Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Галкин, О последовательностях операторов композиции в пространствах функций ограниченной Φ -вариации, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 330–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:30:55

О последовательностях операторов композиции в пространствах функций ограниченной Φ -вариации

О. Е. Галкин

Основные результаты работы содержатся в теоремах 1 и 2. В теореме 1 найдены необходимые и достаточные условия на последовательность функций $h_n: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, при которых для любой функции $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей конечную Φ -вариацию, ограничена последовательность Ψ -вариаций $\{V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ h_n)\}_{n=1}^\infty$, вычисленных для композиций функций f и h_n . В теореме 2 то же сделано для последовательности функций $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, и последовательности Ψ -вариаций $\{V_\Psi(\langle a, b \rangle; h_n \circ f)\}_{n=1}^\infty$.

Библиография: 10 названий.

1. Предварительные сведения

1.1. Основные определения и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1], [2]. 1) Назовем φ -функцией непрерывную неограниченную неубывающую функцию $\Phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такую, что $\Phi(x) = 0$ только при $x = 0$.

2) Будем говорить, что φ -функция Φ удовлетворяет Δ_2 -условию около нуля, если существуют такие $\delta > 0$ и $K > 0$, что $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ при всех $x \in [0, \delta]$ (что, очевидно, равносильно существованию такого $K_1 > 0$, что $\Phi(2x) \leq K_1\Phi(x)$ при всех $x \in [0, 1]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Промежутком $\Pi = \langle c, d \rangle$ при $c \leq d$ будем называть каждое из подмножеств $[c, d]$, (c, d) , $[c, d)$, $(c, d]$ вещественной оси $\mathbb{R}$. Пустое и одноточечные множества также будем считать промежутками.

Всюду далее Φ и Ψ – φ -функции, $\langle a, b \rangle$ и $\langle c, d \rangle$ – непустые промежутки.

Обозначим символом $\tau\langle a, b \rangle$ множество всех разбиений $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ промежутка $\langle a, b \rangle$ (здесь $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. п. 1.2). Φ -вариацией функции $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ по промежутку $\langle a, b \rangle$ называется величина

$$V_\Phi(\langle a, b \rangle; f) = \sup\{V_\Phi[T; f] \mid T \in \tau\langle a, b \rangle\},$$

где $V_\Phi[T; f] = \sum_{i=1}^n \Phi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)$ – *предвариация* функции f по разбиению $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ промежутка $\langle a, b \rangle$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 03-01-00473, 06-01-00761).

Символом $BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ обозначим множество всех функций $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих конечную Φ -вариацию на $\langle a, b \rangle$.

Если $\Phi(x) \equiv x$, то будем записывать $V_{\Phi}(\langle c, d \rangle; g)$ как $V(\langle c, d \rangle; g)$ и $BV_{\Phi}\langle c, d \rangle$ как $BV\langle c, d \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Модулем непрерывности* функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезке $[u, v]$ называется функция $\omega_h([u, v]): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, определяемая равенством

$$\omega_h([u, v]; \delta) = \sup\{|h(t) - h(s)| \mid t, s \in [u, v], |t - s| \leq \delta\}.$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathbf{J}_N\langle c, d \rangle$ семейство всех подмножеств промежутка $\langle c, d \rangle$, которые можно представить в виде объединения N промежутков (ср. [3]). Тогда $\mathbf{J}\langle c, d \rangle = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbf{J}_N\langle c, d \rangle$ – набор подмножеств из $\langle c, d \rangle$, представимых в виде объединения конечного числа промежутков.

Если $E \in \mathbf{J}\langle c, d \rangle$, то обозначим через $|E|$ наименьшее число промежутков, объединение которых дает E .

Множество всех функций $g: \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что прообраз $g^{-1}(\Pi)$ принадлежит $\mathbf{J}_N\langle c, d \rangle$ для любого промежутка $\Pi \subset \mathbb{R}$, обозначим через $\mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$. Ясно, что $\mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle \subset \mathbf{FJ}_{N+1}\langle c, d \rangle$. Символом $\mathbf{FJ}\langle c, d \rangle$ обозначим объединение $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что множества A и B из класса $\mathbf{J}\langle c, d \rangle$ *отделены (друг от друга)*, если между любыми двумя промежутками, один из которых входит в A , а другой – в B , найдется хотя бы одна точка, не принадлежащая ни одному из этих промежутков.

ПРИМЕР. Множества $(0; 1)$ и $(1; 2)$ отделены друг от друга, а множества $(0; 1]$ и $(1; 2)$ – нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем функцию $g: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ *кусочно-постоянной*, если $\langle c, d \rangle$ можно разбить на конечное число непересекающихся промежутков, на каждом из которых g постоянна (это равносильно тому, что g принадлежит $\mathbf{FJ}\langle c, d \rangle$ и принимает конечное число значений).

В настоящей работе мы исследуем, при каких условиях на последовательность функций $h_n: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ (соответственно $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), $n = 1, 2, \dots$, последовательность операторов правой композиции $f \mapsto f \circ h_n$ (соответственно операторов левой композиции $f \mapsto h_n \circ f$) на пространстве $BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ поточечно ограничена по Ψ -вариации, т.е. для любой функции f из класса $BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ ограничена последовательность Ψ -вариаций $\{V_{\Psi}(\langle c, d \rangle; f \circ h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (соответственно $\{V_{\Psi}(\langle a, b \rangle; h_n \circ f)\}_{n=1}^{\infty}$).

1.2. Об истории проблемы. Напомним, что впервые понятие вариации функции было введено Жорданом [4], а понятие Φ -вариации функции было определено: Винером [5] для $\Phi(x) = x^2$, Марцинкевичем [6] и Янгом [7] для $\Phi(x) = x^p$, $p \geq 1$, и Янгом [8] в общем случае. Пространства функций ограниченной вариации с различных точек зрения изучались, в частности, Мушчалаком и Орlichem [1], Лещневичем и Орlichem [2], Чистяковым и Галкиным [9].

Джозефи [3] показал, что если $h: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, то

- 1) $h \circ f \in BV[0; 1]$ для любой функции $f \in BV[0; 1]$ тогда и только тогда, когда h – липшицева;
- 2) $f \circ h \in BV[0; 1]$ для любой функции $f \in BV[0; 1]$ тогда и только тогда, когда $h \in \mathbf{FJ}[0; 1]$.

Цемночоловский и Орлич [10; теорема 1] доказали, что если функция Ψ удовлетворяет Δ_2 -условию около нуля и $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_n(0) = 0$ для $n = 1, 2, \dots$, то условие

а) $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_\Psi(\langle a, b \rangle; h_n \circ f) < \infty$ для любой $f \in BV_\Phi \langle a, b \rangle$
равносильно условию

б) для любого $v > 0$ существует вещественное $K_v > 0$ такое, что при всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\Psi(|h_n(u_2) - h_n(u_1)|) \leq K_v \Phi(|u_2 - u_1|), \quad u_1, u_2 \in [-v, v].$$

Этот результат является обобщением результата 1) Джозефи.

2. Основные результаты

2.1. Функции h_n действуют справа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h_n: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ для $n = 1, 2, \dots$. Тогда условие

а) $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ h_n) < \infty$ для любой $f \in BV_\Phi \langle a, b \rangle$
равносильно условию

б) существует такое натуральное N , что $h_n \in \mathbf{FJ}_N \langle c, d \rangle$ при всех $n = 1, 2, \dots$, и если $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$, то при каждом $n = 1, 2, \dots$ функция h_n принимает не более N значений.

Кроме того, если выполнено условие б), то

1) если $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) < \infty$, то для любых $f \in BV_\Phi \langle a, b \rangle$ и всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется оценка

$$V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ h_n) \leq 2K_f N \cdot V_\Phi(\langle a, b \rangle; f),$$

где $K_f = \sup\{\Psi(z)/\Phi(z) \mid z > 0, \Phi(z) \leq V_\Phi(\langle a, b \rangle; f)\} < \infty$;

2) если $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$, то $f \circ h_n \in BV_\Psi \langle c, d \rangle$ для любой φ -функции Ψ , причем

$$V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ h_n) \leq N^2 \Psi(M_f),$$

где $M_f = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in \langle c, d \rangle\} < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $h: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. Тогда условие

а) $f \circ h \in BV_\Psi \langle c, d \rangle$ для любой $f \in BV_\Phi \langle a, b \rangle$
равносильно условию

б) $h \in \mathbf{FJ} \langle c, d \rangle$, и если $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$, то h принимает лишь конечное число значений (т.е. кусочно-постоянна).

Эти утверждения обобщают результат 2) Джозефи.

2.2. Функции h_n действуют слева.

ТЕОРЕМА 2. Если $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при $n = 1, 2, \dots$, то условие

а) $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_\Psi(\langle a, b \rangle; h_n \circ f) < \infty$ для любой $f \in BV_\Phi \langle a, b \rangle$
равносильно условию

б) для любого $v > 0$ существует вещественное $K_v > 0$ такое, что при всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\Psi(|h_n(u_2) - h_n(u_1)|) \leq K_v \Phi(|u_2 - u_1|), \quad u_1, u_2 \in [-v, v]. \quad (1)$$

Если в классе $BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ есть хотя бы одна непрерывная функция, не являющаяся постоянной, то условия а) и б) равносильны (формально более слабому) условию а') $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\Psi}(\langle a, b \rangle; h_n \circ f) < \infty$ для любой непрерывной $f \in BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$.

Эта теорема лишь немного усиливает результат Цемночоловского и Орлича (элиминировано Δ_2 -условие около нуля на функцию Ψ).

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) В [10; с. 434] показано, что если выполнено условие б), то для любых $f \in BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ и всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется оценка

$$V_{\Psi}(\langle a, b \rangle; f \circ h_n) \leq K_v \cdot V_{\Phi}(\langle a, b \rangle; f).$$

2) Если функция Ψ строго возрастает, то неравенство (1), очевидно, равносильно неравенству

$$\omega_{h_n}([-v, v]; \delta) \leq \Psi^{-1}(K_v \Phi(\delta)), \quad \delta \in [-v, v]. \quad (2)$$

3) Если $\Psi(Lx)/\Psi(x) \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow +\infty$ равномерно по x из некоторого интервала $(0, \varepsilon)$ (это верно, например, для $\Psi(x) = |x|^p$, $p > 0$, и любого $\varepsilon > 1$), то из (2) следует, что при некотором $L > 0$ выполнено неравенство

$$\omega_{h_n}([-v, v]; \delta) \leq L \cdot \Psi^{-1}(\Phi(\delta)), \quad \delta \in [-v, v].$$

4) Если $\Phi(x) = \Psi(x) = 1/\ln(1/x)$ при $0 < x < \delta_0$ для некоторого $0 < \delta_0 < 1$, то неравенство (2) влечет гёльдеровость функции h_n , поскольку $\Psi^{-1}(K_v \Phi(\delta)) = \delta^{1/K_v}$ при $0 < \delta < \delta_0$.

5) Согласно лемме 10 (см. далее раздел 3) в классе $BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда найдется хотя бы одна непрерывная функция, не являющаяся постоянной, когда для некоторого $C > 0$ при всех $x \in [0, 1]$ выполнено неравенство $\Phi(x) \leq Cx$.

3. Вспомогательные утверждения

Перед изложением вспомогательных утверждений приведем таблицу зависимостей между ними:

№ леммы	Где применяется	№ леммы	Где применяется
1	леммы 2 и 9, теорема 1	6	лемма 8
2	лемма 7	7	теорема 1
3	лемма 7	8	теорема 1
4	леммы 7 и 8	9	теорема 1
5	лемма 7, теорема 2	10	теорема 2

ЛЕММА 1. Пусть $g \in \mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$ и $|g(x_1) - g(x_2)| \leq M$ при $x_1, x_2 \in \langle c, d \rangle$ (например, $g(x) \in [0, M]$ при $x \in \langle c, d \rangle$). Тогда

- $V(\langle c, d \rangle; g) \leq M(2N - 1)$, причем оценка точна для любого $N \in \mathbb{N}$;
- если функция g принимает не более N значений, то $g \in BV_{\Psi}\langle c, d \rangle$ для любой φ -функции Ψ , причем

$$V_{\Psi}(\langle c, d \rangle; g) \leq (N^2 - 1) \cdot \Psi(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [3; лемма 1]). а) От противного. Пусть $V(\langle c, d \rangle; g) > M(2N - 1)$. Тогда существует разбиение T такое, что $V[T; g] = \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| > M(2N - 1)$. Так как $|g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq M$, найдется, по крайней мере, $2N$ различных

интервалов с концами $g(t_{i_j})$ и $g(t_{i_{j-1}})$, $j = 1, \dots, 2N$, имеющих непустое пересечение. Пусть z – точка из этого пересечения. Тогда прообраз хотя бы одного из отрезков $[z, g(c) + M]$, $[z, g(c) - M]$ состоит из не менее, чем $N + 1$ промежутков. Это противоречит условию леммы.

Теперь докажем точность оценки. Положим $g(x) = MN \cdot x$ при $x \in [0; 1/N]$, и продолжим функцию g периодически с периодом $1/N$ на полуинтервал $[0; 1)$. Тогда $g \in \mathbf{FJ}_N[0; 1)$ и $V([0; 1); g) = M(2N - 1)$.

б) Так как функция g постоянна на промежутках, количество которых не более N^2 , то в сумме $\sum_{i=1}^n \Psi(|g(t_i) - g(t_{i-1})|) = V_\Psi[T; g]$ имеется не более $N^2 - 1$ ненулевых слагаемых. Каждое из них не превосходит $\Psi(M)$. Поэтому

$$V_\Psi(\langle c, d \rangle; g) = \sup\{V_\Psi[T; g] \mid T \in \tau\langle c, d \rangle\} \leq (N^2 - 1)\Psi(M).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Характеристическая функция χ_E множества $E \subset \langle c, d \rangle$ имеет конечную Φ -вариацию по $\langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда E есть объединение конечного числа промежутков, т.е. $E \in \mathbf{J}\langle c, d \rangle$. При этом для любого $K \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$V_\Phi(\langle c, d \rangle; K \cdot \chi_E) \geq 2\Phi(|K|) \cdot (|E| - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если E есть объединение конечного числа промежутков, то функция χ_E кусочно-постоянна, поэтому согласно пункту б) леммы 1 имеем $V_\Phi(\langle c, d \rangle; \chi_E) < \infty$.

2) Обратно, пусть $V_\Phi(\langle c, d \rangle; \chi_E) < \infty$. Так как для любого разбиения T величина $V_\Phi[T; \chi_E] = \sum_{i=1}^n \Phi(|\chi_E(t_i) - \chi_E(t_{i-1})|)$ принимает лишь значения вида $k \cdot \Phi(1)$, где $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, то $V_\Phi \chi_E = V_\Phi[T_0; \chi_E]$ для некоторого разбиения $T_0 = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$. Тогда

- а) $\chi_E(t) = \chi_E(t_0)$ для любого $t < t_0$, $t \in \langle c, d \rangle$, так как иначе $V_\Phi[\{t\} \cup T_0; \chi_E] > V_\Phi[T_0; \chi_E]$;
- б) аналогично, $\chi_E(t) = \chi_E(t_n)$ для любого $t > t_n$, $t \in \langle c, d \rangle$;
- в) если $\chi_E(t_{i-1}) = \chi_E(t_i)$, то $\chi_E(t) = \chi_E(t_i)$ при любом $t \in (t_{i-1}, t_i)$, так как иначе $V_\Phi[T_0 \cup \{t\}; \chi_E] > V_\Phi[T_0; \chi_E]$;
- г) если $\chi_E(t_{i-1}) \neq \chi_E(t_i)$, то положим $s_i = \inf\{s \in (t_{i-1}, t_i) \mid \chi_E(s) = \chi_E(t_i)\}$. Тогда, во-первых, $\chi_E(t_{i-1}) = \chi_E(t)$ при $t \in (t_{i-1}, s_i)$; во-вторых, $\chi_E(t) = \chi_E(t_i)$ при $t \in (s_i, t_i)$, так как иначе $V_\Phi[T_0 \cup \{s, t\}; \chi_E] > V_\Phi[T_0; \chi_E]$, где $s \in (s_i, t)$ такое, что $\chi_E(s) = \chi_E(t_i)$.

Итак, E состоит из промежутков с концами в точках s_i или в $\pm\infty$, так что этих промежутков не более n штук.

3) Неравенство $V_\Phi(\langle c, d \rangle; K \cdot \chi_E) \geq 2\Phi(|K|) \cdot (|E| - 1)$ получается из оценки $V_\Phi[T; K \cdot \chi_E] \geq 2\Phi(|K|) \cdot (|E| - 1)$, где $T = \{t_1 < s_1 < \dots < s_{n-1} < t_n\}$, точки $t_1, \dots, t_n$ лежат в E , а точки $s_1, \dots, s_{n-1}$ – вне E .

ЛЕММА 3. *Пусть любые два множества из данной последовательности множеств или не пересекаются, или вложены (множество с большим номером вложено в множество с меньшим номером). Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность попарно непересекающихся множеств или подпоследовательность вложенных множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{S_n\}$ – данная последовательность. Множество S_m , в которое вложено лишь конечное число множеств из $\{S_n\}$, назовем *множеством с конечным вложением*. Рассмотрим два случая.

1) В $\{S_n\}$ имеется бесконечное число множеств с конечным вложением. Покажем, что тогда существует подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ попарно непересекающихся множеств. Действительно, в каждое множество с конечным вложением вложено хотя бы одно множество, не содержащее других множеств из $\{S_n\}$. Поэтому существует бесконечная подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ множеств, не содержащих других множеств из $\{S_n\}$. Очевидно, элементы в $\{S_{n_k}\}$ попарно не пересекаются.

2) В $\{S_n\}$ имеется лишь конечное число множеств с конечным вложением. Покажем, что тогда существует подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ вложенных множеств.

В качестве n_1 возьмем номер, начиная с которого каждое S_n содержит бесконечное число других множеств из $\{S_n\}$. Далее строим $\{n_k\}$ по индукции: если n_k уже найдено, то S_{n_k} содержит некоторое $S_{n_{k+1}}$ с номером $n_{k+1} > n_k$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. а) Из любого набора $\{E_1, \dots, E_{N \cdot n^2}\}$, содержащего $N \cdot n^2$ попарно не пересекающихся множеств из класса $\mathbf{J}_N\langle a, b \rangle$, можно выбрать n множеств $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$, которые попарно отделены друг от друга.

б) Из любой последовательности $\{E_n\} \subset \mathbf{J}\langle a, b \rangle$, элементы которой попарно не пересекаются друг с другом, можно выбрать подпоследовательность множеств, которые попарно отделены друг от друга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Применим индукцию по n . Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Пусть утверждение верно для $n - 1$. Тогда из множеств $E_j, j = 1, \dots, N \cdot (n - 1)^2$, можно выбрать $(n - 1)$ множество $E_{j_1}, \dots, E_{j_{n-1}}$, которые попарно отделены друг от друга. Объединение выбранных множеств имеет не более $N(2n - 2)$ граничных точек. Значит, среди $N(2n - 1)$ оставшихся множеств E_j мы можем найти множество E_{j_n} , которое отделено от множеств $E_{j_1}, \dots, E_{j_{n-1}}$.

б) Снова используем индукцию по n . На первом шаге положим $n_1 = 1, E_{n_1} = E_1$.

Далее, пусть множества $E_{n_1}, \dots, E_{n_k}$ уже выбраны. У составляющих их интервалов в совокупности лишь конечное число граничных точек, поэтому от выбранных множеств может быть не отделено лишь конечное число множеств E_n с номерами $n > n_k$. Значит, существует $E_{n_{k+1}}$, отделенное от множеств $E_{n_1}, \dots, E_{n_k}$.

ЛЕММА 5. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – числовые последовательности такие, что $\{a_n\}$ положительна, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/a_n = \infty$. Тогда существуют строго возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{M_k\}$ такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} M_k a_{n_k} < \infty$, но $M_k b_{n_k} \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varepsilon_k = 1/2^k, k = 1, 2, \dots$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Возьмем $M_1 = n_1 = 1$. Далее по индукции строим для каждого натурального $k > 1$ номер n_k так, что $a_{n_k} < \varepsilon_k/M_{k-1}$, $b_{n_k}/a_{n_k} > k/\varepsilon_k$ и $n_k > n_{k-1}$. Затем выбираем натуральное M_k так, что $\varepsilon_k/a_{n_k} \leq M_k < \varepsilon_k/a_{n_k} + 1$. Тогда $M_k > M_{k-1}$, $M_k a_{n_k} < 2\varepsilon_k$ и $M_k b_{n_k} > k$ при $k > 1$.

Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} M_k a_{n_k} < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, но $M_k b_{n_k} \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 6. Если $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$, то существуют последовательность $\{x_k\}$ различных точек из интервала $(0; 1)$, сходящаяся к 0, и последовательность $\{M_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(x_k) < \infty$, но $M_k \Psi(x_k) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что существует последовательность $\{t_n\}$ различных точек из $(0; 1)$ такая, что $\Psi(t_n)/\Phi(t_n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Так как Ψ ограничена на $(0; 1)$, то $\Phi(t_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда, так как Φ — φ -функция, следует, что $\{t_n\}$ сходится к 0. Далее остается воспользоваться леммой 5 для $a_n = \Phi(t_n)$, $b_n = \Psi(t_n)$ и положить $x_k = t_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 7. Если $h_n: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, и $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ h_n) < \infty$ для любой $f \in BV_\Phi\langle a, b \rangle$, то существует такое натуральное N , что $h_n \in \mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Докажем, что для любого промежутка $\Pi \subset \langle a, b \rangle$ множества $h_n^{-1}(\Pi)$, $n = 1, 2, \dots$, состоят из конечного числа промежутков, причем это число ограничено равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

Так как $\chi_\Pi \in BV_\Phi\langle a, b \rangle$ и $\chi_\Pi \circ h_n = \chi_{h_n^{-1}(\Pi)}$, в силу условия леммы выполнено $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_\Psi(\langle c, d \rangle; \chi_{h_n^{-1}(\Pi)}) < \infty$. Поэтому в силу леммы 2 множество $h_n^{-1}(\Pi)$ есть объединение конечного числа промежутков, $n = 1, 2, \dots$, причем

$$2\Psi(1) \cdot \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |h_n^{-1}(\Pi)| - 1 \right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ h_n) < \infty.$$

Следовательно, величина $|h_n^{-1}(\Pi)|$ ограничена равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

б) По пункту а) для любого промежутка $\Pi \subset \langle a, b \rangle$ найдется такое натуральное $N = N(\Pi)$, что $h_n^{-1}(\Pi)$ состоит из не более чем $N(\Pi)$ промежутков, $n = 1, 2, \dots$. Докажем от противного, что можно выбрать одно и то же N для всех промежутков $\Pi \subset \langle a, b \rangle$. Доказательство разобьем на семь шагов б₁)–б₇).

б₁) Если это не так, то для любого $N \in \mathbb{N}$ существуют промежуток $\Pi_N \subset \langle a, b \rangle$ и номер n_N такие, что $|h_{n_N}^{-1}(\Pi_N)| > 2N^2$.

б₂) По индукции построим такую последовательность промежутков $\{J_N\}$, что для любых номеров N и m при $N < m$ либо $J_m \subset J_N$, либо $J_m \cap J_N = \emptyset$, причем $|h_{n_N}^{-1}(J_N)| > N$.

На первом шаге положим $J_1 = \Pi_1$. Далее, пусть $J_1, \dots, J_{N-1}$ уже построены. Они разбивают промежуток Π_N на не более чем $2N$ непересекающихся промежутков $\Pi_N^{(1)}, \dots, \Pi_N^{(m)}$, $m \leq 2N$. Так как $2N^2 < |h_{n_N}^{-1}(\Pi_N)| \leq \sum_{k=1}^m |h_{n_N}^{-1}(\Pi_N^{(k)})|$, имеем $|h_{n_N}^{-1}(\Pi_N^{(k_0)})| > N$ для некоторого k_0 . Полагаем $J_N = \Pi_N^{(k_0)}$.

б₃) По лемме 3 из $\{J_N\}$ можно выделить подпоследовательность промежутков J_{N_k} , которые либо попарно не пересекаются, либо вложены. В первом случае положим $I_k = J_{N_k}$, $i_k = n_{N_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $|h_{i_k}^{-1}(I_k)| > k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

б₄) Покажем, что во втором случае тоже можно подобрать последовательности попарно непересекающихся промежутков $\{I_k\}$ и номеров $\{i_k\}$ такие, что $|h_{i_k}^{-1}(I_k)| > k$. По пункту а) для любого промежутка J_{N_k} величина $|h_n^{-1}(J_{N_k})|$ ограничена равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Поэтому мы можем выбрать из $\{N_k\}$ подпоследовательность $\{m_k\}$ так, что $|h_{i_k}^{-1}(J_{m_{k+1}})| > |h_{i_k}^{-1}(J_{m_k})| + 2k$, где $\{i_k\} = \{n_{m_{k+1}}\}$. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ множество $J_{m_k} \setminus J_{m_{k+1}}$ состоит из двух непересекающихся промежутков, поэтому $J_{m_{k+1}} = J_{m_k} \setminus (J_k^{(1)} \cup J_k^{(2)})$, где $J_k^{(1)}$ и $J_k^{(2)}$ — промежутки (промежуток может быть и пустым). Отсюда

$$|h_{i_k}^{-1}(J_{m_{k+1}})| \leq |h_{i_k}^{-1}(J_{m_k})| + |h_{i_k}^{-1}(J_k^{(1)})| + |h_{i_k}^{-1}(J_k^{(2)})|.$$

Поэтому для некоторого $j_k \in \{1, 2\}$ выполнено неравенство $|h_{i_k}^{-1}(J_k^{(j_k)})| > k$. Полагаем $I_k = J_k^{(j_k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

б₅) Согласно лемме 4, б) можно перейти к подпоследовательностям и считать промежутки I_k попарно отделенными друг от друга.

б₆) Подберем последовательность $\{z_k\} \subset (0, +\infty)$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(z_k) < \infty$. Снова переходя, если нужно, к подпоследовательностям (в $\{i_k\}$ и $\{I_k\}$), добьемся выполнения неравенств $|h_{i_k}^{-1}(I_k)| > k/\Psi(z_k) + 1$ для $k = 1, 2, \dots$.

б₇) Зададим функцию f_0 равенством $f_0 = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \chi_{I_k}$. Тогда, с одной стороны, $f_0 \in BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$, так как $V_{\Phi}(\langle a, b \rangle; f_0) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(z_k) < \infty$, но с другой стороны, $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\Psi}(\langle c, d \rangle; f_0 \circ h_n) = \infty$, так как по лемме 2 при $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$V_{\Psi}(\langle c, d \rangle; f_0 \circ h_{i_k}) \geq V_{\Psi}(\langle c, d \rangle; z_k \chi_{I_k} \circ h_{i_k}) \geq 2\Psi(z_k) \cdot (|h_{i_k}^{-1}(I_k)| - 1) > 2k.$$

Наличие функции f_0 с такими свойствами противоречит условию леммы.

ЛЕММА 8. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $h_n \in \mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, для некоторого $N \in \mathbb{N}$;
- 2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\Psi}(\langle c, d \rangle; f \circ h_n) < \infty$ для любой функции $f \in BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$;
- 3) $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$.

Тогда существует такое $M \in \mathbb{N}$, что при каждом $n = 1, 2, \dots$ функция h_n принимает не более M значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По лемме 6 можно подобрать последовательность $\{z_k\} \subset (0; 1)$ так, что $\sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(z_k) < \infty$, но $\sup_{k \in \mathbb{N}} M_k \Psi(z_k) = \infty$.

б) Пусть доказываемое утверждение неверно. Тогда для любого $M \in \mathbb{N}$ существует функция $h_{n(M)}$, принимающая более чем M различных значений.

в) По индукции выберем для каждого $k = 1, 2, \dots$ функцию h_{n_k} и набор попарно различных точек $y_1^{(k)}, \dots, y_{M_k}^{(k)}$ в множестве $h_{n_k}(\langle c, d \rangle)$ ее значений таким образом, чтобы эти наборы попарно не пересекались, и чтобы при каждом k полные прообразы $h_{n_k}^{-1}(\{y_1^{(k)}\}), \dots, h_{n_k}^{-1}(\{y_{M_k}^{(k)}\})$ этих точек были попарно отделены друг от друга. А именно, в качестве h_{n_1} возьмем функцию, принимающую более чем $N \cdot M_1^2$ различных значений. Тогда по пункту а) леммы 4 среди этих значений можно выбрать M_1 точек $y_1^{(1)}, \dots, y_{M_1}^{(1)}$ так, чтобы их полные прообразы $h_{n_1}^{-1}(\{y_1^{(1)}\}), \dots, h_{n_1}^{-1}(\{y_{M_1}^{(1)}\})$ были попарно отделены друг от друга. Далее, если функции h_{n_j} и точки $y_1^{(j)}, \dots, y_{M_j}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, уже выбраны, то в качестве h_{n_k} возьмем функцию, принимающую более чем $(M_1 + \dots + M_{k-1} + N \cdot M_k^2)$ различных значений. Среди них найдутся $N \cdot M_k^2$ значений, отличных от уже выбранных точек $y_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots, M_j$, $j = 1, 2, \dots, k-1$. По лемме 4, а) из этих значений можно выбрать M_k точек $y_1^{(k)}, \dots, y_{M_k}^{(k)}$ так, чтобы их полные прообразы $h_{n_k}^{-1}(\{y_1^{(k)}\}), \dots, h_{n_k}^{-1}(\{y_{M_k}^{(k)}\})$ были попарно отделены друг от друга.

г) Далее зададим функцию f так: $f(y_i^{(k)}) = z_k$ при $i = 1, \dots, M_k$, $k = 1, 2, \dots$, и $f(x) = 0$ в других точках x промежутка $\langle a, b \rangle$. Тогда

$$V_{\Phi}(\langle a, b \rangle; f) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(z_k) < \infty,$$

но $V_{\Psi}(\langle c, d \rangle; f \circ h_n) \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} M_k \Psi(z_k) = \infty$.

Получили противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если $g \in \mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$ и $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) < \infty$, то $f \circ g \in BV_\Psi\langle c, d \rangle$ для любой функции $f \in BV_\Phi\langle a, b \rangle$, причем выполняется оценка

$$V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ g) \leq 2K_f N \cdot V_\Phi(\langle a, b \rangle; f),$$

где $K_f = \sup\{\Psi(z)/\Phi(z) \mid z > 0, \Phi(z) \leq V_\Phi(\langle a, b \rangle; f)\} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию $\Psi(|f(x) - f(y)|) \leq K_f \cdot \Phi(|f(x) - f(y)|)$ при $x, y \in \langle a, b \rangle$, для любого разбиения $T \in \tau\langle c, d \rangle$ имеем

$$V_\Psi[T; f \circ g] = \sum_{i=1}^n \Psi(|f(g(t_i)) - f(g(t_{i-1}))|) \leq K_f \cdot \sum_{i=1}^n \Phi(|f(g(t_i)) - f(g(t_{i-1}))|).$$

Поскольку f лежит в классе $BV_\Phi\langle a, b \rangle$, ее можно представить (см. [9; теорема 3.2]) в виде $f = \lambda \circ v$, где $v(x) = V_\Phi(\langle a, b \rangle \cap (-\infty, x]; f)$ – ограниченная неубывающая функция на $\mathbb{R}$, а функция $\lambda: v(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq \Phi^{-1}(|x - y|)$ при $x, y \in v(\langle a, b \rangle)$. Поэтому

$$V_\Psi[T; f \circ g] \leq K_f \cdot \sum_{i=1}^n |v(g(t_i)) - v(g(t_{i-1}))| \leq K_f \cdot V(\langle c, d \rangle; v \circ g).$$

Так как для любого промежутка Π из $\mathbb{R}$ множество $v^{-1}(\Pi)$ – также промежуток и $(v \circ g)^{-1}(\Pi) = g^{-1}(v^{-1}(\Pi))$, то функция $v \circ g$ принадлежит классу $\mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$ и принимает значения из отрезка $[0, V_\Phi(\langle a, b \rangle; f)]$. Значит, по пункту а) леммы 1

$$V(\langle c, d \rangle; v \circ g) \leq V_\Phi(\langle a, b \rangle; f) \cdot (2N - 1),$$

откуда

$$V_\Psi(\langle c, d \rangle; f \circ g) \leq 2K_f N \cdot V_\Phi(\langle a, b \rangle; f).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Следующие свойства равносильны:

- 1) среди непрерывных функций, лежащих в классе $BV_\Phi\langle a, b \rangle$, есть хотя бы одна функция, не являющаяся постоянной;
- 2) существует $C > 0$ такое, что $\Phi(x) \leq Cx$ при $x \in [0, 1]$;
- 3) $BV\langle a, b \rangle \subset BV_\Phi\langle a, b \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Выведем из 1) свойство 2). Пусть $f \in BV_\Phi\langle a, b \rangle$ не постоянна и непрерывна на $\langle a, b \rangle$. Тогда $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для некоторых $\alpha < \beta$ из $\langle a, b \rangle$. В силу непрерывности f для любого натурального n найдутся такие точки $t_0, t_1, \dots, t_n$ из $[\alpha, \beta]$, что $f(t_k) = f(\alpha) + (f(\beta) - f(\alpha)) \cdot k/n$, $k = 0, \dots, n$. Пусть T – разбиение, содержащее точки $t_0, t_1, \dots, t_n$. Тогда

$$V_\Phi[T; f] = \sum_{k=1}^n \Phi(|f(t_k) - f(t_{k-1})|) \geq \sum_{k=1}^n \Phi\left(\frac{1}{n}\right) = n\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда $\Phi(1/n) \leq V_\Phi([a, b]; f)/n$, $n = 1, 2, \dots$. Далее, если $x \in (0, 1]$, то $1/(2k) < x \leq 1/k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\Phi(x) \leq \Phi\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{V_\Phi([a, b]; f)}{k} \leq V_\Phi([a, b]; f) \cdot 2x.$$

б) Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

в) Из 3) следует 1), поскольку, например, непрерывная и не постоянная функция $f(t) \equiv t$ лежит в $BV\langle a, b \rangle$, а значит, и в $BV_\Phi\langle a, b \rangle$.

4. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. А) Пусть выполнено условие а). Докажем, что выполнено условие б).

Существование такого натурального N , что $h_n \in \mathbf{FJ}_N\langle c, d \rangle$ при всех $n = 1, 2, \dots$, вытекает из леммы 7.

Предположим теперь, что $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$. Тогда по лемме 8 количество значений функции h_n ограничено равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, выполнение условия б) доказано.

Б) Теперь предположим, что выполнено условие б) теоремы, и докажем, что выполнено условие а). Для этого достаточно воспользоваться: в случае, когда $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) < \infty$, – леммой 1, а в случае $\sup_{0 < x < 1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$ – леммой 9, положив $h_n = h$, $n = 1, 2, \dots$.

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. А) Пусть выполнено условие а). Докажем б).

Начало – пункты 1) и 2) нашего доказательства – следует доказательству теоремы 1 в [10].

1) Докажем, от противного, что на любом отрезке $[-v, v]$ величины $|h_n(x) - h_n(0)|$ ограничены равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Если это не так, то существуют последовательности точек $\{u_i\} \subset [-v, v]$ и номеров $\{n_i\}$, а также число $u_0 \in [-v, v]$ такие, что

$$|h_{n_i}(u_i) - h_{n_i}(0)| \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty,$$

и

$$\Phi(|u_i - u_0|) \leq \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Мы можем считать, что $u_0 \leq u_i \leq u_1$, $i = 2, 3, \dots$. Пусть $a < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < b$. Определим функцию f_0 , положив $f_0(t_0) = 0$, $f_0(t_i) = u_i$, $i = 1, 2, \dots$, и $f_0(t) = u_0$ в остальных точках t промежутка $\langle a, b \rangle$. Тогда

$$V_\Phi(\langle a, b \rangle; f_0) \leq \Phi(u_0) + \Phi(u_1) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(|u_i - u_0|) < \infty.$$

Но при этом $\sup_n V_\Psi(\langle a, b \rangle; h_n \circ f_0) = \infty$, так как

$$\begin{aligned} V_\Psi(\langle a, b \rangle; h_{n_i} \circ f_0) &\geq \Psi(|h_{n_i}(f_0(t_i)) - h_{n_i}(f_0(t_0))|) \\ &= \Psi(|h_{n_i}(u_i) - h_{n_i}(0)|) \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Получили противоречие.

2) Продолжим доказательство условия а) снова от противного. Если а) не выполнено, то существуют последовательность индексов $\{n_i\}$ и последовательность интервалов (u_i, v_i) из $[-v, v]$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что

$$K_i = \frac{\Psi(|h_{n_i}(v_i) - h_{n_i}(u_i)|)}{\Phi(v_i - u_i)} \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Отсюда, так как $|h_n(x) - h_n(0)|$ равномерно ограничены на $[-v, v]$, получаем, что $v_i - u_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

3) Пользуясь этими выводами и леммой 5, выберем строго возрастающие последовательности натуральных чисел $\{M_i\}$ и $\{i_k\}$ так, чтобы для $x_k = u_{i_k}$, $y_k = v_{i_k}$, $m_k = n_{i_k}$, $k = 1, 2, \dots$, выполнялись следующие четыре условия 3а)–3г):

3а) существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ (следовательно, и $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0$);

3б) при $k = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$\Phi(2|x_k - x_0|) \leq \frac{1}{2^k}, \quad \Phi(2|y_k - x_0|) \leq \frac{1}{2^k};$$

3в) $\sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(y_k - x_k) < \infty$, но $M_k \Psi(|h_{m_k}(x_k) - h_{m_k}(y_k)|) \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$;

3г) при $k = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$|x_k - x_0| \leq \frac{1}{2}, \quad |y_k - x_0| \leq \frac{1}{2}.$$

4) Построим функцию f_0 на $[a, b]$ следующим образом. Возьмем последовательность $\{a_n\}$ из $[a, b]$ такую, что $a = a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots < b$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = b$. Далее, при каждом $k = 1, 2, \dots$ на интервале (a_k, a_{k+1}) выберем точки $t_k^{(1)} < t_k^{(2)} < \dots < t_k^{(M_k)}$ и положим: $f_0(t_k^{(j)}) = x_k$, $j = 1, \dots, M_k$, и $f_0(t) = y_k$ в остальных точках полуинтервала $[a_k, a_{k+1})$. Кроме того, зададим $f_0(b) = x_0$.

5) Покажем, что $f_0 \in BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$. Для любого разбиения $T \in \tau\langle a, b \rangle$ вклад в сумму $V_{\Phi}[T; f] = \sum_{i=1}^n \Phi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)$ тех слагаемых, в которых точки t_i и t_{i-1} принадлежат одному интервалу (a_k, a_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, можно оценить через $2 \sum_{k=1}^{\infty} M_k \times \Phi(y_k - x_k) < \infty$, а вклад тех слагаемых, в которых t_i и t_{i-1} принадлежат разным таким интервалам, можно оценить через $2 \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi(2|x_k - x_0|) + \Phi(2|y_k - x_0|))$. Поэтому

$$V_{\Phi}(\langle a, b \rangle; f_0) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(y_k - x_k) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi(2|x_k - x_0|) + \Phi(2|y_k - x_0|)) < \infty.$$

6) Покажем, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\Psi}(\langle a, b \rangle; h_n \circ f_0) = \infty$. Действительно, в силу результатов пункта 2) имеем

$$\begin{aligned} V_{\Psi}(\langle a, b \rangle; h_{m_k} \circ f_0) &\geq V_{\Psi}(\langle a_n, a_{n+1} \rangle; h_{m_k} \circ f_0) \\ &\geq M_k \Psi(|h_{m_k}(y_k) - h_{m_k}(x_k)|) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Таким образом, условие б) выполнено.

А') Пусть в классе $BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ есть хотя бы одна непрерывная, не постоянная функция, но б) не выполнено. Тогда можно подобрать непрерывную функцию $f_1 \in BV_{\Phi}\langle a, b \rangle$ такую, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\Psi}(\langle a, b \rangle; h_n \circ f_1) = \infty$. Для этого изменим конструкцию функции f_0 из пункта 4) следующим образом. При каждом $k = 1, 2, \dots$ на интервале (a_k, a_{k+1}) выберем точки $s_k^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, M_k$, так, что $s_k^{(0)} < t_k^{(1)} < s_k^{(1)} < \dots < s_k^{(M_k)} < t_k^{(M_k)}$, и положим: $f_1(s_k^{(i)}) = y_k$, $i = 0, 1, \dots, M_k$, и $f_1(t_k^{(j)}) = x_k$, $j = 1, \dots, M_k$. Кроме того, зададим $f_1(a) = y_1$, $f_1(b) = x_0$, и продолжим функцию f_1 в оставшиеся интервалы отрезка $[a, b]$ по линейности.

Построенная так функция f_1 непрерывна на $[a, b]$. Из пункта 3г) следует, что $f_1(t) - f_1(s) \leq 1$ при любых $t, s \in \langle a, b \rangle$. Так как по лемме 10 $\Phi(x) \leq Cx$ при $x \in [0, 1]$, применяя рассуждения, аналогичные приведенным в пункте 5), получим, что $V_{\Phi}(\langle a, b \rangle; f_1) < \infty$. Соотношение $\sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\Psi}(\langle a, b \rangle; h_n \circ f_1) = \infty$ можно доказать так же, как для функции f_0 в пункте 6).

Таким образом, если в классе $BV_\Phi\langle a, b \rangle$ есть хотя бы одна непрерывная, но не постоянная функция, то условие б) вытекает из а'). Следовательно, условия а) и б) равносильны условию а').

Б) Теперь предположим, что выполнено условие б) теоремы. Тогда, как показано в [10; с. 434] выполнено и условие а).

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. В. Чистякову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Musielak, W. Orlicz, "On generalized variations. I", *Studia Math.*, **18** (1959), 11–41.
- [2] R. Lésiewicz, W. Orlicz, "On generalized variations. II", *Studia Math.*, **45** (1973), 71–109.
- [3] M. Josephy, "Composing functions of bounded variation", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**:2 (1981), 354–356.
- [4] C. Jordan, "Sur la série de Fourier", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **92**:5 (1881), 228–230.
- [5] N. Wiener, "The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients", *Massachusetts J. Math.*, **3** (1924), 72–94.
- [6] J. Marcinkiewicz, "On a class of functions and their Fourier series", *Collected Papers*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1964, 36–41.
- [7] L. C. Young, "Inequalities connected with bounded p -th power variation in the Wiener sense and with integrated Lipschitz conditions", *Proc. London Math. Soc.* (2), **43** (1937), 449–467.
- [8] L. C. Young, "Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p -ième bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **204**:7 (1937), 470–472.
- [9] V. V. Chistyakov, O. E. Galkin, "Mappings of bounded Φ -variation with arbitrary function Φ ", *J. Dynam. Control Systems*, **4**:2 (1998), 217–247.
- [10] J. Ciemnoczółowski, W. Orlicz, "Composing functions of bounded φ -variation", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **96**:3 (1986), 431–436.

О. Е. Галкин

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: galkin@mm.unn.ru

Поступило
26.06.2007