dots \\ \binom{1}{0}P_{m-1} + \binom{1}{1}P_m &\equiv t^{m-1}, \\ P_m &\equiv t^m. \end{aligned}$$

Тем самым, лемма 2 доказана.

Теперь рассмотрим какое-то разбиение Δ многогранника P на симплексы. Определим для него $c_i(\Delta) = \sum c_i^j(\Delta)$.

ЛЕММА 3. Числа c_i не зависят от разбиения Δ и определяются только самим многогранником P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть есть два разбиения Δ_1 и Δ_2 . Покажем, что $c_i(\Delta_1) = c_i(\Delta_2)$ для всех $0 \leq i \leq n$. Определим $S(t)$ – $(n-1)$ -мерный объем пересечения плоскости $x_1 = t$ с P . Тогда получаем, что

$$c_1(\Delta_1)P_{n-1} + \dots + c_n(\Delta_1)P_0 \equiv S(t)$$

(здесь P_i – многочлены, соответствующие $m = n-1$). Аналогично

$$c_1(\Delta_2)P_{n-1} + \dots + c_n(\Delta_2)P_0 \equiv S(t).$$

Тогда

$$(c_1(\Delta_1) - c_1(\Delta_2))P_{n-1} + \dots + (c_n(\Delta_1) - c_n(\Delta_2))P_0 \equiv 0.$$

По лемме 2 многочлены $P_0, \dots, P_{n-1}$ линейно независимы. Таким образом, $c_i(\Delta_1) = c_i(\Delta_2)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Выразим $V(T_i^j)$ через c_i^j . Используя объем $(n-1)$ -мерного сечения симплекса гиперплоскостью $x_1 = t$, получаем²

$$\begin{aligned} V(T_i^j) &= \int_0^1 c_i^j t^{n-i}(1-t)^{i-1} dt = c_i^j B(n-i+1, i) \\ &= c_i^j \frac{\Gamma(n-i+1)\Gamma(i)}{\Gamma(n+1)} = c_i^j \frac{(n-i)!(i-1)!}{n!} = c_i^j / n \binom{n-1}{i-1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{j=1}^{q_i} V(T_i^j) = \sum_{j=1}^{q_i} c_i^j / n \binom{n-1}{i-1} = c_i / n \binom{n-1}{i-1}.$$

Обозначив правую часть $V(i)$, получим утверждение теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняются условия теоремы 1 и $S(t) \equiv \text{const}$, то

$$V(i) = \frac{1}{n} V(P).$$

Здесь $S(t)$ – $(n-1)$ -мерный объем сечения P гиперплоскостью $x_1 = t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять считаем $s = 1$. Пусть $S(t) \equiv S_0$. Тогда $c_1 P_{n-1} + \dots + c_n P_0 \equiv S_0$. Заметим теперь, что если $\beta_i = S_0 \binom{n-1}{i-1}$, то

$$\beta_1 P_{n-1} + \dots + \beta_n P_0 = S_0 \binom{n-1}{0} t^0 (1-t)^{n-1} + \dots + S_0 \binom{n-1}{n-1} t^{n-1} (1-t)^0 \equiv S_0.$$

Тогда аналогично доказательству теоремы 1 по соображениям линейной независимости многочленов P_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, получаем, что $c_i = \beta_i$.

$$V(i) = c_i / n \binom{n-1}{i-1} = \beta_i / n \binom{n-1}{i-1} = \frac{S_0}{n}.$$

Так как $V(P) = \int_0^1 S(t) dt = S_0$, то следствие доказано.

Заметим, что следствие выполняется для всех призм и, в частности, для кубов. Это нам понадобится в дальнейшем.

²Здесь B и Γ – стандартные функции Эйлера.

3. Оценки для числа симплексов в разбиениях многогранников

В этом разделе доказанная нами теорема 1 применяется для нахождения числа симплексов в разбиениях некоторых многогранников.

3.1. Разбиение симплициальной призмы. *Симплициальная призма* – это призма, основание которой является симплексом.

ТЕОРЕМА 2. *Любое разбиение на симплексы симплициальной призмы размерности d содержит ровно d симплексов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что вместо данного нам многогранника мы можем рассматривать произвольный аффинно-эквивалентный ему, поскольку при аффинном преобразовании симплексы переходят в симплексы и разбиение остается разбиением. Любые две d -мерные симплициальные призмы аффинно эквивалентны друг другу, поэтому достаточно доказать утверждение задачи для какой-то d -мерной симплициальной призмы. Рассмотрим следующую призму P^d : все ее вершины являются вершинами $(0, 1)$ -куба, при этом вершинами ее основания, лежащего в плоскости $x_1 = 0$ являются точки, среди координат которых не более одной 1, а вершинами основания, лежащего в $x_1 = 1$, – не более двух 1 соответственно. Объем этой призмы равен $(d - 1)$ -мерному объему основания, т.е. $1/(d - 1)!$. Воспользовавшись следствием из теоремы 1, получаем, что суммарный объем симплексов разбиения, лежащих в каждом из S_i равен $1/d!$. Кроме того, мы знаем, что объем каждого $(0, 1)$ -симплекса составляет по крайней мере $1/d!$. Следовательно, в каждом из S_i лежит ровно один симплекс разбиения, и теорема 2 доказана.

3.2. Нижняя оценка числа симплексов в разбиениях куба. В этой части работы будет рассказано об оценках для числа симплексов в разбиениях куба. В частности, при помощи теоремы 1, доказанной в разделе 2, будет получена нетривиальная нижняя оценка для триангуляции куба.

Сейчас вслед за [2] введем следующие обозначения: $\text{triang}(n)$ – минимальное число симплексов, осуществляющих разбиение n -мерного куба, $\rho(n)$ – максимум детерминанта $(0, 1)$ -матрицы. Тогда очевидна следующая нижняя оценка на $\text{triang}(n)$:

$$\text{triang}(n) \geq \frac{n!}{\rho(n)}.$$

Действительно, максимальный объем симплекса с вершинами в вершинах $(0, 1)$ -куба не превосходит $\rho(n)/n!$, отсюда сразу получаем нижнюю границу. Верхнюю границу для $\rho(n)$ нетрудно получить с помощью некоторых матричных преобразований и неравенства Адамара (более подробно на эту тему можно прочесть, например, [2]). Эта оценка дается следующей леммой.

ЛЕММА 4. *Имеет место оценка*

$$\rho(n) \leq 2 \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2} \right)^{n+1}.$$

Поэтому верна

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место оценка*

$$\text{triang}(n) \geq \frac{n!}{2(\sqrt{n+1}/2)^{n+1}}.$$

Покажем теперь, как используя теорему 1, мы сможем улучшить тривиальную оценку. Рассмотрим набор действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такой, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Теперь определим для каждого симплекса T его взвешенный объем $V_\alpha(T)$ следующим образом:

$$V_\alpha(T) = V(T)(\sigma_1(T) + \sigma_2(T) + \dots + \sigma_n(T))$$

(здесь под $V(T)$ понимаем n -мерный объем симплекса T). Определим теперь $\sigma_j(T)$. Рассмотрим x_j^0 — j -ю координату центра масс симплекса T . Если $x_j^0 = k/(n+1)$, то положим $\sigma_j(T) = \alpha_{n+1-k}$. Заметим, что поскольку все координаты центра масс — рациональные числа со знаменателем $n+1$ и с числителем от 1 до n , мы тем самым определили все σ_j , а значит, и взвешенный объем для каждого симплекса.

Введем следующее обозначение: $W_\alpha(n) = \max V_\alpha(T)$. Пусть у нас есть триангуляция Δ n -мерного куба на симплексы. Аналогично тому, как мы в разделе 2 определяли Δ_i по первой координате, определим множества Δ_i^j по j -й координате. Тогда очевидно, что условие $x_j^0(T) = k/(n+1)$ эквивалентно условию $T \in \Delta_{n+1-k}^j$, т.е. из $T \in \Delta_k^j$ следует, что $\sigma_j(T) = \alpha_k$. Теперь рассмотрим сумму взвешенных объемов симплексов в триангуляции:

$$\sum_{T \in \Delta} V_\alpha(T) = \sum_{j=1}^n \sum_{T \in \Delta} \sigma_j(T) V(T) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{T \in \Delta_i^j} \alpha_i V(T).$$

Воспользуемся следствием из теоремы 1. Мы знаем, что

$$\sum_{T \in \Delta_i^j} V(T) = V(i) = \frac{V(P)}{n} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{T \in \Delta} V_\alpha(T) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Аналогично доказательству тривиальной оценки заметим теперь, что $\text{triang}(n) \geq 1/W_\alpha(n)$. Подбирая различные наборы α_i и находя для них $W_\alpha(n)$, мы можем получить различные оценки на $\text{triang}(n)$. Заметим, что тривиальная оценка получалась для набора α , в котором при всех i $\alpha_i = 1/n$. Рассмотрим такой набор α :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}, \quad \alpha_i = 0, \quad 1 < i < n.$$

Найдем для него $W_\alpha(n)$. Пусть M_k^n — множество всех симплексов размерности n с вершинами в вершинах $(0, 1)$ -куба, у центра масс которых ровно k координат равны $1/(n+1)$ или $n/(n+1)$. Пусть также

$$G_k^n = \max_{T \in M_k^n} V(T).$$

Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Имеет место соотношение $G_k^n = (1/n)G_{k-1}^{n-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i -я координата центра масс симплекса T равна $n/(n+1)$ (случай, когда i -я координата равна $1/(n+1)$, аналогичен). Это значит, что n вершин симплекса T лежат на плоскости $x_i = 1$. Пусть они образуют $(n-1)$ -мерный симплекс T' . Заметим, что $V(T) = (1/n)S(T')$, где $S(T')$ – объем размерности $n-1$ симплекса T' . Так как координаты вершины T , не лежащей в T' , только 0 и 1, то если j -я координата центра масс T была равна $n/(n+1)$, то j -я координата центра масс T' равна $(n-1)/n$ или $n/n = 1$, но последний вариант исключен. Аналогично, если j -я координата центра масс T была равна $1/(n+1)$, то j -я координата центра масс T' может быть равна $1/n$ или $0/n$, но последний вариант невозможен. Следовательно, у симплекса T' центр масс имеет ровно $k-1$ координату, равную $1/n$ или $(n-1)/n$. Отсюда автоматически следует утверждение леммы.

Используя лемму 5, получаем

$$G_k^n = \frac{1}{n} G_{k-1}^{n-1} = \dots = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-k+1} G_0^{n-k}.$$

Далее используем то, что $G_0^{n-k} \leq \rho(n-k)/(n-k)!$. Имеем

$$G_k^n \leq \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-k+1} \frac{\rho(n-k)}{(n-k)!} = \frac{\rho(n-k)}{n!}.$$

Заметим теперь, что $W_\alpha(n) = \max_{1 \leq k \leq n} ((k/2)G_k^n)$. Таким образом,

$$W_\alpha(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{k\rho(n-k)}{2n!} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{k(\sqrt{n+1-k}/2)^{n+1-k}}{n!}.$$

Максимум правой части для $n > 10$ достигается при $k = 1$. Отсюда сразу получаем, что

$$W_\alpha(n) \leq \frac{(\sqrt{n}/2)^n}{n!}.$$

Значит, верна следующая

ТЕОРЕМА 4. Для $n > 10$

$$\text{triang}(n) \geq \frac{n!}{(\sqrt{n}/2)^n}.$$

4. Построение нерасширяемых множеств

Полученные нами соотношения на объемы симплексов разбиения могут быть использованы для построения нерасширяемых множеств симплексов. В дальнейшем *нерасширяемым множеством* симплексов будем называть такое не являющееся разбиением множество неперекрывающихся симплексов с вершинами в вершинах данного многогранника, что к нему нельзя добавить симплекс с вершинами в вершинах данного многогранника, не перекрывающийся с остальными. Наиболее интересен вопрос, существует ли для данного многогранника нерасширяемое множество. Доказанная нами теорема 1 позволяет указать метод построения нерасширяемых множеств для призматиков. Опишем подробнее, как можно получить подобные множества.

Определим аналогично основной теореме 1 множества S_i как множества таких симплексов с вершинами в вершинах данного призмоида, что i из этих вершин лежат в нижней грани многогранника, а соответственно $n + 1 - i$ – в верхней. Определим также $V(i)$ как суммарный объем симплексов какого-либо разбиения, лежащих в S_i . Благодаря теореме 1 мы знаем, что определение корректно, так как для каждого разбиения значение $V(i)$ одно и то же. Предположим теперь, что нам удастся найти такое множество F неперекрывающихся симплексов с вершинами в вершинах призмоида, что они все будут лежать в одном и том же S_i и при этом их суммарный объем будет больше, чем определенное нами $V(i)$. Покажем, как из этого множества можно получить нерасширяемое множество. На каждом шаге будем добавлять к множеству любой симплекс с вершинами в вершинах многогранника, не перекрывающийся с уже взятыми. Этот процесс обязан закончиться нерасширяемым множеством или разбиением. Предположим, что мы получили разбиение. Тогда рассмотрим симплексы этого разбиения, лежащие в S_i . Их суммарный объем по теореме должен равняться $V(i)$. Однако их подмножеством является множество F , суммарный объем которого уже больше $V(i)$. Противоречие. Таким образом, построенное нами множество не будет разбиением.

Остается вопрос – как находить множество F ? В некоторых случаях это довольно просто. Например, для трехмерного куба.

Пусть у нас есть трехмерный $(0, 1)$ -куб. Выпишем координаты вершин четырех симплексов, которые образуют удовлетворяющее нашим условиям множество F .

Симплекс 1 :	$(0, 0, 0),$	$(0, 0, 1),$	$(1, 0, 1),$	$(1, 1, 1),$
Симплекс 2 :	$(0, 0, 1),$	$(0, 1, 1),$	$(1, 1, 1),$	$(1, 1, 0),$
Симплекс 3 :	$(0, 1, 1),$	$(0, 1, 0),$	$(1, 1, 0),$	$(1, 0, 0),$
Симплекс 4 :	$(0, 1, 0),$	$(0, 0, 0),$	$(1, 0, 0),$	$(1, 0, 1).$

Нетрудно убедиться, что любые два из приведенных симплексов не пересекаются. Осталось заметить, что объем каждого из них равен $1/6$ и все они лежат в множестве S_2 , соответствующем первой координате. Поскольку их суммарный объем $2/3$ превосходит $V(2) = 1/3$, они удовлетворяют всем условиям множества F .

Докажем теперь, что если для куба размерности $d - 1$ есть нерасширяемое множество, то нерасширяемое множество есть и для куба размерности d . Действительно, рассмотрим d -мерный куб и его произвольную $(d - 1)$ -мерную грань Q . Построим в этой грани нерасширяемое множество. К каждому из симплексов этого множества добавим одну и ту же вершину противоположной грани куба. Таким образом, мы получили множество d -мерных неперекрывающихся симплексов. Осуществим уже описанный нами ранее процесс, а именно: на каждом шаге будем добавлять к множеству любой симплекс с вершинами в вершинах многогранника, не перекрывающийся с уже имеющимися. Предположим, что полученное нами в конце процесса множество является разбиением. Тогда оно порождает соответствующие разбиения на каждой из своих $(d - 1)$ -мерных граней, в том числе и в грани Q . Однако в этом случае разбиение грани Q содержит в качестве несобственного подмножества нерасширяемое множество. Мы пришли к противоречию и, следовательно, построенное нами множество не является разбиением и, тем самым, доказана следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для куба любой размерности $d > 2$ существует, нерасширяемое множество симплексов.*

Отметим также, что в случае $d = 2$ для любого многоугольника нерасширяемых множеств не существует.

Автор благодарит Н. П. Долбилина за полезные замечания и всестороннее обсуждение данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. A. De Loera, *Computing minimal and maximal triangulations of convex polytopes*, Manuscript, Institut für Theoretische Informatik, Zürich, 1999.
- [2] G. M. Ziegler, “Lectures on 0/1-polytopes”, *Polytopes – Combinatorics and Computation* (Oberwolfach, 1997), DMV Sem., **29**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2000, 1–41.
- [3] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*. Т. 1. *Конструктивная теория функций*, Изд-во АН СССР, М., 1952.

А. А. Глазырин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

15.06.2008

Исправленный вариант

23.10.2008