Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Н. Фоменко, К задаче минимизации совпадений в положительной коразмерности, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 440–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:35:02

К задаче минимизации совпадений в положительной коразмерности

Т. Н. Фоменко

Пусть f, g – отображения между гладкими многообразиями M и N размерностей соответственно $n + m$ и n ($m > 0, n > 2$). Предполагается, что образ $(fxg)(M)$ пересекает диагональ $N \times N$ в конечном числе точек, прообраз каждой из которых есть гладкое m -подмногообразие в M . Рассматривается задача минимизации множества совпадений $\text{Coin}(f, g)$ отображений f, g по отношению к этим прообразам и/или их компонентам. Работа содержит усиление предыдущих результатов автора. А именно, получены достаточные условия для удаления такого m -подмногообразия совпадений без дополнительных размерностных ограничений.

Библиография: 32 названия.

*Посвящается светлой памяти моего дорогого учителя
Юрия Григорьевича Борисовича (1930–2007)*

1. Введение. Пусть $f, g: M^{n+m} \rightarrow N^n$ – непрерывные отображения гладких многообразий указанных размерностей и $m > 0, n > 2$. Рассматривается задача минимизации (в разумном смысле) множества совпадений отображений f, g при помощи гомотопий. Число m называется (положительной) *коразмерностью* задачи.

В целом эта задача происходит из классической теории Нильсена неподвижных точек одного отображения $f: X \rightarrow X$ (см., например, [1]).

Теория Нильсена развивалась многими авторами. Были получены более тонкие результаты и разработаны ее относительные версии [2]–[5], а также эквивариантная версия [6], [7].

Далее, поскольку неподвижные точки суть прообразы диагонали $\Delta_X \subset X \times X$ при отображении $\text{id} \times f$, естественно возникло другое направление развития теории Нильсена – переход от множества неподвижных точек отображений X в себя к множеству прообразов заданного подпространства $B, B \subset Y$, при отображении $f: X \rightarrow Y$. В случае, когда $B = \{b\} \subset Y$ – фиксированная точка, возникает задача о минимизации множества корней уравнения: $f(x) = b$ при гомотопиях отображения f . Отметим здесь работы [8]–[10].

Если заданы два отображения $f, g: X \rightarrow Y$, то возникает задача минимизации множества совпадений $\text{Coin}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, эквивалентная задаче минимизации прообраза диагонали Δ_Y при действии отображения $f \times g$. Таким образом, теорию Нильсена прообразов можно представлять себе как некоторое обобщение теории Нильсена неподвижных точек и теории Нильсена совпадений двух отображений.

При этом задача минимизации множества неподвижных точек отображения $f: X \rightarrow X$, вообще говоря, не эквивалентна задаче минимизации совпадений пары отображений $(\text{id}, f): X \rightarrow X$, поскольку в первом случае разрешается гомотопно менять лишь отображение f , а во втором случае – оба отображения. Комментарии по этому поводу можно найти, например, в [11].

Теория Нильсена совпадений пары отображений $f, g: X \rightarrow Y$, являясь частным случаем теории Нильсена прообразов, тем не менее имеет самостоятельный интерес и ей посвящено достаточно много работ. По аналогии с классической теорией Нильсена неподвижных точек здесь вводится понятие нильсен-эквивалентных точек совпадения, т.е. таких, для которых существует в X соединяющий их путь γ , для которого образы $f\gamma, g\gamma$ при отображениях f, g гомотопны в Y (относительно концов). В случае, когда участвующие пространства X, Y являются замкнутыми ориентированными многообразиями *одинаковых размерностей* удастся ввести гомологический индекс класса Нильсен-эквивалентности точек совпадения, являющийся обобщением индекса класса Нильсена неподвижных точек. Классы Нильсена совпадений с ненулевыми индексами называются *существенными*, а их (конечное) число $N(f, g)$ – *числом Нильсена* совпадений данной пары отображений (f, g) . Соответствующие комментарии и ссылки можно найти в обзоре [11].

Относительные и основанные на них эквивариантные версии теории Нильсена прообразов и теории Нильсена совпадений содержатся, например, в [11]–[18], а также в недавней работе [19].

Однако в случае *различных размерностей* пространств проблема построения теории Нильсена прообразов или, в частности, совпадений пары отображений не укладывается в предыдущую схему и представляет собой отдельную задачу.

В последние 2–3 года появилось несколько работ, посвященных этой проблеме.

Рассматривается задача минимизации множества совпадений пары отображений $f, g: X \rightarrow Y$ пространств размерностей $m + n$, n соответственно, где $m > 0, n > 2$. Число m называется (положительной) коразмерностью задачи. (При отрицательном m задача тривиальна, так как в силу соотношения размерностей малым шевелением множество совпадений можно сделать пустым). Отметим здесь работы [20]–[28].

Вернемся к настоящей работе. Данная заметка является продолжением работы [29].

Мы рассматриваем следующую частную ситуацию. Пусть $f, g: M^{n+m} \rightarrow N^n$ – отображения гладких компактных замкнутых ориентированных многообразий указанных размерностей, $m > 0, n > 2$. Пусть (непустое) пересечение $(f \times g)(M) \cap \Delta_N$ состоит из конечного числа точек, и все множество $\text{Coin}(f, g)$, состоящее из прообразов точек диагонали (а значит, и каждый из этих прообразов), является замкнутым гладким m -подмногообразием в M . В такой ситуации вполне естественно рассмотреть задачу о минимизации множества совпадений по отношению к этим прообразам и/или их связным компонентам.

В работе [29] (а также частично в [30], [31]) представлены достаточные условия для “склеивания” таких бордантных m -подмногообразий и для перемещения одного из них с помощью специальных локальных гомотопий отображений f, g . Там же получены достаточные условия для удаления одного из таких m -подмногообразий при существенных размерностных ограничениях.

В данной работе мы представляем достаточные условия для удаления такого m -подмногообразия за счет гомотопий отображений f, g без дополнительных размерностных ограничений. Соответствующие гомотопии строятся в явном виде.

В п. 2 мы приводим необходимые определения и формулировки используемых результатов работы [29], иллюстрируя идеи доказательств несколькими рисунками.

В п. 3 содержится основной результат данной заметки (теорема 4).

Некоторые заключительные замечания, комментирующие результаты работы, содержатся в п. 4.

2. Определения и используемые результаты. Пусть $f, g: M^{n+m} \rightarrow N^n$ – непрерывные отображения, M, N – гладкие компактные замкнутые ориентированные многообразия указанных размерностей, $m > 0, n > 2$. Рассмотрим следующую ситуацию.

Пусть W – бордизм в M , соединяющий замкнутые подмногообразия A, B (т.е. $\partial W = A \cup (-B)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что *отображение $f|_W: W \rightarrow N$ пропускается через функцию Морса $\varphi: M \rightarrow [0; 1]$* , если $f|_W = h \circ \varphi$, где $h: [0; 1] \rightarrow N$ – путь в N без самопересечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что *гомотопия $G: W \times [0; 1] \rightarrow N$ пропускается через функцию Морса φ* , если в каждый момент $t, 0 \leq t \leq 1$, отображение $G(\cdot, t): W \rightarrow N$, пропускается через функцию Морса φ .

Пусть на трубчатой окрестности $t(X)$ подмногообразия X в M задана структура прямого произведения

$$t(X) \cong X_\varepsilon \times D^k, \quad (*)$$

где X_ε – объединение X и малой “воротничковой” окрестности границы ∂X . При этом слой над граничной точкой рассматривается как полудиск $D_+^{k+1} = D^k \times [0; 1]$, где малый “воротничковый” интервал вне X отождествляется с интервалом $[0; 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что *отображение $f: t(X) \rightarrow N$ согласовано с данной структурой прямого произведения $(*)$ над подмножеством $A, A \subseteq X$* , если из равенства: $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $f(z_1) = f(z_2)$ для всех точек $z_1 = (x_1, y), z_2 = (x_2, y) \in t(X)$, где $x_1, x_2 \in A, y \in D^k$.

Рассмотрим также следующие условия.

(I) Пусть A, B – гладкие замкнутые ориентированные m -подмногообразия в M . A бордантно B в M , соответствующий бордизм $W \subset M$ имеет окрестность $U = U(W)$ такую, что $U \cap \text{Coin}(f, g) = A$. Нормальное расслоение $\nu(W)$ подмногообразия W в M тривиально, и на некоторой трубчатой окрестности $t(W) \subset U$ фиксирована структура прямого произведения.

(II) Пусть, как и в (I), W – бордизм, соединяющий замкнутые m -подмногообразия A, B в M . Пусть ограничения $f|_W, g|_W$ отображений f, g гомотопны относительно некоторого подмножества $K \subset W$, соответствующая гомотопия $\Phi = \Phi(x, s)$ пропускается через заданную на W функцию Морса φ (с $\varphi^{-1}(0) = A, \varphi^{-1}(1) = B$), и $\text{Coin}(\Phi(\cdot, s_1), \Phi(\cdot, s_2)) = A$ для любых моментов гомотопии $s_1 \neq s_2$ ($0 \leq s_i \leq 1, i = 1, 2$).

(III) Пусть W – некоторый $(m+1)$ -бордизм в M , на трубчатой окрестности $t(W)$ которого задана структура прямого произведения. Пусть φ – функция Морса на W ,

и ограничения $f|_{t(W)}, g|_{t(W)}: t(W) \rightarrow N$ согласованы с заданной на $t(W)$ структурой прямого произведения над семейством сепаратрис функции φ .

Приведем основные результаты работы [29].

ТЕОРЕМА 1 ([29; теорема 1]). Пусть $f, g: M^{n+m} \rightarrow N^n$ – непрерывные отображения между гладкими компактными замкнутыми ориентированными многообразиями указанных размерностей, где $m > 0$, $n > 2$. Пусть для $A \subseteq C = \text{Coin}(f, g) \subset M$ и $B \subset M$ выполнены условия (I), (II) при $K = A$, и (III).

Тогда на M существуют гомотопии, постоянные вне $U(W)$, соединяющие пару отображений f, g с парой $\tilde{f}, \tilde{g}: M \rightarrow N$, для которой $\text{Coin}(\tilde{f}, \tilde{g}) = (\text{Coin}(f, g) \setminus A) \cup B$.

На рис. 1 показана ситуация, описанная в условиях теоремы 1. Здесь $f|_W = \alpha \circ \varphi$, $g|_W = \beta \circ \varphi$, где α, β – пути в N ; $f(A) = g(A) = \{a\}$, $f(B) = \{b\}$, $g(B) = \{c\}$. Гомотопия Φ представляется в этом случае в виде $\Phi = \Phi(x, s) = \gamma_s \circ \varphi(x)$, где γ_s – гомотопия путей в N , соединяющая путь α с путем β .

Рис. 1. Иллюстрация к теореме 1

Теорема 1 подробно доказана в [29]. Напомним идею доказательства, проиллюстрировав ее несколькими рисунками.

Вначале нужно вытянуть малые концевые отрезки путей α и β вдоль пути $\gamma_s(1)$ до его середины $\gamma_{1/2}(1) = q$ (см. рис. 2). При этом образы при отображениях f, g малой трубчатой окрестности подмногообразия B радиально (т.е. по образам радиусов) стягиваются (до середины радиусов) в точку $b = f(B)$ (или соответственно в $c = g(B)$) и вытягиваются далее вдоль пути $\gamma_s(1)$ до его середины q , как указано на рис. 1 пунктирными стрелками. Причем данные деформации постоянны на границе малой окрестности B . В результате получаем отображения $f_1, g_1: M \rightarrow N$, совпадающие с f, g вне и на границе малой окрестности B и гомотопные друг другу на W относительно $A \cup B$.

Далее, выбрав евклидову окрестность Ω пути $\gamma_{1/2}(t)$, и используя гомотопию между f_1 и g_1 на W , постоянную на $A \cup B$, следует “подтянуть” образы $f_1(W)$, $g_1(W)$ к пути $\gamma_{1/2}(t)$ так, чтобы они целиком попали в окрестность Ω , оставляя при этом неподвижными их малые концевые участки. На рис. 3 стрелками показано направление деформации средней части путей (при $t \in (\delta; 1 - \delta)$ для некоторого достаточно малого $\delta > 0$) до положения, обозначенного пунктирной линией.

Конечно, малая трубчатая окрестность множества $W_{(\delta, 1-\delta)}$ будет вовлечена в этот процесс. Схема соответствующих деформаций образов окрестности показана на

Рис. 2. Схема первого этапа доказательства теоремы 1

Рис. 3. Схема второго этапа доказательства теоремы 1

рис. 4, где в виде цилиндра показано сужение окрестности $t(W)$ на произвольную интегральную кривую или линию, составленную из участков сепаратрис (соответственно заданной функции Морса φ) $\sigma(t)$, идущую через весь бордизм W и продолженную на “воротничковые” окрестности A, B . Это сужение есть прямое произведение $\sigma(t) \times D^{n-1}$. Вспомогательная функция ρ определяет часть этого цилиндра, изображенную пунктиром в виде “веретена”. Образ при отображении f (или g) этого “веретена” стягивается радиально (т.е. по образам радиусов) на соответствующую часть образа самой кривой $\sigma(t)$ и далее деформируется как показано на рис. 3. Образы остальной части нормальных дисков “над веретеном” соответственно растягиваются. Остальная часть образа при этой деформации постоянна.

После этих гомотопий мы имеем результирующие отображения $F_1, G_1: M \rightarrow N$ со следующими свойствами:

- (i) F_1, G_1 гомотопны исходным отображениям f, g ($\text{rel } M \setminus U$) ;
- (ii) $\text{Coin}(F_1, G_1) \cap U = A \cup B$;
- (iii) существует малая трубчатая окрестность $\tilde{t}(W)$ бордизма W такая, что выполнено $F_1(\text{cl}(\tilde{t}(W))) \cup G_1(\text{cl}(\tilde{t}(W))) \subset \Omega$.

Рис. 4. Схема деформации трубчатой окрестности

Теперь, когда образы малой трубчатой окрестности $\tilde{t}(W)$ содержатся в евклидовой окрестности Ω пути $\gamma_{1/2}(t)$, можно применить локальные *линейные* гомотопии. Для этого выделим в $\tilde{t}(W)$ замкнутую “каплевидную” окрестность $Q = Q(W)$ следующим образом. Пусть $\widehat{W}$ есть объединение бордизма W с малой “воротничковой” окрестностью подмногообразия A в W , так что $Q' \cong \widehat{W} \times D^{n-1}$, $\text{cl}(Q') \subset \tilde{t}(W)$. При этом $\widehat{W}$ можно считать прообразом продолженной на него функции Морса $\varphi: \widehat{W} \rightarrow [-\varepsilon; 1]$, через которую пропускаются отображения F_1, G_1 .

Выделим в Q' замкнутое подмножество Q такое, что для любой кривой $\mu(s)$, являющейся либо интегральной траекторией в $\widehat{W}$ (согласно функции Морса φ) или линией, составленной из участков сепаратрис, идущей через все многообразие $\widehat{W}$ от множества $A_{-\varepsilon} = \varphi^{-1}(-\varepsilon)$ до множества B , и любого вектора $h \in S^{n-2}$, множество $Q' \mid_{\mu(s) \times \xi h} \cap Q$ ($\xi \in [0; 1]$) гомеоморфно замкнутому полукругу (см. рис. 5). Каждая точка $z' = z'_\tau$ этого полукруга (а значит, и соответствующая ей точка $z = z_\tau$ из Q) параметризуется параметром τ как точка отрезка с концами $z'_0, z'_1 = \mu(1)$, как показано на рис. 5, где s – вспомогательный параметр.

Теперь зададим линейные гомотопии, постоянные вне и на границе Q , соединяющие образ каждой такой точки $z_\tau \in Q$ при отображении F_1 (или, аналогично, при G_1) с линейной комбинацией (с параметром τ) образов соответствующих ей точек $z_0 \in \partial Q \setminus B, z_1 \in B$. Отображения $\tilde{f}, \tilde{g}$, полученные в результате этих завершающих гомотопий, удовлетворяют всем требованиям теоремы.

Отметим, что в случае, когда линия $\mu(s)$ состоит из участков сепаратрис, точки z_0 и/или z_1 не всегда определены однозначно, но сам параметр $\tau = \tau(z)$ и образы $F_1(z_i), G_1(z_i)$ ($i = 0, 1$) определены однозначно.

Таким образом, теорема 1 позволяет “перемещать” совпадения “вдоль бордизма”, удовлетворяющего перечисленным в ней условиям.

Если в условиях теоремы 1 дополнительно предположить, что m -подмногообразие B тоже состоит из точек совпадения отображений f, g , то утверждение остается верным. А именно, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 ([29; теорема 2]). Пусть $f, g: M^{n+m} \rightarrow N^n$ – непрерывные отображения между гладкими компактными замкнутыми ориентированными многооб-

$(n + 4, n)$ при $n \geq 7$, $(n + 5, n)$ при $n \geq 8$, $(n + 12, n)$ при $n \geq 15$. Везде в этих случаях выполнено неравенство $0 < m < n - 2$, поэтому для случая гладких отображений теорема 3 представляет собой частный случай теоремы Кошорке (Koshorke) [24; теорема 1.10], которая дает аналогичный результат при более слабых условиях для компоненты линейной связности A множества $C = \text{Coin}(f, g)$, и для любой пары размерностей $(n + m, n)$, удовлетворяющей неравенству: $0 < m < n - 2$.

Отметим, что теорема 2 не является частным случаем (даже для гладких отображений) упомянутой теоремы Кошорке, так как не содержит условия $m < n - 2$. Результаты, аналогичные теореме 1, для случая положительной коразмерности автору также неизвестны.

3. Основной результат. Оказывается, что в рассматриваемых нами условиях можно освободиться от размерностных ограничений теоремы 3 для удаления бордантного нулю m -подмногообразия множества совпадений, образ которого при действии отображения $f \times g$ есть диагональная точка в $N \times N$. А именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \subset \text{Coin}(f, g)$ – замкнутое гладкое m -многообразие, бордантное нулю, с соответствующим нуль-бордизмом W ; $b \in W \setminus A$ – фиксированная точка. Пусть также выполнены условия (1)–(3) теоремы 3. Тогда существуют гомотопные f, g отображения $\tilde{f}, \tilde{g}$, для которых $\text{Coin}(\tilde{f}, \tilde{g}) = \text{Coin}(f, g) \setminus A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, как и в доказательстве теоремы 4 в [29], задача сводится к случаю, когда $A = S^m$, и нуль-бордизм $W = D^{m+1}$ ($\partial W = A$) достаточно мал и целиком содержится в евклидовой окрестности в многообразии M . Напомним это рассуждение.

Точка b в данных условиях является критической точкой заданной на W функции Морса φ с критическим значением 1. Из пленки W можно выделить подмножество $Y = \varphi^{-1}((1 - \varepsilon; 1])$, гомеоморфное малому $(m + 1)$ -мерному диску D^{n-1} и применить теорему 1 к бордизму $(A, \tilde{W}, \tilde{B})$, где $\tilde{B} = \partial Y \cong S^m$, $\tilde{W} = W \setminus Y$ есть часть пленки W между A и $\tilde{B}$.

Итак, можно считать, что малый нуль-бордизм W есть сепаратрисный диск, и в качестве его изолирующей (от других совпадений) окрестности можно взять (малый) $(n + m)$ -мерный шар $U = U(W) = D^{n+m}$. При этом, конечно, можно считать, что образы $f(t(W))$, $g(t(W))$ также целиком содержатся в евклидовой окрестности в многообразии N . Следовательно, можно рассматривать отображение разности $(f - g): t(W) \rightarrow \mathbb{R}^n$. В силу условия (3) это отображение пропускается через функцию $\varphi \times \text{id}$, где φ – заданная функция Морса, и гомотопна нулю на W . При этом гомотопия $F: f - g \sim 0$ на W также пропускается через функцию φ . Функцию Морса φ можно считать продолженной на W_ε – объединение W с “воротничковой” окрестностью подмногообразия A , т.е. $\varphi: W_\varepsilon \rightarrow [-\varepsilon; 1]$.

Таким образом,

$$(f - g)|_{t(W)} = h \circ (\varphi \times \text{id}): (W_\varepsilon \times D^{n-1}) \rightarrow ((-\varepsilon; 1] \times D^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

где $h = \tilde{h}_f - \tilde{h}_g$, $\tilde{h}_f|_W = h_f$, $\tilde{h}_g|_W = h_g$, а h_f, h_g определены из равенств: $f|_W = h_f \circ \varphi$, $g|_W = h_g \circ \varphi$. При этом $f|_{t(W)} = \tilde{h}_f \circ (\varphi \times \text{id})$, $g|_{t(W)} = \tilde{h}_g \circ (\varphi \times \text{id})$. На рис. 6 схематично показана описанная ситуация.

Рис. 6. Иллюстрация к доказательству теоремы 4

Далее, гомотопию F можно считать гомотопией “вдоль исходного образа”, т.е. считать, что $F = h \circ D_t \circ \varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $D_t(s) = (1-t)s$ – деформация отрезка $R = [0; 1]$, лежащего в фактор-пространстве $(-\varepsilon; 1] \times D^{n-1}$, в его левый конец. Продолжим гомотопию F на всю трубку $t(W)$, постоянно на границе трубки. Для этого используем продолжение $\tilde{D}_t$ деформации $D_t(s)$ на все фактор-пространство $((-\varepsilon; 1] \times D^{n-1})$. Зададим эту деформацию $\tilde{D}_t$, как показано на рис. 7 (а), (б), (в), сжимая отрезок $[0; 1]$ в его левый конец, и постепенно вдавливая вслед за этим отрезком (открытый) диск $D = (\{1\} \times D^{n-1})$ внутрь цилиндра $((-\varepsilon; 1] \times D^{n-1})$, до положения D' и затем D'' , показанных на рис. 7 (б), (в). Отметим, что диск D не содержит образов границы окрестности $t(W)$ при отображении $\varphi \times \text{id}$.

Рис. 7. Схема деформации фактор-пространства

Тогда композиция

$$\tilde{F}_t = h \circ \tilde{D}_t \circ (\varphi \times \text{id}): t(W) \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

представляет собой гомотопию от исходного отображения

$$\tilde{F}_0 = (f - g): (t(W), t(W) \setminus A, A) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0, 0)$$

до отображения

$$\tilde{F}_1 = h \circ \tilde{D}_1 \circ (\varphi \times \text{id}): t(W) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0.$$

В результате этой гомотопии образ трубки $t(W)$ не содержит точку $0 \in \mathbb{R}^n$.

Теперь, возвращаясь к отображениям f, g , рассмотрим сумму

$$f_t = g + \tilde{F}_t: t(W) \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \cong V \subset N,$$

где V – евклидова окрестность в N . Очевидно, что f_t есть гомотопия (постоянная на границе трубки $t(W)$) от исходного отображения $f_0 = f$ к некоторому непрерывному отображению $f_1 = \tilde{f}: t(W) \rightarrow N$, причем $\text{Coin}(\tilde{f}, g) = \text{Coin}(f, g) \setminus A$. Теорема 4 доказана.

4. Заключительные замечания. Напомним, что как отмечалось в начале статьи, наша цель – минимизировать множество совпадений $\text{Coin}(f, g)$ в том случае, когда оно представляет собой объединение прообразов (при отображении $(f \times g)$) конечного числа диагональных точек пространства $N \times N$, и каждый из этих прообразов является замкнутым гладким m -подмногообразием в M . При этих условиях естественно рассматривать проблему минимизации по отношению к этим прообразам или их компонентам.

Следует отметить, что соотношение между двумя такими m -подмногообразиями $A, B \subset \text{Coin}(f, g)$, описанное в теореме 2, не является, вообще говоря, эквивалентностью, так как не транзитивно. Дело в том, что бордизмы между различными такими m -подмногообразиями могут пересекаться, и гомотопное изменение отображений на одном из них может “испортить” структуру отображений на другом бордизме. Тем не менее, отметим следующие два обстоятельства, проиллюстрированные на рис. 8 (а), (б).

Рис. 8. Минимизация совпадений на дереве бордизмов

1) Пусть имеется некоторый бордизм W в M , представляющий собой объединение $(m + 1)$ -бордизмов, образующих дерево. Пусть граничные m -подмногообразия,

“соединяемые” каждым из этих бордизмов, состоят из точек совпадения отображений f , g , и каждое из них отображается ими в одну и ту же точку в N . Предположим, что бордизмы данного набора пересекаются лишь по общим границам и правильно примыкают, т.е. у их пересечений общие “воротничковые” окрестности. И наконец, пусть для каждого бордизма данного набора выполнены все условия теоремы 2 (при этом для всего объединения W эти условия не обязаны выполняться). Тогда, применяя шаг за шагом теорему 2, можно убрать совпадения на всех граничных подмногообразиях кроме одного граничного подмногообразия последнего, “корневого” бордизма данного дерева. На рис. 8(а) m -подмногообразия $A_1, \dots, A_5$ отображаются при действии f, g в точки $a_1, \dots, a_5 \in N$, бордизмы, соединяющие m -подмногообразия A_1 с B_2 , A_2 с B_1 , A_3 с B_3 , и “корневой” бордизм $\widetilde{W}$, соединяющий A_4 с A_5 , отображаются в гомотопные пути в N , соединяющие соответствующие точки-образы. Если выполнен описанный выше набор условий для этих бордизмов, то в результате применения теоремы 2 совпадения останутся только на подмногообразии A_5 , являющимся граничным для “корневого” бордизма $\widetilde{W}$ этого дерева.

2) Если для некоторого дерева бордизмов выполнены все перечисленные выше условия и, кроме того, “корневой” бордизм является тривиальным и для него выполнены условия теоремы 4, то применяя теоремы 2 и 4, совпадения можно убрать со всех граничных подмногообразий данного дерева бордизмов. На рис. 8(б) граничные m -подмногообразия A_1, A_2, A_3 отображаются при f, g соответственно в точки a_1, a_2, a_3 , а связывающие их бордизмы – в соответствующие гомотопные друг другу пути. Наличие “корневого” нуль-бордизма W_0 позволяет (при выполнении описанного набора условий) убрать все совпадения на этом дереве бордизмов.

Таким образом, в указанных частных случаях число прообразов диагональных точек (или их компонент) при отображении $f \times g$ может быть минимизировано, в указанном смысле, при помощи специальных локальных гомотопий данных отображений f, g , без дополнительных размерностных ограничений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, Contemp. Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [2] B. Jiang, “On the least number of fixed points”, *Amer. J. Math.*, **102**:4 (1980), 749–763.
- [3] H. Schirmer, “A relative Nielsen number”, *Pacific J. Math.*, **122**:2 (1986), 459–473.
- [4] H. Schirmer, “On the location of fixed points on pairs of spaces”, *Topology Appl.*, **30**:3 (1988), 253–266.
- [5] X. Zhao, “A relative Nielsen number for the complement”, *Topological Fixed Point Theory and Applications* (Tianjin, 1988), Lect. Notes in Math., **1411**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 189–199.
- [6] P. Wong, “Equivariant Nielsen numbers”, *Pacific J. Math.*, **159**:1 (1993), 153–175.
- [7] Т.Н. Фоменко, “О наименьшем числе неподвижных точек эквивариантного отображения”, *Матем. заметки*, **69**:1 (2001), 100–112.
- [8] R. F. Brown, H. Schirmer, “Nielsen theory of roots of maps of pairs”, *Topology Appl.*, **92**:3 (1999), 247–274.
- [9] R. Brooks, P. Wong, “On Changing Fixed Points and Coincidences to Roots”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:2 (1992), 527–533.
- [10] R. Dobreńko, Z. Kucharski, “On the generalization of the Nielsen number”, *Fund. Math.*, **134**:1 (1990), 1–14.

- [11] С. А. Богатый, Д. Л. Гонсалвес, Х. Цишанг, “Теория совпадения: проблема минимизации”, *Солитоны, геометрия, топология – на перекрестках*, Тр. МИАН, **225**, 1999, 52–86.
- [12] P. Wong, “Homotopy theory in Nielsen coincidence theory”, *Proc. of Int. Conf. on Homotopy Theory and Nielsen Fixed Point Theory* (April 10, 2000,), Institute of Science and Technology, Korea University, Seoul, 2001, 69–77.
- [13] D. L. Gonçalves, P. N.-S. Wong, “Nilmanifolds are Jiang-type spaces for coincidence”, **1**, **13**, 2001, 133–141.
- [14] R. Dobreńko, J. Jezierski, “The coincidence nielsen number in non-orientable manifolds”, *Rocky Mountain J. Math.*, **23**:1 (1993), 67–85.
- [15] J. Guo, Ph. R. Heath, “Coincidence theory on the complement”, *Topology Appl.*, **95**:3 (1999), 229–250.
- [16] J. Guo, Ph. R. Heath, “Equivariant coincidence Nielsen numbers”, *Topology Appl.*, **128**:2–3 (2003), 277–308.
- [17] J. Jezierski, “The Relative coincidence Nielsen number”, *Fund. Math.*, **149**:1 (1996), 1–18.
- [18] Chan Gyu Jang, Sik Lee, “A relative Nielsen Number in coincidence theory”, *J. Korean Math. Soc.*, **32**:2 (1995), 171–181.
- [19] О. Д. Фролкина, *Обобщенная задача прообраза*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, М., МГУ, 2006.
- [20] D. Gonçalves, P. Wong, “Obstruction theory and coincidences of maps between nilmanifolds”, *Arch. Math. (Basel)*, **84**:6 (2005), 568–576.
- [21] D. Gonçalves, J. Jezierski, P. Wong, *Obstruction Theory and Coincidences in Positive Codimension*, preprint, Bates College, 2002.
- [22] P. Saveliev, “Higher order Nielsen Numbers”, *Fixed Point Theory Appl.*, 2005, № 1, 47–66.
- [23] P. Saveliev, “Removing coincidences of maps between manifolds of different dimensions”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **22**:1 (2003), 105–113.
- [24] U. Koschorke, “Nielsen coincidence theory in arbitrary codimensions”, *J. Reine Angew. Math.*, **598** (2006), 211–236.
- [25] U. Koschorke, *Nonstabilized Nielsen Coincidence Invariants and Hopf–Ganea Homomorphisms*, preprint, Siegen, 2005.
- [26] U. Koschorke, “Geometric and homotopy theoretic methods in Nielsen coincidence theory”, art. ID 84093, *Fixed Point Theory Appl.*, Special Issue (2006), 15 pp..
- [27] U. Koschorke, “Coincidence theory in arbitrary codimensions: the minimizing problem”, *Oberwolfach Rep.*, **1**:4 (2004), 2342–2344.
- [28] U. Koschorke, *Coincidence Free Pairs of Maps*, preprint, Siegen, 2006.
- [29] T. N. Fomenko, “Nielsen type invariants and the location of coincidence sets in positive codimensions”, *Topology and its Appl.* (to appear).
- [30] Т. Н. Фоменко, “О проблеме локализации и минимизации совпадений пары отображений в положительной коразмерности”, *Тезисы докладов Международной Конференции “Александровские чтения–2006”* (30 мая–2 июня 2006), М., МГУ, 61.
- [31] Т. Н. Фоменко, “Nielsen type invariants and the location of the coincidence sets for a pair of mappings in positive codimension”, 2006 *International Conference on Topology and its Applications* (June 23–26, 2006, Aegion, Greece), Municipal Library of Aegion, Aegion, 67–68.
- [32] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.

Т. Н. Фоменко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tn-fomenko@yandex.ru, atfomenko@mail.ru

Поступило

19.06.2007