Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Отелбаев, Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье–Стокса, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 771–779

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 11:54:27

Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье–Стокса

М. Отелбаев

В пространстве функций со значениями в гильбертовом пространстве рассматривается задача Коши: $u'_t + Au + B(u, u) = f(t)$, $u(0) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Построены примеры самосопряженного оператора $A \geq E$ и билинейного преобразования B , удовлетворяющего условию $\langle B(u, v), v \rangle = 0$, такие, что задача Коши не является сильно разрешимой.

Библиография: 5 названий.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – линейный неотрицательный самосопряженный оператор в H с вполне непрерывной резольвентой, а $B(\cdot, \cdot)$ – билинейное преобразование $H \times H$ в H . Предположим, что если $w, u, v \in D(A)$, то пары (w, u) , (w, v) , (u, v) принадлежат $D(B)$ и

$$\langle B(w, u), v \rangle = -\langle B(w, v), u \rangle. \quad (1)$$

Здесь $D(\cdot)$ – область определения, E – единичный оператор, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в H .

Через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ обозначим собственные числа оператора A , занумерованные в порядке не убывания с учетом кратности, а через $e_1, e_2, \dots$ – соответствующую полную ортонормированную систему собственных векторов. На отрезке $[0, T]$ рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u'_t + Au + B(u, u) = f(t), \\ u(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

где $f(t)$ – функция со значениями в H такая, что

$$\int_0^T |f(\eta)|^2 d\eta < \infty. \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем $|\cdot|$ означает норму в H . Задача (2) понимается как равенство

$$\int_0^T [-\varphi'(t)\langle e_n, u(t) \rangle + \lambda_n \varphi(t)\langle e_n, u(t) \rangle + \varphi(t)\langle e_n, B(u, u) \rangle] dt = \int_0^T \varphi(t)\langle e_n, f(t) \rangle dt,$$

Статья написана при поддержке фонда Intas OPEN CALL (грант № 05-1000008-8157).

которое выполняется при любом $n = 1, 2, \dots$ и при любой непрерывно дифференцируемой скалярной функции $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(T) = 0$.

Умножим уравнение (2) скалярно на u и воспользуемся условием (1). Тогда, интегрируя полученное выражение от 0 до t , получаем оценку

$$\begin{aligned} \frac{|u|^2}{2} + \int_0^t |\sqrt{A}u|^2 d\eta &\leq \left| \int_0^t \langle f, u \rangle d\eta \right| \leq T \int_0^t |f|^2 d\eta + \frac{1}{4T} \int_0^t |u|^2 d\eta \\ &\leq T \int_0^T |f|^2 d\eta + \frac{1}{4} \sup_{0 \leq \eta \leq T} |u|^2. \end{aligned}$$

Отсюда, так как t – произвольная точка из $[0, T]$, получим неравенство

$$\frac{1}{4} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{u(t)}{2} \right|^2 \leq T \int_0^T |f(\eta)|^2 d\eta.$$

Но тогда

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{u(t)}{2} \right|^2 + \int_0^T |\sqrt{A}u|^2 d\eta \leq 5T \int_0^T |f(\eta)|^2 d\eta. \quad (4)$$

С помощью оценки вида (4) в [1; с. 83] получена теорема существования слабого решения уравнения Навье–Стокса. К абстрактному уравнению вида (2) сводится система уравнений Навье–Стокса. Мы это покажем в случае, когда по пространственным переменным заданы периодические краевые условия.

Пусть Q – куб с центром в нуле и с ребрами, равными 2π . Рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_j - \Delta u_j + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} P = f_j, \\ \operatorname{div} u \equiv \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} u_k = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in Q. \end{cases} \quad (5)$$

К этой системе добавим начальные условия Коши

$$u_j(t, x)|_{t=0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

и периодические краевые условия по пространственным переменным ($j, k = 1, 2, 3$):

$$u_j(t, x)|_{x_k=-\pi} = u_j(t, x)|_{x_k=\pi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \Big|_{x_k=-\pi} = \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \Big|_{x_k=\pi}, \quad P|_{x_k=-\pi} = P|_{x_k=\pi}. \quad (7)$$

Систему (5) обычно записывают в следующей векторной форме:

$$\begin{cases} u'_t - \Delta u + (u, \nabla)u + \operatorname{grad} P = f(t), \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (8)$$

В (5)–(7) $f = (f_1, f_2, f_3)$ – вектор-функция действующей силы, $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор-функция скорости, а P – давление.

Введем оператор $(\tilde{\Delta})^{-1}$, действующий по формуле

$$(\tilde{\Delta})^{-1}v = - \sum_{k \neq (0,0,0)} |k|^{-2} c_k e^{i\langle k, x \rangle},$$

если

$$v = \sum_k c_k e^{i\langle k, x \rangle},$$

где $k = (k_1, k_2, k_3)$, $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. В этих суммах k пробегает множество всевозможных трехкомпонентных целых векторов.

Определим еще один оператор по следующей формуле:

$$Ru = [E - \text{grad}(\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}]u,$$

где E – единичный оператор. Так как на периодических функциях выполняется равенство $\text{div grad } u = \Delta u$, то прямыми вычислениями доказывается

ЛЕММА 1. Пусть u и P – достаточно гладкие вектор-функция и скалярная функция соответственно, удовлетворяющие условиям периодичности (7). Тогда

$$\text{div } Ru = 0, \quad R \text{ grad } P = 0,$$

и если $\text{div } u = 0$, то $Ru = u$.

Приняв за пробные функции тригонометрические полиномы и определив соответствующим образом обобщенные функции и операции над ними, результат леммы 1 можно распространить на все периодические обобщенные функции.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} w'_t - \Delta w + R(Rw, \nabla)Rw = g, \\ w|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Поддействуем на (5) (или на (8)) оператором R . Тогда, пользуясь леммой 1 и так как $\text{div } u = 0$, получим уравнение (9), в котором $w = u$, $g = Rf$. В уравнении (9) при $g = Rf$ нет необходимости писать $\text{div } w = 0$, так как, применив к (9) операцию div , получаем для $\text{div } w$ уравнение

$$\begin{cases} (\text{div } w)'_t - \Delta(\text{div } w) = 0, \\ (\text{div } w)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (9')$$

Отсюда вытекает $\text{div } w = 0$ при всех $t > 0$. Поэтому задача (9) эквивалентна задаче (5)–(7).

Теперь возьмем в качестве H пространство $L_2(Q)$, в качестве A – оператор $(-\Delta)$ и в качестве $B(\cdot, \cdot)$ – билинейное преобразование, определенное формулой $B(u, v) \equiv R(Ru, \nabla)Rv$. Тогда задача (9) запишется в виде абстрактной задачи (2). Напомним, что задачи (9), (9'), (8) и (5)–(7) рассматриваются в классе периодических функций.

ЛЕММА 2. Если w, v, g принадлежат классу $W_{2\pi}^2(Q)$ – классу Соболева периодических функций, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} \langle R(Rw, \nabla)Rv, g \rangle &= \langle R(Rw, \nabla)Rv, Rg \rangle = \langle (Rw, \nabla)Rv, Rg \rangle \\ &= -\langle (Rw, \nabla)Rg, Rv \rangle = -\langle R(Rw, \nabla)Rg, v \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Лемма 2 доказывается непосредственными вычислениями. Отметим, что эта лемма легко распространяется на все $w, v, g \in L_{2\pi}(Q)$, для которых $Rv, Rg \in W_{2\pi}^1(Q)$, и написанные в утверждении леммы все пять выражений имеют смысл и конечны.

Таким образом, мы записали задачу Коши для системы уравнений Навье–Стокса в абстрактной форме (2), и условие (1) в силу леммы 2 выполняется.

2. Пример стационарного уравнения типа Навье–Стокса, не являющегося сильно разрешимым. Рассмотрим стационарное уравнение

$$Au + B(u, u) = f, \quad (10)$$

соответствующее эволюционному уравнению (2). Здесь $A = A^* \geq E$, а $B(\cdot, \cdot)$ – билинейный оператор, для которого выполнено условие (1). В силу условия (1), если $u \in D(A) \cap D(B(\cdot, \cdot))$, то выполнена априорная оценка

$$|\sqrt{A}u|^2 \leq |Au + B(u, u)|^2 \equiv |f|^2. \quad (4')$$

Эта оценка при некоторых ограничениях на A и $B(\cdot, \cdot)$ позволяет доказать существование решения (10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\beta \in (-\infty, \infty)$. Будем говорить, что задача (10) β -сильно разрешима, если решение $u(t)$ уравнения (10), в котором $|A^\beta f| < \infty$, удовлетворяет неравенству $|A^{\beta+1}u| < \infty$.

В этом пункте мы построим пример A и $B(\cdot, \cdot)$, которые таковы, что задача (10) не является β -сильно разрешимой для β , принадлежащих некоторому интервалу, который будет указан.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ и $\{e_n\}_{n \geq 1}$ – собственные числа оператора A и соответствующая полная ортонормированная система его собственных векторов. Определим билинейный оператор $B(\cdot, \cdot)$ следующим образом. Если $u = \sum_{n \geq 1} u_n e_n$ и $v = \sum_{n \geq 1} v_n e_n$, то

$$B(u, v) = B(u)v = \sum_{s \geq 1} \left[\sum_{j \geq 1} b_{sj} v_j \right] e_s, \quad (11)$$

$$b_{sj} = \begin{cases} 0, & \text{если } s = j, \\ c_s c_j u_s, & \text{если } s < j, \\ -c_s c_j u_j, & \text{если } s > j, \end{cases}$$

где $\{c_j\}_{j \geq 1}$ – некоторые действительные числа. Выберем $\{\lambda_s\}_{s \geq 1}$ и $\{c_s\}_{s \geq 1}$ следующими:

$$\lambda_s = as^\lambda, \quad c_s = s^c, \quad a = \sum_{j \geq 1} j^{3c-2\lambda}, \quad c - \lambda < -\frac{1}{2}, \quad 2c - \lambda < -1, \quad \lambda > 0. \quad (12)$$

Пусть

$$u = \sum_{n \geq 1} u_n e_n, \quad u_n = n^{-\lambda}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12')$$

Вычислим $\langle Au + B(u, u), e_s \rangle$. Используя выбор (11), (12) и (12') имеем

$$\begin{aligned} \langle Au + B(u, u), e_s \rangle &= \lambda_s u_s + \sum_{j \geq 1} b_{sj} u_j = \lambda_s u_s + \sum_{s < j} c_s c_j u_s u_j - \sum_{s > j \geq 1} c_s c_j u_j^2 \\ &= a s^\lambda s^{c-\lambda} - \sum_{j \geq 1} s^c j^c j^{2(c-\lambda)} + \sum_{s \leq j} s^c j^c j^{2(c-\lambda)} + \sum_{s < j} s^c s^{c-\lambda} j^c j^{c-\lambda} \leq K s^{4c-2\lambda+1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12) и (12') имеем

$$\begin{aligned} |A^\beta(Au + B(u, u))|^2 &\leq K^2 a^{2\beta} \sum_{s \geq 1} s^{2\lambda\beta+8c-4\lambda+2}, \\ |A^{\beta+1}u|^2 &= a^{2(\beta+1)} \sum_{s \geq 1} s^{2\lambda\beta+2c-2\lambda} s^{2\lambda} = a^{2(\beta+1)} \sum_{s \geq 1} s^{2\lambda\beta+2c}. \end{aligned}$$

Из этих двух соотношений вытекает, что уравнение (10) не является β -сильно разрешимым, если

$$2\lambda\beta + 8c - 4\lambda + 2 < -1, \quad 2\lambda\beta + 2c \geq -1. \quad (13)$$

Множество β , удовлетворяющих этим двум неравенствам, непусто, если выполнены неравенства в (12). Поэтому мы построили пример уравнения типа (10), в котором $A = A^* \geq E$ и $B(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию (1), и которое не является β -сильно разрешимым, если выполнены условия (13). Осложняя построенный пример, можно построить уравнения вида (10), которые помимо (1) обладают еще некоторыми свойствами уравнений, к которому сводится стационарное уравнение Навье–Стокса. Тем не менее, автору не удалось построить контр-пример к проблеме сильной разрешимости в целом для самой системы уравнений Навье–Стокса при $n \geq 5$. По этой причине ограничимся наиболее простым примером.

3. Пример эволюционного уравнения типа Навье–Стокса, которое не является сильно разрешимым в целом. В этом пункте рассмотрим задачу Коши (2). Для нее верна слабая (энергетическая) априорная оценка (4). Но, тем не менее, мы покажем, что задача не всегда сильно разрешима в целом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\beta \in (-\infty, \infty)$. Будем говорить, что задача (2) β -сильно разрешима в целом, если при любом $T > 0$ из неравенства $\sup_{0 \leq \eta \leq T} |A^\beta f(\eta)|^2 < \infty$ вытекает, что неравенство $\sup_{0 \leq \eta \leq T} |A^{\tilde{\beta}}(u'_\eta + Au)|^2 < \infty$ справедливо при всех $\tilde{\beta} < \beta$, где $u(\cdot)$ – решение задачи (2).

С целью упрощения вычислений мы выбрали определение β -сильной разрешимости, соответствующее выбору пространства ограниченных по норме вектор-функций из $C[(0, T), H]$. Это пространство не гильбертово и не рефлексивно. Можно пользоваться и следующим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Задача (2) β -сильно разрешима в целом, если при любом $T > 0$ из неравенства $\int_0^T |A^\beta f(\eta)|^2 d\eta < \infty$ вытекает неравенство $\int_0^T |A^\beta(u'_\eta + Au)|^2 d\eta < \infty$, где $u(\cdot)$ – решение задачи (2).

Из результатов работ [2] и [3] или [4] и [5] вытекает, что если задача (2), рассматриваемая в одном фиксированном пространстве, сильно разрешима, то она сильно

разрешима в целом семействе пространств. Поэтому в этой статье мы позволили себе выбрать наиболее подходящее определение сильной разрешимости.

Для построения примера не сильно разрешимой в целом задачи используем следующую схему.

Построим последовательно вектор-функции

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_1\right)u_1(t) &= N_1(t), & u_1(t)|_{t=0} &= 0, \\ \left(\frac{d}{dt} + \lambda_n\right)u_n(t) &= N_n(t) - \langle B(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n), e_n \rangle, & u_n(t)|_{t=0} &= 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

где $\tilde{u}_1 = 0$, $\tilde{u}_n = \sum_{k \leq n-1} u_k(t)e_k$, а скалярные функции $N_n(t)$ выбраны так, чтобы все выписываемые ниже выражения имели смысл.

Положим

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n = \sum_{k \geq 1} u_k(t)e_k, \quad f(t) \equiv u'_t + Au + B(u, u).$$

В силу построений имеем

$$\begin{aligned} \langle f(t), e_n \rangle &= \frac{d}{dt} u_n + \lambda_n u_n + \langle B(\tilde{u}_n + (u - \tilde{u}_n), \tilde{u}_n + (u - \tilde{u}_n)), e_n \rangle \\ &= \frac{d}{dt} u_n + \lambda_n u_n + \langle B(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n), e_n \rangle \\ &\quad + \langle B(\tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n) + B(u - \tilde{u}_n, \tilde{u}_n) + B(u - \tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n), e_n \rangle \\ &= N_n(t) + \langle B(\tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n) + B(u - \tilde{u}_n, \tilde{u}_n) + B(u - \tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n), e_n \rangle. \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что задача (2) не будет β -сильно разрешимой, если при некотором $\tilde{\beta} < \beta$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{n \geq 1} \langle f(t), e_n \rangle^2 \lambda_n^{2\beta} dt &\equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{n \geq 1} [N_n(t) + \langle B(\tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n) + B(u - \tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \\ &\quad + B(u - \tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n), e_n \rangle]^2 \lambda_n^{2\beta} < \infty, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{n \geq 1} \left| \frac{d}{dt} u_n + \lambda_n u_n \right|^2 \lambda_n^{2\tilde{\beta}} &\equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{n \geq 1} (N_n(t) - \langle B(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n), e_n \rangle)^2 \lambda_n^{2\tilde{\beta}} = \infty. \end{aligned}$$

Можно надеяться, что величина

$$\langle B(\tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n) + B(u - \tilde{u}_n, \tilde{u}_n) + B(u - \tilde{u}_n, u - \tilde{u}_n), e_n \rangle$$

стремится к нулю быстрее, чем $\langle B(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n), e_n \rangle$ (из-за присутствия в первом выражении разности $u - \tilde{u}_n$). Если $A = A^* \geq E$, A^{-1} вполне непрерывен, то используя приведенную схему, можно построить билинейный оператор $B(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющий условию (1), так, чтобы соответствующая им задача (2) не была β -сильно разрешимой в целом. Ниже мы действуем по существу по выше приведенной схеме. Некоторые несущественные отклонения связаны с необходимостью упрощений вычислений.

Пусть $c_1, c_2, \dots$ – последовательность действительных неотрицательных чисел, $c_1 \neq 0$, а $\gamma(t)$ – непрерывная на $[0, T]$ функция. Определим последовательность функций $\{u_j(t)\}_{j \geq 1}$ на отрезке $[0, T]$ следующим образом: в качестве $u_1(t)$ берем любую непрерывную на $[0, T]$ функцию, а при $j \geq 2$ функции $u_j(t)$ определим из уравнений

$$\frac{d}{dt} u_j + \lambda_j u_j = c_j \gamma(t), \quad u_j(t)|_{t=0} = 0, \quad j = 2, 3, \dots \quad (14)$$

Отсюда получаем

$$u_j(t) = c_j \int_0^t e^{-\lambda_j(t-\eta)} \gamma(\eta) d\eta \equiv c_j (T_j \gamma)(t), \quad j = 2, 3, \dots \quad (14')$$

Справедлива

ЛЕММА 3. Если $\sum_{j \geq 2} c_j^3 \lambda_j^{-2} = M < \infty$, $|c_1 u_1^2(t)| \leq \delta$, $16\delta M < 1$, $0 < \delta < 1/4$, то можно выбрать непрерывную функцию $\gamma(t)$ так, чтобы выполнялось равенство $\gamma(t) = \sum_{j \geq 2} c_j u_j^2 + c_1 u_1^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (14') достаточно показать, что уравнение

$$\gamma(t) = F(\gamma)(t) \equiv \sum_{j \geq 2} c_j^3 (T_j \gamma)^2(t) + c_1 u_1^2 \quad (15)$$

относительно неизвестной функции $\gamma(t)$ имеет непрерывное решение. Для преобразования F имеем

$$\begin{aligned} |F\gamma(t)| &\leq \sum_{j \geq 2} c_j^3 \left| \int_0^t e^{-\lambda_j(t-\eta)} \gamma(\eta) d\eta \right|^2 + |c_1 u_1^2(t)| \\ &\leq \sum_{j \geq 2} \left(c_j^3 e^{-2\lambda_j t} [e^{\lambda_j t} - 1]^2 \frac{1}{\lambda_j^2} \right) \sup_{0 \leq \xi \leq t} |\gamma(\xi)|^2 + |c_1 u_1^2(t)| \\ &\leq M \sup_{0 \leq \xi \leq t} |\gamma(\xi)|^2 + |c_1 u_1^2(t)|. \end{aligned}$$

Отсюда и из условий леммы следует

$$|F\gamma(t)| \leq M \left[\frac{\delta}{M} + \sup_{0 \leq \xi \leq t} |\gamma(\xi)|^2 \right].$$

Поэтому, если $|\gamma(t)| \leq 4\delta$, то получаем $|F\gamma(t)| \leq \delta + 16\delta^2 M$. Следовательно, если $16\delta M \leq 1$, то из этого неравенства вытекает, что преобразование F переводит шар радиуса 4δ в себя. Далее, преобразование F переводит ограниченное множество в компактное. Действительно, из условия леммы вытекает, что в (15) ряд сходится по норме пространства $C[0, 1]$ непрерывных функций и остаточные члены ряда равномерно стремятся к нулю, когда $\gamma(t)$ пробегает любое ограниченное множество в $C[0, 1]$. Так как операторы $(T_j \gamma)^2(t)$ в $C[0, 1]$ компактны, то имеем, что сумма ряда есть компактное множество в $C[0, 1]$. Поэтому преобразование F компактно. Так как F переводит шар радиуса 4δ в себя и компактен, из известной теоремы Браудера получаем утверждение леммы.

Выберем билинейное преобразование $B(\cdot, \cdot)$ согласно (11) из пункта 2. Обозначим

$$u = \sum_{j \geq 1} u_j e_j, \quad f = u'_t + Au + B(u, u).$$

Для коэффициентов Фурье вектор-функции $f(t)$, используя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \langle f, e_s \rangle = \langle u'_t + Au + B(u, u), e_s \rangle = \frac{d}{dt} u_s + \lambda_s u_s + c_s u_s \sum_{j>s} c_j u_j - c_s \sum_{j<s} c_j u_j^2 \\ &= \frac{d}{dt} u_s + \lambda_s u_s + c_s u_s \sum_{j>s} c_j u_j - c_s \gamma(t) + c_s \sum_{j \geq s} c_j u_j^2 = c_s u_s \sum_{j>s} c_j u_j + c_s \sum_{j \geq s} c_j u_j^2. \end{aligned}$$

Оценим $f_s(t)$: $|f_s(t)| \leq J_{s1} + J_{s2}$,

$$\begin{aligned} J_{s1} &= |c_s u_s| \sum_{j>s} |c_j u_j| \leq \left(c_s^2 \int_0^t e^{-\lambda_s(t-\eta)} \gamma(\eta) d\eta \right) \left(\sum_{j>s} c_j^2 \int_0^t e^{-\lambda_j(t-\eta)} \gamma(\eta) d\eta \right) \\ &\leq K c_s^2 \lambda_s^{-1} (1 - e^{-\lambda_s t}) \sum_{j>s} c_j^2 \lambda_j^{-1} (1 - e^{-\lambda_j t}), \end{aligned}$$

и аналогично для J_{s2} имеем

$$J_{s2} \leq K c_s (1 - e^{-\lambda_s t}) \sum_{j \geq s} c_j^3 \lambda_j^{-2} (1 - e^{-\lambda_j t})^2,$$

где K – постоянное число, зависящее от $\gamma(t)$. Отсюда

$$\sum_{s \geq 1} \lambda_s^{2\beta} f_s^2 \leq K^2 \left[\sum_{s \geq 1} c_s^4 \lambda_s^{2\beta} \lambda_s^{-2} \left(\sum_{j>s} c_j^2 \lambda_j^{-1} \right)^2 + \sum_{s \geq 1} c_s^2 \lambda_s^{2\beta} \left(\sum_{j \geq s} c_j^3 \lambda_j^{-2} \right)^2 \right].$$

Выберем

$$c_s = s^c, \quad \lambda_j = j^\lambda, \quad \lambda > 0, \quad c < 0, \quad 2c - \lambda + 1 < 0. \quad (16)$$

Тогда можно выбрать c_1 и u_1 , чтобы выполнялось условие леммы 2. Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s \geq 1} \lambda_s^{2\beta} f_s^2 &\leq K_1^2 \left[\sum_{s \geq 1} s^{4c-2\lambda} s^{2\beta\lambda} (s^{2c-\lambda+1})^2 + \sum_{s \geq 1} s^{2c} s^{2\beta\lambda} (s^{3c-2\lambda+1})^2 \right] \\ &\leq K_2^2 \sum_{s \geq 1} s^{8c-4\lambda+2\beta\lambda+2}. \end{aligned}$$

Поэтому, если выполнено (16) и

$$8c - 4\lambda + 2\beta\lambda + 3 < 0, \quad (16')$$

то

$$\sup_{0 \leq \eta \leq T} |A^\beta f|^2 < \infty.$$

Для $A^{\tilde{\beta}}(u'_t + Au)$, в силу (14) и выбора (16) имеем ($\tilde{\beta} = \beta - \varepsilon$)

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \eta \leq T} |A^{\tilde{\beta}}(u'_t + Au)|^2 &= \sup_{0 \leq \eta \leq T} \sum_{s \geq 1} \lambda_s^{2\beta-2\varepsilon} c_s^2 \gamma^2(t) \\ &\geq K_2 \sum_{s \geq 1} \lambda_s^{2\beta-2\varepsilon} c_s^2 = K_2 \sum_{s \geq 1} s^{2\lambda(\beta-\varepsilon)} s^{2c}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $2\beta\lambda + 2c > -1$ можно выбрать $\tilde{\beta} < \beta$ так, чтобы иметь

$$\sup_{0 \leq \eta \leq T} |A^{\tilde{\beta}}(u'_t + Au)|^2 = \infty.$$

Так как множество чисел c , λ , β , для которых

$$\lambda > 0, \quad c < 0, \quad 2c - \lambda + 1 < 0, \quad 2\beta\lambda + 8c - 4\lambda + 3 < 0, \quad 2\beta\lambda + 2c > -1,$$

не пусто, то пример задачи (2), не являющейся β -сильно разрешимой в целом, построен.

Построенный пример может быть существенно усложнен, но пример, опровергающий сильную разрешимость в целом трехмерного уравнения Навье–Стокса не построен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [2] М. Отелбаев, “О свойствах одного класса уравнений типа Навье–Стокса”, *Российско-Казахстанский симпозиум*, Эльбурс, Нальчик, 2004, 140–145.
- [3] М. Отелбаев, А. А. Дурмагамбетов, Е. Н. Сейткулов, “Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве”, *Докл. РАН*, **408**:4 (2006), 446–449.
- [4] М. Отелбаев, А. А. Дурмагамбетов, Е. Н. Сейткулов, “Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:3 (2008), 620–634.
- [5] М. Отелбаев, А. А. Дурмагамбетов, Е. Н. Сейткулов, “Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Станислава Ивановича Похожаева, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 202–212.

М. Отелбаев

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан
E-mail: otelbayev_m@rambler.ru

Поступило

17.07.2007

Исправленный вариант

17.05.2008