Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Л. Кудрявцев, Дробные разности и пространства
Лизоркина–Трибея, *Матем. заметки*, 2002, том 71, вы-
пуск 6, 845–854

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:36:13

УДК 517.982

ДРОБНЫЕ РАЗНОСТИ И ПРОСТРАНСТВА ЛИЗОРКИНА–ТРИБЕЛЯ

Н. Л. Кудрявцев

В статье получены неравенства для максимальных функций от дробных разностей и дробных производных, с помощью которых доказывается, что в пространствах Лизоркина–Трибеля $F_{pq}^s = F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, в случае определенного запаса гладкости $s > 0$ можно ввести эквивалентные квазинормы, выражающиеся через дробные разности порядка $\alpha > s$.

Библиография: 12 названий.

Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$ – лебегово пространство комплекснозначных измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f с конечной квазинормой

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \quad \int = \int_{\mathbb{R}^n},$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} |f(x)|,$$

$S = S(\mathbb{R}^n)$ – пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, S' – пространство обобщенных функций над S , F и F^{-1} – прямое и обратное преобразование Фурье в S' .

Для последовательности комплекснозначных измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций $(f_j(x))_{j=0}^{+\infty}$ обозначим

$$\|f_j\|_{L_p(l_q)} = \left\| \left(\sum_0^\infty |f_j(x)|^q \right)^{1/q} \right\|_p.$$

Напомним определение пространства F_{pq}^s [1]. Пусть система функций $\varphi = (\varphi_j(x))_{j=0}^\infty$ из S такова, что

$$\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \{x : |x| < 2\}, \quad \operatorname{supp} \varphi_j \subset \{x : 2^{j-1} < |x| < 2^{j+1}\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

для каждого $\mu \in \mathbb{Z}_+^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ существует $c_\mu > 0$ такая, что $2^{j|\mu|} |D^\mu \varphi_j(x)| \leq c_\mu$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$ и $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $s > 0$

$$F_{pq}^s = F_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in S', \|f\|^\varphi = \|2^{sj} F^{-1} \varphi_j F f\|_{L_p(l_q)} < +\infty\}.$$

Выражения $\|f\|^\varphi$ для различных систем функций φ указанного вида являются эквивалентными квазинормами в F_{pq}^s [1, с. 58]. Поэтому далее мы будем опускать значок φ при использовании таких квазинорм.

Дробной разностью порядка $\alpha > 0$ с шагом $h \in \mathbb{R}^n$ функции f называется

$$(\Delta_h^\alpha f)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_\alpha^k f(\cdot + kh),$$

где $C_\alpha^k = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$ – биномиальные коэффициенты.

Далее будут использоваться следующие обозначения:

- $e_j, 1 \leq j \leq n$, – орт стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$;
- D_j^r – оператор взятия производной порядка $r > 0$ по j -й переменной, $1 \leq j \leq n$;
- D_e^r – оператор взятия производной порядка $r > 0$ по направлению единичного вектора $e \in \mathbb{R}^n$ [2];
- если $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то $f_A(\cdot) = f \circ A(\cdot)$;
- $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, x \in \mathbb{R}^n$;
- $L_p^r = L_p^r(\mathbb{R}^n), r > 0, 1 < p < \infty$, – пространство Лиувилля–Соболева [3];
- $L_p^\Omega = \{f \in L_p : \text{supp } Ff \subset \Omega\}, 0 < p < \infty, \Omega$ – компакт в $\mathbb{R}^n$.

Здесь одной и той же буквой s с индексами и без обозначаются различные постоянные, зависящие от несущественных параметров, которые иногда указываются.

ТЕОРЕМА. Пусть $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, s > n/\min(p, q)$, нецелое $\alpha > s$. Тогда

$$\|f\|' = \|f\|_p + \left\| \left(\int_0^{+\infty} t^{-sq} \sup_{|h| \leq t} |(\Delta_h^\alpha f)(\cdot)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p \quad (1)$$

и

$$\|f\|'' = \|f\|_p + \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} |(\Delta_h^\alpha f)(\cdot)|^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q} \right\|_p \quad (2)$$

являются квазинормами в F_{pq}^s , эквивалентными квазинормам $\|f\|$.

Напомним, что условие $s > n/\min(p, q)$ влечет вложение пространств $F_{p,q}^s$ в пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Норма вида (2) с разностями целого порядка для пространств F_{p2}^s ($s > n/2, 1 < p < \infty$) была получена Лизоркиным [4]. Покоординатная характеристика пространств Лизоркина–Трибеля с помощью разностей целого порядка и через обобщенные разности, включающие в себя дробные разности, при $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ была дана Калябиным [5], [6]. Трибель [1] получил также описание и через разности целого порядка с векторным шагом, распространив результаты на значения $0 < p, q \leq 1$. Таким образом, приведенная теорема дополняет исследования работы [6] при $p > 1$ и обобщает на дробные показатели результаты [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Дробные разности порядка $\alpha > 0$ функций из F_{p2}^s при $1 < p < \infty, s > n/p, \alpha > s$, рассматривались Нойгебауэром [7]. Им получена оценка

$$\left\| \sup_{h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-s} |(\Delta_h^k f)(\cdot)| \right\|_p \leq c \|f\|,$$

($\|f\|$ – норма в пространстве F_{p2}^s), которая может быть получена из (2) и вложения F_{p2}^s в $F_{p\infty}^s$.

Доказательство теоремы опирается на следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $0 \leq \beta < \alpha$, $0 < a < \alpha - \beta$, $b > 0$. Тогда существует постоянная $c_1 = c_1(\alpha, \beta, a)$ такая, что

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Delta_h^\alpha f)(x+y)|}{1+|by|^a} \leq c_1 \max(1, |bh|^a) \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Delta_h^\beta f)(x+y)|}{1+|by|^a}, \quad (3)$$

$\Delta_h^0 f = f$.

Если $f \in L_p^\Omega$, то существует постоянная $c_2 = c_2(\alpha, a, \Omega)$ такая, что выполняется неравенство

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Delta_h^\alpha f)(x-z)|}{1+|bz|^a} \leq c_2 |h|^\alpha \max(1, |bh|^a) \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|(D_e^\alpha f)(x-z)|}{1+|bz|^a}, \quad (4)$$

где $e = h/|h|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(\Delta_h^\alpha f)(x) = (\Delta_h^{\alpha-\beta}(\Delta_h^\beta f))(x)$ [8], то

$$\begin{aligned} |(\Delta_h^\alpha f)(x)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |C_{\alpha-\beta}^j| (1+|bjh|^a) \frac{|(\Delta_h^\beta f)(x+jh)|}{1+|bjh|^a} \\ &\leq c \max(1, |bh|^a) \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\Delta_h^\beta f)(x+y)|}{1+|by|^a}. \end{aligned}$$

Заменим в этом неравенстве x на $x+z$ и поделим обе части на $1+|bz|^a$. Так как для произвольных $u, v \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$\frac{1}{(1+|u|^a)(1+|v|^a)} \leq c \frac{1}{1+|u+v|^a}, \quad (5)$$

то, переходя к верхней грани по z в обеих частях получившегося неравенства, приходим к (3).

Докажем теперь (4). Всякая функция $f \in L_q^r$, $1 < q < \infty$, $r > 0$, имеет (дробную) производную $D_e^r f \in L_q$ по любому направлению $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| = 1$, где $(D_e^r f)(\cdot) = (D_1^r f_A)(A^{-1} \cdot)$, A – вращение такое, что $Ae = e_1$ [2]. Если $f \in L_p^\Omega$, то в силу неравенства Никольского [9, с. 44] $f \in L_q^m$ для любых $m \in \mathbb{N}$ и $q \in (\max(p, 1), \infty)$. Поэтому в силу свойств пространств L_q^m [3] для любых $e \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha > 0$ у $f \in L_p^\Omega$ существует дробная производная $D_e^\alpha f \in L_q$.

Далее воспользуемся тем, что если $f \in L_q^\alpha$, нецелое $\alpha > 0$, $1 < q < \infty$, $h \neq 0$, $e = h/|h|$, A – вращение такое, что $Ae = e_1$, то

$$(\Delta_h^\alpha f)(Ax) = |h|^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^1} K_\alpha \left(\frac{x_1 - t_1}{|h|} \right) (D_1^\alpha f_A)(t_1, x_2, \dots, x_n) dt_1,$$

где функция $K_\alpha \in L_1(\mathbb{R}^1)$ [2].

Более того,

$$\int_{\mathbb{R}^1} |K_\alpha(t_1)| (1+|t_1|^a) dt_1 < \infty, \quad 0 < a < \alpha.$$

Это доказано в [10, лемма 20.1].

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^1} \left| K_\alpha \left(\frac{t_1}{|h|} \right) \right| (1 + |bt_1|^a) dt_1 \leq c|h| \max(1, |bh|^a).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |(\Delta_h^\alpha f)(Ax)| &\leq c|h|^\alpha \max(1, |bh|^a) \sup_{t_1 \in \mathbb{R}^1} \frac{|(D_1^\alpha f_A)(t_1, \bar{x})|}{1 + |b(x_1 - t_1)|^a} \\ &\leq c|h|^\alpha \max(1, |bh|^a) \sup_{t_1 \in \mathbb{R}^1} \sup_{\bar{t} \in \mathbb{R}^{n-1}} \frac{|(D_1^\alpha f_A)(t_1, \bar{t})|}{(1 + |b(x_1 - t_1)|^a)(1 + |b(\bar{x} - \bar{t})|^a)}, \end{aligned}$$

где $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$, $\bar{t} = (t_2, \dots, t_n)$.

Применяя неравенство (5), получаем, что

$$|(\Delta_h^\alpha f)(Ax)| \leq c|h|^\alpha \max(1, |bh|^a) \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{|(D_1^\alpha f_A)(t)|}{1 + |b(x - t)|^a}.$$

Пусть $Ax = y$, $At = u$. Тогда

$$\frac{|(D_1^\alpha f_A)(t)|}{1 + |b(x - t)|^a} = \frac{|(D_1^\alpha f_A)(A^{-1}u)|}{1 + |bA^{-1}(y - u)|^a} = \frac{|(D_e^\alpha f)(u)|}{1 + |b(y - u)|^a}.$$

Следовательно,

$$|(\Delta_h^\alpha f)(y)| \leq c|h|^\alpha \max(1, |bh|^a) \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \frac{|(D_e^\alpha f)(u)|}{1 + |b(y - u)|^a}. \quad (6)$$

Рассуждая как и при доказательстве (3), из неравенства (6) выводим (4). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценка (3) для $\beta = 0$ приводится в [6]. Оценки вида (4) для разностей целого порядка, в том числе смешанных, использовались в [1], [9].

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L_p^\Omega$, $0 < p < \infty$, нецелое $\alpha > 0$. Тогда для любого a , $0 < a < \alpha$, существует постоянная c , не зависящая от f и x , такая, что для любого $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| = 1$,

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|(D_e^\alpha f)(x - z)|}{1 + |z|^a} \leq cf^*(x), \quad (7)$$

где

$$f^*(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x - z)|}{1 + |z|^a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу, выражающую дробную производную через сингулярный интеграл [4], [2], можно написать, что

$$(D_e^\alpha f)(x) = A(\alpha, l) \int_0^\infty \frac{(\Delta_{te}^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt = A(\alpha, l) \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) = I_1(x) + I_2(x), \quad (8)$$

где l – произвольное целое число такое, что $l > \alpha$. В первом интеграле применим теорему о среднем

$$(\Delta_{te}^l f)(x) = (D_e^l f)(x + \theta te)t^l, \quad 0 < \theta < 1.$$

Далее заменим x на $x - z$ в (8) и поделим обе части получившегося равенства на $1 + |z|^a$. Учитывая, что

$$\frac{1 + |z - t\theta e|^a}{1 + |z|^a} \leq c(1 + t^a), \quad (9)$$

получаем оценку [9, неравенство (1), с. 48]

$$\frac{|I_1(x - z)|}{1 + |z|^a} \leq c(D_e^l f)^*(x) \leq cf^*(x).$$

Так как

$$(\Delta_{te}^l f)(x) = \sum_{j=0}^l (-1)^{j+l} C_l^j f(x + jte),$$

то после замены x на $x - z$ и деления на $1 + |z|^a$ и в силу неравенства $a < \alpha$ получаем оценку

$$\frac{|I_2(x - z)|}{1 + |z|^a} \leq cf^*(x).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $f \in L_p^\Omega$, $0 < p < \infty$, где $\Omega \subset \{y : |y| \leq b\}$, $0 < a < \alpha$, то существует постоянная c , не зависящая от f , b , e и x , такая, что

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|(D_e^\alpha f)(x - z)|}{1 + |bz|^a} \leq cb^\alpha f_b^*(x), \quad (10)$$

где

$$f_b^*(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x - z)|}{1 + |bz|^a}.$$

Неравенство (10) сразу же следует из (7) в силу того, что $D^\alpha(f(px)) = p^\alpha(D^\alpha f)(px)$, $p \in \mathbb{R}^1$, $p \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Неравенство (7) обобщает на случай дробных производных известное максимальное неравенство Трибеля [1, с. 19, 134].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Доказанные леммы позволяют воспользоваться стандартным путем рассуждений [1]. Сначала покажем, что существует постоянная c , не зависящая от f , такая, что для любой $f \in F_{pq}^s$ выполняется неравенство

$$\|f\|' \leq c\|f\|. \quad (11)$$

Квазинорма $\|f\|_p \leq c\|f\|$ [1, с. 106, 110]. Поскольку $s > n/\min(p, q)$, то f – регулярное распределение, а именно, $f \in L_1$ при $0 < p \leq 1$ и $f \in L_p$ для $1 < p < \infty$. При этом

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} F^{-1} \varphi_j F f \quad (12)$$

(сходимость в L_1 , если $0 < p \leq 1$, и в L_p для $1 < p < \infty$ [1, с. 110]).

Обозначая через I интеграл в (1) и представляя его в виде суммы

$$I = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{B_k}, \quad B_k = \{t : 2^{k-1} \leq t < 2^k\},$$

приходим к неравенству

$$I \leq c \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{ksq} \omega_{\alpha}^q(f, 2^{-k}) \right)^{1/q},$$

где $\omega_{\alpha}(f, 2^{-k}) = \sup_{|h| \leq 2^{-k}} |(\Delta_h^{\alpha} f)(x)|$. Из (12) следует, что

$$I \leq c \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{ksq} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\alpha}(F^{-1} \varphi_j F f, 2^{-k}) \right)^q \right)^{1/q}. \quad (13)$$

Правая часть (13) оценивается величиной

$$\begin{aligned} & c \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{ksq} \left(\sum_{j=0}^{-k} + \sum_{j=-k-1}^{\infty} \right)^q + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \left(\sum_{j=0}^k + \sum_{j=k+1}^{\infty} \right)^q \right\}^{1/q} \\ & = c(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^{1/q}. \end{aligned}$$

В силу (4), (10) при $0 \leq j \leq k$ выполнена оценка

$$|(\Delta_{2^{-k}}^{\alpha} F^{-1} \varphi_j F f)(x)| \leq c 2^{-k\alpha} 2^{j\alpha} (\varphi_j^* f)(x),$$

где

$$(\varphi_j^* f)(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{|(F^{-1} \varphi_j F f)(x - z)|}{1 + |2^j z|^a},$$

а число $a > 0$ будет выбрано ниже. Поэтому

$$S_3 \leq c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(s-\alpha)q} \sum_{j=0}^k 2^{j\alpha q} (\varphi_j^* f)^q(x).$$

В дальнейших оценках будут использоваться дискретные неравенства Харди:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\delta q} \left(\sum_{l=k}^{\infty} |d_l| \right)^q \right)^{1/q} \leq c \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l\delta q} |d_l|^q \right)^{1/q}, \quad (14)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta q} \left(\sum_{l=0}^k |d_l| \right)^q \right)^{1/q} \leq c \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\delta q} |d_l|^q \right)^{1/q}, \quad (15)$$

справедливые при $\delta > 0$, $0 < q \leq \infty$ (с обычной модификацией при $q = \infty$) [11, с. 216].

В силу неравенства $\alpha > s$ из (15) получаем, что

$$S_3 \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} (\varphi_j^* f)^q(x).$$

Для оценки S_4 воспользуемся неравенством (5) с $\beta = 0$, $b = 2^j$. Имеем

$$|(\Delta_{2^{-k}}^{\alpha} F^{-1} \varphi_j F f)(x)| \leq c 2^{(j-k)a} (\varphi_j^* f)(x).$$

Если выбрать a так, чтобы $a < s$, то из полученной оценки и неравенства (14) следует неравенство

$$S_4 \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} (\varphi_j^* f)^q(x).$$

Оценим теперь S_1 . Из неравенства (5) в силу (15) имеем

$$S_1 \leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} (\varphi_j^* f)^q(x).$$

Неравенства (4), (10) дают оценку

$$\omega_{\alpha}(F^{-1} \varphi_j F f, 2^{-k}) \leq c 2^{-k(\alpha+a)} 2^{j(\alpha+a)} (\varphi_j^* f)(x).$$

Поэтому

$$S_2 \leq c \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_j^* f)^q(x)$$

(на последнем шаге вновь использовано неравенство (14)).

Итак,

$$I \leq c \|2^{sj} \varphi_j^* f\|_{L_p(l_q)}. \quad (16)$$

Пусть теперь $a > n/\min(p, q)$. Тогда в силу максимального неравенства [1, с. 36] из оценки (16) следует неравенство (11).

Докажем теперь неравенство

$$\|f\| \leq c \|f\|''. \quad (17)$$

При этом будем исходить из эквивалентного описания F_{pq}^s через приближения [1, с. 106, 110]. В этом случае достаточно найти последовательность функций $a = (a_j(\cdot))_{j=0}^\infty$, $a_j \in S' \cap L_p$, $\text{supp } Fa_j \subset \{y : |y| \leq 2^{j+1}\}$, такую, что $f = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j$ в S' и

$$\|a_0\|_p + \|2^{ks}(f - a_k)\|_{L_p(l_q)} \leq c\|f\|''.$$

Выберем $g_1(\cdot)$ так, чтобы $\text{supp } Fg_1 \subset [-1, 1]$, $g_1 \geq 0$ и $g_1(t) \leq c/|t|^\gamma$ при $|t| > 1$, где γ достаточно велико. Пусть $g(h) = g_1(|h|)$, $h \in \mathbb{R}^n$ и $\int_{\mathbb{R}^n} g(h) dh = 1$. Рассмотрим свертку $(f - \Delta_{h/\nu}^\alpha f) * g$. Она является целой функцией экспоненциального типа ν . Для $\nu = 2^l$ положим $a_l = (f - \Delta_{2^{-l}h}^\alpha f) * g$. Тогда $a_l(x)$ при $l \rightarrow \infty$ сходятся к f в L_1 , если $0 < p \leq 1$, и в L_p для $1 < p < \infty$ (это следует из свойств дробного модуля гладкости [10, с. 280]). Имеем

$$|a_l(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\Delta_{2^{-l}h}^\alpha f)(x)| g(h) dh = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{2^k \leq |h| < 2^{k+1}} = \sum_{-\infty}^{\infty} I_k(l). \quad (18)$$

Пусть $k \geq 0$. После замены переменной $h = 2^k u$ в $I_k(l)$ в силу выбора g имеем

$$I_k(l) \leq c 2^{\mu k} \int_{\Gamma} |(\Delta_{2^{k-l}u}^\alpha f)(x)| du,$$

где $\Gamma = \{u : 1 \leq |u| < 2\}$, $\mu = \gamma - n$.

Если $k < 0$, то приходим к оценке

$$I_k(l) \leq c 2^{kn} \int_{\Gamma} |(\Delta_{2^{k-l}u}^\alpha f)(x)| du.$$

Пусть $b_m(x) = \int_{\Gamma} |(\Delta_{2^m u}^\alpha f)(x)| du$. Тогда

$$\begin{aligned} |a_l(x) - f(x)|^q &\leq c \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\mu} b_{k-l}(x) \right)^q + \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{kn} b_{k-l}(x) \right)^q \right\} \\ &= c \left\{ \left(\sum_{m=-l}^{\infty} 2^{-l\mu} 2^{-m\mu} b_m(x) \right)^q + \left(\sum_{m=-\infty}^{-l-1} 2^{ln} 2^{mn} b_m(x) \right)^q \right\}. \end{aligned}$$

Из (15) имеем

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{lsq} \left(\sum_{m=-l}^{\infty} 2^{-l\mu} 2^{-m\mu} b_m(x) \right)^q \leq c \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{-msq} b_m^q(x).$$

Аналогично в силу (14)

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{lsq} \left(\sum_{m=-\infty}^{-l-1} 2^{ln} 2^{mn} b_m(x) \right)^q \leq c \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-msq} b_m^q(x).$$

Таким образом,

$$\|2^{ls}(a_l(x) - f(x))\|_{l_q}^q \leq c \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{-msq} b_m^q(x). \quad (19)$$

Рассмотрим сначала случай $0 < q \leq 1$. Тогда

$$b_m(x) \leq \int_{\Gamma} |(\Delta_{2^m u}^{\alpha} f)(x)|^q du \sup_{u \in \Gamma} |(\Delta_{2^m u}^{\alpha} f)(x)|^{1-q}.$$

Подставив полученную оценку в (19) и применив неравенство Гёльдера с показателем $1/q$, приходим к

$$\begin{aligned} \|2^{ls}(a_l(x) - f(x))\|_{l_q} &\leq c \left(\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{msq} \int_{\Gamma} |(\Delta_{2^{-m} u}^{\alpha} f)(x)|^q du \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{msq} \sup_{u \in \Gamma} |(\Delta_{2^{-m} u}^{\alpha} f)(x)|^q \right)^{(1-q)/q}. \end{aligned}$$

Беря L_p -квазинорму от обеих частей этого неравенства и снова применяя неравенство Гёльдера с показателем $1/q$, получаем оценку

$$\|2^{ls}(a_l(x) - f(x))\|_{L_p(l_q)} \leq c(\|f\|'')^q (\|f\|')^{1-q}. \quad (20)$$

Осталось оценить $\|a_0\|_p$. Имеем $\|a_0\|_p \leq c(\|a_0 - f\|_p + \|f\|_p)$. Слагаемое $\|a_0 - f\|_p$ содержится в левой части полученного неравенства (20), т.е. для него выполняется оценка (20). В правой части неравенства (20) содержится $\|f\|_p$. Поэтому ее можно добавить к левой части неравенства. В результате слева получится выражение, оценивающее сверху квазинорму $\|f\|$ [1, с. 106]. Применив теперь неравенство (11), получим оценку (17).

Если $1 < q \leq +\infty$, то из неравенства Гёльдера имеем

$$b_m(x) \leq c \left(\int_{\Gamma} |(\Delta_{2^m u}^{\alpha} f)(x)|^q du \right)^{1/q}.$$

Поэтому

$$\|2^{ls}(a_l(x) - f(x))\|_{L_p(l_q)} \leq c\|f\|'',$$

откуда следует (17).

Так как $\|f\|'' \leq c\|f\|'$, то утверждение теоремы следует из неравенств (11), (17).

Основные результаты работы докладывались на Международном симпозиуме “Ряды Фурье и их приложения” [12].

В заключение автор выражает признательность рецензенту, чьи замечания способствовали улучшению данной заметки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
- [2] Кудрявцев Н. Л. О дробных производных и разностях // Тр. Междунар. конф., посв. 75-летию чл.-корр. РАН, проф. Л. Д. Кудрявцева "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования". Т. 1. Москва, 1998. С. 89–93.
- [3] Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложения классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1969. Т. 105. С. 89–167.
- [4] Лизоркин П. И. Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1972. Т. 117. С. 212–243.
- [5] Калябин Г. А. Описание функций из классов типа Бесова–Лизоркина–Трибеля // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 82–109.
- [6] Калябин Г. А. Характеризация пространств типа Бесова–Лизоркина–Трибеля с помощью обобщенных разностей // Тр. МИАН. 1988. Т. 181. С. 95–116.
- [7] Neugebauer C. J. Smoothness of Bessel potentials and Lipschitz functions // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26. P. 585–591.
- [8] Taberski R. Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Comm. Math. 1977. V. 19. № 2. P. 389–400.
- [9] Schmeisser H.-J., Triebel H. Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. Leipzig: Akadem. Verlagsges. Geest & Portig, 1987.
- [10] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [11] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [12] Кудрявцев Н. Л. Описание пространств Лизоркина–Трибеля через дробные разности // VII Междунар. конф. "Математика, экономика, экология, образование". Междунар. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения" (Новороссийск, 26 мая – 1 июня 1999 года). Тезисы докл. Ростов-на-Дону, 1999. С. 329–330.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.08.2001