Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Балаев, Разрешимость задачи Коши для линейных дифференциально-операторных уравнений с переменными операторными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 672–688

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3899>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:59:53

Разрешимость задачи Коши для линейных дифференциально-операторных уравнений с переменными операторными коэффициентами

М. К. Балаев

В работе изучается задача Коши для линейных дифференциально-операторных уравнений с неограниченными, неплотно заданными, переменными операторными коэффициентами в банаховом пространстве. Выделены новые классы эволюционных уравнений первого и второго порядков, для которых задача Коши корректно разрешима.

Библиография: 11 названий.

1. Постановка задачи. В статье исследуется разрешимость следующих задач Коши для линейных дифференциально-операторных уравнений в банаховом пространстве E :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + A_1(t)u(t) + f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u''(t) = (A(t) + A_1(t))u'(t) + (B(t) + B_1(t))u(t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$, $B_1(t)$ – заданные при каждом $t \in [0, T]$ линейные операторы с областями определения $D(A(t))$, $D(A_1(t))$, $D(B(t))$ и $D(B_1(t))$, $f(t)$ – заданная непрерывная при $t > 0$ функция со значениями в E ; u_0 , u_1 – заданные элементы на E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Решением задачи (1)* на $[0, T]$ будем называть непрерывную на $[0, T]$, непрерывно дифференцируемую на $(0, T]$ функцию $u(t)$ со значениями в E , удовлетворяющую при каждом $t \in (0, T]$ уравнению (1), начальному условию $u(0) = u_0$ и обладающую, кроме того, тем свойством, что функции $A(t)u(t)$, $A_1(t)u(t)$ непрерывны на $(0, T]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Решением задачи (2)* на $[0, T]$ будем называть непрерывно-дифференцируемую на $[0, T]$, дважды непрерывно дифференцируемую на $(0, T]$ функцию $u(t)$ со значениями в E , удовлетворяющую при каждом $t \in (0, T]$ уравнению (2), начальным условиям $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ и обладающую, кроме того, тем свойством, что функции $A(t)u'(t)$, $A_1(t)u'(t)$, $B(t)u(t)$ и $B_1(t)u(t)$ непрерывны на $(0, T]$.

Задача Коши для эволюционных уравнений изучалась в различных аспектах многими авторами (см., например, [1], [2], в которых приведена обширная библиография). Теория эволюционных уравнений с переменным оператором, порождающим аналитическую полугруппу, развита Соболевским [3] и Танабе [4]. Эволюционное уравнение с неаналитической полугруппой без предложения о постоянстве области определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ рассмотрено Якубовым в работе [2].

Задача (1) в работе [5] исследовалась при условии, что $D(A(t))$ не является плотным в E множеством, однако предполагалась непрерывная дифференцируемость оператор-функции $A^{-1}(t)$ и использовались свойства резольвенты оператора $A(t)$. В [6] эта задача изучалась без предположения о дифференцируемости оператор-функции $A^{-1}(t)$, не использовались и свойства резольвенты оператора $A(t)$, но предполагалось, что область определения оператор-функции $A(t)$ постоянна.

В работе [7] задача (1) была исследована в случае переменной области определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ без использования свойств резольвенты этого оператора, а также дифференцируемости оператор-функции $A^{-1}(t)$.

Отметим, что во всех перечисленных работах предполагалось, что оператор-функция $A(t)A^{-1}(s)$ равномерно непрерывна по Гёльдеру по t в равномерной операторной топологии.

В [8] введено новое слабое условие непрерывности оператор-функции $A(t)A^{-1}(s)$. Однако, в этой работе предполагается, что область определения $D(A(t))$ сильно позитивного оператора $A(t)$ является всюду плотным в E множеством и не зависит от t .

В работе [9] задача (2) была исследована в случае переменной области определения $D(A(t))$ и $D(B(t))$ операторов $A(t)$ и $B(t)$, причем не предполагалось, что эти множества плотны в E , кроме того, исследование проводилось без использования свойств резольвенты этих операторов.

В работе [10] задача (1) исследована в случае переменной области определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$, которая не является плотным в E множеством и $A_1(t) = 0$. Кроме того, налагается новое слабое условие непрерывности на оператор функцию $A(t)A^{-1}(s)$, $s \leq t$, и на функцию $f(t)$.

В настоящей статье задачи (1), (2) изучаются в случае переменной области определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$, которая не является плотным в E множеством. Кроме того, налагается новое слабое условие непрерывности на оператор-функцию $A(t)A^{-1}(s)$, $s \leq t$, и на функцию $f(t)$.

Задачи (1) и (2) исследуются в предположении, что оператор $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1°) линейный оператор $A(t)$, $t \in [0, T]$, с областью определения $D(A(t))$ при $\beta \in (1/2, 1]$ удовлетворяет условию

$$\|R(\lambda, A(t))\| \leq c|\lambda|^{-\beta}, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \eta, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

где $\eta > 0$ – некоторое число;

- 2°) для всех $0 \leq \tau \leq t \leq T$ имеет место включение $D(A(\tau)) \subset D(A(t))$ и при любых $0 \leq s \leq \tau$, $t \leq T$ выполнено неравенство

$$\|[A(t) - A(\tau)]A^{-1}(s)\| \leq c\omega(|t - \tau|),$$

где $\omega(t)$ – положительная, монотонно возрастающая, определенная на интервале $(0, \infty)$ функция, которая при некотором $p \in [1/(2\beta - 1), \infty)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_0^T \frac{\omega^p(r)}{r^p} |\log r|^p dr < \infty. \quad (3)$$

Случай $\beta = 1$, $p = 1$ изучен в [8].

Условию 2° удовлетворяют, например, функции

$$\begin{aligned} \omega(r) &= c |\log r|^\alpha && \text{при } \alpha < -2, \quad p = 1, \\ \omega(r) &= c \frac{\log(1+r)}{r^{1/p} |\log r|^\alpha} && \text{при } \alpha > \frac{p+1}{p}, \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Заметим, что эти функции не равномерно непрерывны по Гёльдеру в окрестности $r = 0$.

Введем обозначения:

- E – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$;
- A – замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$;
- $E(A) = \{u : u \in D(A)\}$, $\|u\|_{E(A)} = \|Au\| + \|u\|$;
- $u^{(k)}(t) = d^k u(t)/dt^k$;
- $C^n([0, T]; E(A_n), \dots, E(A_1), E) = \{f(\cdot); A_n f, \dots, A_1 f^{(n-1)}, f^{(n)} \in C([0, T]; E)\}$;
- $F_{p,\mu}^\alpha((0, T); E) = \{f(\cdot); f \in C((0, T]; E)\}$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{F_{p,\mu}^\alpha((0, T]; E)} &= \sup_{t \in \{0, T\}} \|t^\mu f(t)\| + \sup_{0 < \tau < t \leq T} \int_\tau^t \frac{\|f(t) - f(s)\|^p}{|t - s|^{p\alpha}} s^{p\mu} ds, \\ \alpha &\in (0, 1], \quad \mu \geq 0, \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Следуя [10], рассматриваемые задачи будем исследовать методами теории полугрупп.

Приведем теперь одну лемму из [2; с. 32], которая оказывается полезной при оценке резольвенты возмущенного оператора, и теорему из [11] о разрешимости эволюционного уравнения первого порядка.

ЛЕММА А [2; с. 32]. Пусть

- 1) A – линейный оператор в банаховом пространстве E и при некотором $\eta \in (0, 1]$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C |\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

где Γ – контур, имеющий предельное направление на бесконечности;

- 2) $D(B) \supset D(A)$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\|Bu\| \leq \varepsilon \|Au\|^\eta \|u\|^{1-\eta} + C(\varepsilon) \|u\|, \quad u \in D(A).$$

Тогда

$$\|R(\lambda, A + B)\| \leq C |\lambda|^{-\eta}, \quad \lambda \in \Gamma, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА В [10; с. 47]. Пусть выполнены условия 1° , 2° . Пусть далее

- 3) $f \in F_{p,\mu}^\alpha((0,T]; E)$ при некоторых $\mu \in [0, (p-1)/p)$, $\alpha \in ((p+1)/p - \beta, 1]$, $p \in [1/(2\beta-1), \infty)$, если $p=1$, то $\beta=1$ и $\alpha=1$;
 4) $u_0 \in D(A^\delta(0))$, если $\overline{D(A(0))} \neq E$, $\delta \in (1-\beta, 1]$; $u_0 \in E$, если $\overline{D(A(0))} = E$ и $\beta=1$, $p=1$.

Тогда задача

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad u(0) = u_0$$

имеет единственное решение $u(t)$, которое дается формулой

$$u(t) = U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, s)f(s) ds.$$

Здесь $U(t, \tau)$ – эволюционный оператор, порожденный оператором $A(t)$.

2. Разрешимость задачи (1). Линейные дифференциально-операторные уравнения второго порядка сводятся к задаче (1), вследствие чего возникает необходимость ее исследования.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1° , 2° . Пусть далее

- 3°) для всех $t \in [0, T]$, $D(A(t)) \subset D(A_1(t))$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\|A_1(t)u\| \leq \varepsilon \|A(t)u\|^\beta \|u\|^{1-\beta} + C(\varepsilon)\|u\|, \quad u \in D(A(t)),$$

для всех $0 \leq s \leq \tau \leq t \leq T$;

- 4°) $\|[A_1(t) - A_1(\tau)]u\| \leq \omega(|t - \tau|)(\|A(s)u\| + \|u\|)$, $u \in D(A(s)t)$;

- 5°) $\|f(t + \Delta t) - f(t)\| \leq ct^{-\mu}\omega(|\Delta t|)$, $\mu \in [0, \beta]$;

- 6°) $f \in F_{p,\mu}^\alpha((0,T); E)$ при некоторых $\mu \in [0, (p-1)/p)$;

- 7°) $u_0 \in D(A^\delta(0))$ при некотором $\delta \in (1-\beta, 1]$, $u_0 \in E$, если $\overline{D(A(0))} = E$ и $\beta=1$, $p=1$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение

$$u(t) \in C([0, T]; E) \cap C^1((0, T]; E(A(t)), E),$$

которое дается формулой

$$u(t) = U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, s)f(s) ds, \quad (4)$$

и имеют место оценки

$$\|u(t)\| \leq C(\|A(0)u_0\| + \|u_0\| + \|f\|_{F_{p,\mu}^\alpha((0,T); E)}), \quad t \in (0, T],$$

$$\|u'(t)\| + \|A(t)u(t)\| + \|B(t)u(t)\|$$

$$\leq Ct^{-1}(\|A(0)u_0\| + \|B(0)u_0\| + \|f\|_{F_{p,\mu}^\alpha((0,T); E)}), \quad t \in ((0, T); E),$$

где $U(t, \tau)$ – эволюционный оператор, порожденный оператором $A(t) + A_1(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оператора $A(t) + A_1(t)$ проверим условия теоремы 3 [10]. Действительно при каждом $t \in [0, T]$ в силу условий 1° и 3° операторы $A(t)$ и $A_1(t)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 леммы 1.1 [2]. Поэтому в силу этой леммы для резольвенты оператора $A(t) + A_1(t)$ имеет место оценка

$$\|R(\lambda, A(t) + A_1(t))\| \leq C|\lambda|^{-\beta}, \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \eta,$$

$|\lambda| \rightarrow \infty$. Поэтому оператор $A(t) + A_1(t)$ с областью определения $D(A(t))$ удовлетворяет условию 1 теоремы 3 [10]. Покажем, что оператор $A(t) + A_1(t)$ удовлетворяет также условию 2 теоремы 3 [10]. Действительно, в силу условий 1 и 3 для всех $0 \leq \tau \leq t \leq T$ имеем

$$\|[A(t) + A_1(t)] - [A(\tau) + A_1(\tau)]\| \leq C\omega(|t - \tau|)(\|A(s)\| + \|u\|), \quad u \in D(A(s)),$$

т.е. имеет место и условие 2 для оператора $A(t) + A_1(t)$. Условия 3 и 4 теоремы 3 [10] также имеют место. Далее, применяя теоремы 3 [10] к задаче (1), устанавливаем разрешимость задачи (1).

В частном случае при $\omega(t) = t^\alpha$ и когда области определения $D(A(t))$ и $D(A_1(t))$ операторов $A(t)$, $A_1(t)$ всюду плотны в E эта теорема совпадает теоремой Якубова [2; с. 136], а в случае $\omega(t) = t^\alpha$, $A_1(t) = 0$, пересекается с результатами Сильченко. Кроме того, в отличие от работ [1], [7] нами также не предполагается оценка

$$\|A^{-1}(s)[A(t) - A(\tau)]u\| \leq C|t - \tau|^\alpha \|u\|, \quad u \in D(A(t)),$$

которая является условием гладкости на сопряженный оператор $A^*(t)$.

В случае постоянства $D(A(t)) \equiv D(A(0))$, $D(A(t)) = E$, и $A_1(t) = 0$ и $\beta = 1$ теорема 1 совпадает с результатами Каватсу [8].

3. Разрешимость задачи (2). В книге [2] Якубова для исследования задачи типа (2) с неограниченными операторными коэффициентами предложен метод сведения к системе. Этот метод и в случае задачи (2) приводит к цели.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия.

1. При каждом $t \in [0, T]$ $A(t)$ — замкнутый линейный оператор с областью определения $D(A(t))$, которая не обязательно является плотным множеством в банаховом пространстве E и имеет ограниченный обратный $A^{-1}(t)$ в E , причем при некоторых $\eta > 0$, $\beta_1 \in (1/2, 1]$ и $\beta_2 \in (1/2, 1)$, где $\beta_1 + \beta_2 > 1$, имеет место оценка

$$\|R(\lambda, -A(t))\| \leq C|\lambda|^{-\beta_1}, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \eta, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Кроме того, для всех $0 \leq \tau \leq t \leq T$ имеет место вложение $D(A(\tau)) \subset D(A(t))$ и выполнена оценка

$$\|R(\lambda, -B(t)A^{-1}(t))\| \leq C|\lambda|^{-\beta_2}, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \eta, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Также для всех $0 \leq \tau \leq t \leq T$ имеет место вложение $D(B(\tau)A^{-1}(\tau)) \subset D(B(t)A^{-1}(t))$.

2. При каждом $t \in [0, T]$ имеет место вложение $D(B(t)) \supset D(A^2(t))$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\|B(t)u\| \leq \|A^2(t)u\|^{\beta_1+\beta_2-1} \|u\|^{2-\beta_1-\beta_2} + C(\varepsilon)\|u\|, \quad u \in D(A^2(t)).$$

3. При каждом $t \in [0, T]$ имеет место вложение $D(A_1(t)) \supset D(A(t))$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\|A_1(t)u\| \leq \varepsilon \|A(t)u\|^{\beta_1+\beta_2-1} \|u\|^{2-\beta_1-\beta_2} + C(\varepsilon)\|u\|, \quad u \in D(A(t)).$$

4. При каждом $t \in [0, T]$ имеет место вложение $D(B_1(t)) \supset D(A(t)) \cap D(B(t))$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\|B_1(t)u\| \leq \varepsilon (\|A(t)u\| + \|B(t)u\|)^{\beta_1+\beta_2-1} \|u\|^{2-\beta_1-\beta_2} + C(\varepsilon)\|u\|, \\ u \in D(A(t)) \cap D(B(t)).$$

5. Оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ дифференцируема на $[0, T]$.

6. При $u \in D(A(s))$ и при всех $0 \leq s \leq \tau$, $t \leq T$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|[A'(t) - A'(\tau)]u\| &\leq \omega(|t - \tau|)\|A(s)u\|, & u \in D(A(s)), \\ \|[A_1(t) - A_1(\tau)]u\| &\leq \omega(|t - \tau|)\|A(s)u\|, & u \in D(A(s)), \\ \|[B(t)A^{-1}(t) - B(\tau)A^{-1}(\tau)]u\| &\leq \omega(|t - \tau|)(\|B(s)A^{-1}(s)u\| + \|u\|), \\ & & u \in D(B(s)A^{-1}(s)), \\ \|[B_1(t)A^{-1}(t) - B_1(\tau)A^{-1}(\tau)]u\| &\leq \omega(|t - \tau|)(\|B(s)A^{-1}(s)u\| + \|u\|), \\ & & u \in D(B(s)A^{-1}(s)), \end{aligned}$$

где $\omega(\tau)$ – положительная, монотонно возрастающая, определенная на интервале $(0, \infty)$ функция, которая при некотором $p \in [1/(2\beta - 1), \infty)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_0^T \frac{\omega^p(r)}{r^p} (\log r)^p dr < \infty, \quad (5)$$

где $\beta = \beta_1 + \beta_2 - 1$.

7. Имеет место оценка

$$\|f(t + \Delta t) - f(t)\| \leq ct^{-\mu} \omega(|\Delta t|), \quad \mu \in [0, \beta),$$

$f \in F_{p,\mu}^\alpha((0, T); E)$ при некоторых $\mu \in [0, (p - 1)/p)$, $p \in ((p + 1)/p - \beta, 1]$, $p \in [1/(2\beta - 1), \infty)$; если $p = 1$, то $\beta = 1$ и $\alpha = 1$.

8. Имеют место включения $u_0 \in D(A(0)) \cap D(B(0))$, $u_1 \in D(A(0))$.

Тогда задача (2) имеет единственное решение

$$u \in C^1([0, T]; E(A(0)), E) \cap C^2([0, T]; E(A(t)) \cap E(B(t)), E(A(t)), E)$$

и имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|u'(t)\| + \|A(t)u(t)\| &\leq c(\|A(0)u_0\| + \|u_1\| + \|f\|_{F_{p,\mu}^\alpha((0, T); E)}), \\ \|u''(t)\| + \|A(t)u'(t)\| + \|B(t)u(t)\| &\leq ct^{-1}(\|A(0)u_0\| + \|u_1\| + \|f\|_{F_{p,\mu}^\alpha((0, T); E)}), \end{aligned}$$

где $t \in (0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [2] показано, что заменой

$$v_1(t) = A(t)u(t) + u'(t), \quad v_2(t) = u'(t)$$

вопрос о существовании решения задачи (2) из

$$C^1([0, T]; E(A(t)), E) \cap C^2([0, T]; E(A(t)) \cap E(B(t)), E(A(t)), E)$$

сводится к вопросу о существовании решения из

$$C([0, T]; E \times E) \cap C^1([0, T]; E(B(t)A^{-1}(t)) \cap E(A(t)), E \times E)$$

задачи

$$\begin{cases} v'(t) = \mathfrak{U}(t)v(t) + \mathcal{B}(t)v(t) + F(t), & 0 < t \leq T, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(t) &= \begin{pmatrix} -B(t)A^{-1}(t) & 0 \\ -B(t)A^{-1}(t) & -A(t) \end{pmatrix}, & v(t) &= \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}, \\ v_0 &= \begin{pmatrix} A(0)u_0 + u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, & F(t) &= \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}(t) &= \begin{pmatrix} [A'(t) - B_1(t)]A^{-1}(t) & -A_1(t) + [-A'(t) + B(t) + B_1(t)]A^{-1}(t) \\ -B_1(t)A^{-1}(t) & -A_1(t) + [B(t) + B_1(t)]A^{-1}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Систему (6) будем рассматривать как одно уравнение в пространстве $E \times E$ с нормой $\|v\| = \|v_1\| + \|v_2\|$, и для этого уравнения будет проверено выполнение условий теоремы 1.

Областью определения оператора $\mathfrak{U}(t)$ будет

$$D(\mathfrak{U}(t)) = D(B(t)A^{-1}(t)) \times D(A(t))$$

и ясно, что $D(\mathfrak{U}(t)) \subset D(\mathcal{B}(t))$.

Нетрудно проверить, что для оператора $\mathfrak{U}(t)$ резольвента $R(\lambda, \mathfrak{U}(t))$ определяется формулой

$$R(\lambda, \mathfrak{U}(t)) = \begin{pmatrix} R(\lambda, -B(t)A^{-1}(t)) & 0 \\ R(\lambda, -A(t))B(t)A^{-1}(t)R(\lambda, -B(t)A^{-1}(t)) & R(\lambda, -A(t)) \end{pmatrix}.$$

Так как из

$$(-B(t)A^{-1}(t) - \lambda I)R(\lambda, -B(t)A^{-1}(t)) = I$$

следует

$$\|B(t)A^{-1}(t)R(\lambda, B(t)A^{-1}(t))\| \leq c|\lambda|^{1-\beta_2}, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \eta, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

то

$$\|R(\lambda, \mathfrak{U}(t))\| \leq c|\lambda|^{-(\beta_1+\beta_2-1)}, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \eta, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

т.е. оператор $\mathfrak{U}(t)$ удовлетворяет условию 1° теоремы 1, с $\beta = \beta_1 + \beta_2 - 1$.

Так как при любом $v \in D(B(t)A^{-1}(t))$ имеем $u = A^{-1}(t)v \in D(A(t)) \cap D(B(t))$, то из условия 4 при любом $\varepsilon > 0$ следует

$$\begin{aligned} \|B_1(t)A^{-1}(t)v\| &\leq \varepsilon(\|v\| + \|B(t)A^{-1}(t)v\|)^{\beta_1+\beta_2-1} \|A^{-1}(t)v\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|A^{-1}(t)v\| \\ &\leq \varepsilon\|B(t)A^{-1}(t)v\|^{\beta_1+\beta_2-1} \|v\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|v\|. \end{aligned} \quad (7)$$

При любом $\varepsilon > 0$, $u \in D(A^2(t)) \cap D(B(t))$ следует

$$\|B_1(t)u\| \leq \varepsilon(\|A(t)u\| + \|A^2(t)u\|)^{\beta_1+\beta_2-1} \|u\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|u\|.$$

Отсюда в свою очередь для любого $\varepsilon > 0$, $v \in D(A(t))$ получаем

$$\begin{aligned} \|B_1(t)A^{-1}(t)v\| &\leq \varepsilon(\|A(t)v\| + \|v\|)^{\beta_1+\beta_2-1} \|A^{-1}(t)v\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|A^{-1}(t)v\| \\ &\leq \varepsilon\|A(t)v\|^{\beta_1+\beta_2-1} \|v\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|v\|. \end{aligned} \quad (8)$$

Из условия 2 для любого $\varepsilon > 0$, $v \in D(A(t))$ имеем

$$\begin{aligned} \|B(t)A^{-1}(t)v\| &\leq \varepsilon\|A(t)v\|^{\beta_1+\beta_2-1} \|A^{-1}(t)v\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|A^{-1}(t)v\| \\ &\leq \varepsilon\|A(t)v\|^{\beta_1+\beta_2-1} \|v\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|v\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Из условий 2, 3 и неравенств (7)–(9) при любом $\varepsilon > 0$, $v = (v_1, v_2) \in D(\mathfrak{U}(t)) = D(B(t)A^{-1}(t)) \times D(A(t))$ следует

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(t)v\| &\leq c(\|A'(t)A^{-1}(t)(v_1 - v_2)\| + \|B_1(t)A^{-1}(t)v_1\| \\ &\quad + \|A_1(t)v_2\| + \|(B(t) + B_1(t))A^{-1}(t)v_2\|) \\ &\leq \varepsilon[(\|v_1\|^{\beta_1+\beta_2-1} + \|B(t)A^{-1}(t)v_1\|^{\beta_1+\beta_2-1})\|A^{-1}(t)v_1\|^{2-\beta_1-\beta_2} \\ &\quad + \|A(t)v_2\|^{\beta_1+\beta_2-1}\|v_2\|^{2-\beta_1-\beta_2} + \|A(t)v_2\|^{\beta_1+\beta_2-1}\|A^{-1}(t)v_2\|^{2-\beta_1-\beta_2} \\ &\quad + (\|v_2\|^{\beta_1+\beta_2-1} + \|B(t)A^{-1}(t)v_2\|^{\beta_1+\beta_2-1})\|A^{-1}(t)v_2\|^{2-\beta_1-\beta_2}] \\ &\quad + c(\varepsilon)(\|A^{-1}(t)v_1\| + \|v_2\| + \|A^{-1}(t)v_2\|) \\ &\leq \varepsilon\|\mathfrak{U}(t)v\|^{\beta_1+\beta_2-1} \|v\|^{2-\beta_1-\beta_2} + c(\varepsilon)\|v\|, \end{aligned}$$

т.е. оператор $\mathcal{B}(t)$ удовлетворяет условию 2° теоремы 1.

Исследуем теперь гладкость операторов $\mathfrak{U}(t)$ и $\mathcal{B}(t)$ по t . В силу условия 6 при $v = (v_1, v_2) \in D(U(t)) = D(B(t)A^{-1}(t)) \times D(A(t))$ и при всех $0 \leq s \leq \tau$, $t \leq T$ имеем

$$\begin{aligned} \|[\mathfrak{U}(t) - \mathfrak{U}(\tau)]v\| &\leq c(\|[B(t)A^{-1}(t) - B(\tau)A^{-1}(\tau)]v_1\| + \|[A(t) - A(\tau)]v_2\|) \\ &\leq c\omega(|t - \tau|)(\|B(s)A^{-1}(s)v_1\| + \|v_1\|) + c|t - \tau|\|A(s)v_2\| \\ &\leq c\omega(|t - \tau|)(\|\mathfrak{U}(s)v\| + \|v\|), \end{aligned}$$

а в силу условий 2–6 при $v = (v_1, v_2) \in D(\mathfrak{U}(t)) = D(B(\tau)A^{-1}(\tau)) \times D(A(\tau))$ имеем

$$\begin{aligned} \|[\mathcal{B}(t) - \mathcal{B}(\tau)]v\| &\leq c(\|[A'(t)A^{-1}(t) - A'(\tau)A^{-1}(\tau)](v_1 - v_2)\| \\ &\quad + \|[B_1(t)A^{-1}(t) - B_1(\tau)A^{-1}(\tau)](v_1 - v_2)\| \\ &\quad + \|[A_1(t) - A_1(\tau)]v_2\| + \|[B(t)A^{-1}(t) - B(\tau)A^{-1}(\tau)]v_2\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(\| [A'(t) - A'(\tau)]A^{-1}(\tau)(v_1 - v_2) \| + \| A'(t)[A^{-1}(t) - A^{-1}(\tau)](v_1 - v_2) \| \\
&\quad + \| [B_1(t)A^{-1}(t) - B_1(\tau)A^{-1}(\tau)](v_1 - v_2) \| \\
&\quad + \| [A_1(t) - A_1(\tau)]v_2 \| + (\| [B(t)A^{-1}(t) - B(\tau)A^{-1}(\tau)]v_2 \|)) \\
&\leq c(\omega(|t - \tau|)\|v_1 - v_2\| + \|A'(t)A^{-1}(\tau)\| \|A'(\tau)[A^{-1}(t) - A^{-1}(\tau)](v_1 - v_2)\| \\
&\quad + \omega(|t - \tau|)(\|B(\tau)A^{-1}(\tau)(v_1 - v_2)\| + \|v_1 - v_2\|) \\
&\quad + \omega(|t - \tau|)\|A(\tau)v_2\| + \omega(|t - \tau|)(\|B(\tau)A^{-1}(\tau)v_2\| + \|v_2\|)) \\
&\leq c\omega(|t - \tau|)(\|B(\tau)A^{-1}(\tau)v_1\| + \|B(\tau)A^{-1}(\tau)v_2\| + \|v_1\| + \|A(\tau)v_2\|) \\
&\leq c\omega(|t - \tau|)(\|B(\tau)A^{-1}(\tau)v_1\| + \|A(\tau)v_2\| + \|v_1\| + \|v_2\|) \\
&\leq c\omega(|t - \tau|)(\|\mathfrak{U}(\tau)v\| + \|v\|),
\end{aligned}$$

т.е. операторы $\mathfrak{U}(t)$ и $\mathfrak{B}(t)$ удовлетворяют также условию 2° и 4° теоремы 1. Из условий 7, 8 следует, что $F(t)$ удовлетворяет условию 6, а ϑ_0 удовлетворяет условию 7° теоремы 1. Итак, к задаче (2) применима теорема 1, откуда следует, что задача (2) имеет единственное решение из $C([0, T]; E \times E) \cap C^1([0, T]; E(B(t)A^{-1}(t)), E \times E)$ и имеют место оценки

$$\begin{aligned}
\|\vartheta(t)\| &\leq c(\|\mathfrak{U}(0)v_0\| + \|v_0\| + \|F\|_{F_{p,\mu}^\alpha((0,T);E \times E)}), \quad t \in (0, T], \\
\|v'(t)\| + \|\mathfrak{U}(t)\vartheta(t)\| &\leq ct^{-1}(\|\mathfrak{U}(0)v_0\| + \|F\|_{F_{p,\mu}^\alpha((0,T);E \times E)}), \quad t \in (0, T].
\end{aligned}$$

Отсюда, используя обратную замену

$$u(t) = A^{-1}(t)(v_1(t) - v_2(t)), \quad u'(t) = v_2(t),$$

легко получить утверждение теоремы 2. Теорема доказана.

В случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$ и области определения операторов $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$, $B_1(t)$ – всюду плотные в E множества, а $\beta = 1$, теорема 2 совпадает с теоремой Якубова [2; с. 143]. Таким образом, если $\beta \in (1/2, 1)$, то и в этом случае полученные здесь результаты являются новыми. Это отличает данную теорему от соответствующего результата [2].

Задача (2) при $\omega(t) = t^\alpha$, $A_1(t) = B_1(t) = 0$ без использования свойств резольвенты операторов исследована в работе Сильченко [9]. Однако, в отличие от работ [1], [9] нами также не предполагается оценка

$$\|A^{-1}(s)[A(t) - A(\tau)]\| \leq c|t - \tau|^\alpha \|u\|, \quad u \in D(A(t)),$$

которая является условием гладкости на сопряженный оператор $A^*(t)$.

Отметим, что во всех перечисленных работах предполагалось, что оператор-функции равномерно непрерывны по Гёльдеру в равномерной операторной топологии. В отличие от этих работ здесь налагается новое слабое условие гладкости оператор-функции. Это отличает данную теорему от известных результатов.

4. Примеры. В этом пункте приведены примеры применения теоремы 2.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим начально-краевую задачу с нелокальными краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - a_0(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x^2} + a_1(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a_0(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + a_1(t, x) u(t, x) \\
&= f(t, x),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{cases} L_1 u = \int_0^1 \varphi_1(x) u(t, x) dx = 0, \\ L_2 u = \int_0^1 \varphi_2(x) u(t, x) dx = 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u_t(0, x) = \varphi_2(x). \quad (12)$$

Будем изучать эту задачу в пространстве $L_2(0, 1)$ и искать ее классическое решение.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\|a_k(t, x) - a_k(\tau, x)\|_{L_2(0,1)} \leq c |\log |t - \tau||^\alpha, \quad k = 0, 1,$$

$$\|f(t, x) - f(\tau, x)\|_{L_2(0,1)} \leq ct^{-\mu} |\log |t - \tau||^\delta,$$

где $\alpha < -2$, $\delta < -2$, $\mu \in [0, 1/2)$.

Введем оператор $A(t): L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$, определенный по формуле

$$D(A(t)) = \{u \in W_2^2(0, 1) : L_j u = 0, j = 1, 2\},$$

$$A(t)u = -a_0(t, x)u''(x) + a_1(t, x)u(x).$$

Будем предполагать дополнительно

$$a_0(t, x) > M > 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial u_0(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(t, 1)}{\partial x} = 0, \quad a_1(\cdot, x) \in C[0, 1],$$

$$\Delta_4 = \varphi_1(0)\varphi_2(1) - \varphi_2(0)\varphi_1(1) \neq 0,$$

$\varphi_j \in C[0, 1]$, $j = 1, 2$, — линейно независимые функции.

Тогда $D(A(t))$ не является плотным в $L_2(0, 1)$ множеством и имеем $\|R(\lambda, A(t))\| \leq C|\lambda|^{-3/4}$ (см. [11]).

В этом случае задача (10)–(12) сведется к абстрактной задаче Коши

$$\begin{cases} u''(t) + A(t)u'(t) + A(t)u(t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \end{cases}$$

в функциональном пространстве $L_2(0, 1)$.

Применяя теперь к этой задаче теорему 2 в случае, когда $B(t) = A(t)$, $A_1(t) = B_1(t) = 0$, получим ее разрешимость в классе классических решений, если $u_0(x)$, $u_1(x) \in D(A(0))$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} + a_1(t, x) u(t, x) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[b(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + b_1(t, x) u(t, x) \right] = 0, \quad t \in [0, 1], \quad x \in [0, 2], \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим через G_1 множество в плоскости переменных (t, x) , ограниченное прямыми $t = 0$, $t = 1$, $x = 0$ и гладкой кривой $x = \psi(t)$ ($\psi(0) = x_0$, $x_0 \in (0, 2]$, $\psi(1) = 2$),

а через G_2 – множество, ограниченное прямыми $t = 0$, $x = 2$ и кривой $x = \psi(t)$. Поставим задачу о нахождении функции $u = u(t, x)$ в прямоугольнике

$$G_1 \cup G_2 \cup \{(t, x) : x = \psi(t), t = (0, 1)\},$$

которая на G_2 равна нулю, а на части границы G_1 удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x), & u'_t(0, x) &= u_1(x), & x &\in [0, x_0], \\ u_0(x) &= 0, & u_1(x) &= 0, & x &\in (x_0, 2], \end{aligned} \quad (14)$$

и краевым условиям

$$u(t, 0) = u(t, \psi(t)) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (15)$$

Будем исследовать эту задачу в пространстве $L_2(0, 2) = L_2$ и искать ее обобщенное решение. Для этого умножим (1) на бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ с носителем на отрезке $[0, 2]$ ($\varphi \in C^\infty$) и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 2. Далее, проводя интегрирование по частям во втором и третьем слагаемых, получим соотношение

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi \right) + \left(a(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a_1(t, x) u, \varphi' \right) + \left[b(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + b_1(t, x) u, \varphi' \right] = 0$$

((φ, f) – скалярное произведение в L_2), которое и определяет обобщенное решение задачи (13), (14).

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функция $a(t, x)$ непрерывно дифференцируема по t на $[0, 1]$ при всех $x \in [0, 2]$ и при некотором $\alpha < -2$ выполнена оценка

$$\|a_t^1(t, x) - a'_t(\tau, x)\|_{L_2(0, 2)} \leq C |\log |t - \tau||^\alpha;$$

- 2) имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|a_1(t, x) - a_1(\tau, x)\|_{L_2(0, 2)} &\leq C |\log |t - \tau||^\alpha, \\ \|b_k(t, x) - b_k(\tau, x)\|_{L_2(0, 2)} &\leq C |\log |t - \tau||^\alpha \end{aligned}$$

и $a(t, x) > C > 0$ при $t \in [0, 1]$, $x \in [0, 2]$.

В пространстве $L_2[0, 1]$ определим операторы $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$ и $B_1(t)$ следующим образом:

$$D(A(t)) = \{u(x) \in W_2^1(0, 2), u(0) = u(\psi(t)) = 0, u(x) = 0 \text{ для } x \in [\psi(t), 2], t \in [0, 1]\}.$$

На этом множестве определим оператор $A(t)$, действующий по правилу

$$(A(t)u, \varphi) = - \left(a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi' \right),$$

для любой функции $\varphi \in \dot{C}^\infty$. Далее

$$D(B(t)) = D(A(t)), \quad (B(t)u, \varphi) = - \left(b(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi' \right),$$

$$D(A_1(t)) = D(A(t)), \quad (A_1(t)u, \varphi) = \left(a_1(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi \right),$$

$$D(B_1(t)) = D(A(t)), \quad (B_1(t)u, \varphi) = - \left(b_1(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi \right)$$

для любой функции $\varphi \in \dot{C}^\infty$. Тогда задача (1)–(3) в пространстве $L_2(0, 1)$ сводится к абстрактной задаче Коши

$$u''(t) + (A(t) + A_1(t))u'(t) + (B(t) + B_1(t))u = 0,$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

Отметим, что здесь $D(A(t))$ не является плотным в L_2 множеством и $D(A(\tau)) \subset D(A(t))$ при $\tau \leq t$; кроме того, функции $a'(t, x)$, $a_1(t, x)$, $b(t, x)$ и $b_1(t, x)$ удовлетворяют слабому условию непрерывности (непрерывность по Гёльдеру не требуется). Применяя теперь к этой задаче теорему 2, получим ее разрешимость в классе обобщенных решений, если $u_0, u_1(x) \in D(A(0))$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим в прямоугольнике $[0, T] \times [0, 1]$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + (-1)^k a(t, x) \frac{\partial^{2k+1} u(t, x)}{\partial t \partial x^{2k}} + (-1)^{m+k} b \frac{\partial^{2m+2k} u(t, x)}{\partial x^{2m+2k}} = f(t, x) \quad (16)$$

с краевыми условиями

$$L_\nu u = \frac{\partial^{\nu-1} u(t, 0)}{\partial x^{\nu-1}} = 0, \quad \nu = 1, \dots, k, \quad (17)$$

$$L_{\nu+k} u = \frac{\partial^{\nu-1} u(t, 1)}{\partial x^{\nu-1}} = 0, \quad \nu = 1, \dots, k, \quad (18)$$

$$L_s u = \frac{\partial^s u(t, 0)}{\partial x^s} = 0, \quad s = k+r, \dots, k+r+m-1, \quad 0 \leq r \leq k, \quad (19)$$

$$L_s u = \frac{\partial^s u(t, 1)}{\partial x^s} = 0, \quad s = k+r, \dots, k+r+m-1, \quad 0 \leq r \leq k, \quad (20)$$

и начальными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u'_t(0, x) = u_1(x).$$

Введем в пространстве $L_p(0, 1)$ операторы

$$A(t)u = (-1)^k a(t, x) \frac{d^{2k} u}{dx^{2k}}$$

с областью определения

$$D(A(t)) = W_p^{2k}((0, 1); L_\nu u = 0, \nu = 1, \dots, 2k)$$

и операторы

$$B(t)u = (-1)^{k+m} b(t, x) \frac{d^{2k+2m} u}{dx^{2k+2m}}$$

с областью определения

$$D(B(t)) = W_p^{2k+2m}((0, 1); L_\nu u = 0, \nu = 1, \dots, 2k; L_s u = 0, s = k+r, \dots, k+r+2m-1).$$

В силу теоремы 1.3 из [2; с. 27] оператор $A(t)$ с регулярными краевыми условиями (17), (18) удовлетворяет условию 1 теоремы 2 с $\beta = 1$. Далее, рассмотрим оператор

$$B(t)A(t) = (-1)^m \frac{b(t, x)}{a(t, x)} \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}.$$

Если $r = k$, то для $B(t)A^{-1}(t)$ получим краевые условия Дирихле. Если же $r < k$, то для области определения оператора $B(t)A^{-1}(t)$ получим следующие интегральные условия:

$$\begin{aligned} D(B(t)A^{-1}(t)) \\ = \left\{ u(x) \in W_p^{2m}(0, 1); u(0) = u(1) = \dots = u^{(m-k-1)}(0) = u^{(m-k-1)}(1) = 0, \right. \\ \left. \int_0^1 u(x) dx = \int_0^1 xu(x) dx = \dots = \int_0^1 xu(x) dx = \dots = \int_0^1 x^{2m-1}u(x) dx = 0 \right\} \end{aligned}$$

при $1 \leq k < m$, и условия

$$\int_0^1 (1-x)^k x^{k-q-1} u(x) dx = \int_0^1 x^k (1-x)^{k-q-1} u(x) dx = 0, \quad q = 0, 1, \dots, m-1,$$

при $k \geq m \geq 1$.

Заметим, что области определения операторов $A(t)$, $B(t)A^{-1}(t)$ не являются плотными множествами в L_p . Для резольвенты оператора $B(t)A^{-1}(t)$ получим оценку (см. [11]):

$$\|R(\lambda, -B(t)A^{-1}(t))\| \leq C|\lambda|^{-\beta_2}, \quad |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \eta, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

где $\beta_2 = 1 - (k-r)p - 1/(2mp)$; если $(k-r-m)p < 1$, то $\beta_2 \in (1/2, 1]$ и выполняется условие 1 теоремы 2. Пусть $k \geq m$. В этом случае получаем, что оператор $B(t)A^{-2}(t)$ ограничен и поэтому выполняется и условие 2 теоремы 2.

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $k \geq m$, $(k-m-r)p < 1$, $p \geq 1$;
- 2) функция $a(t, x)$ непрерывно дифференцируема по t и выполнено условие

$$\begin{aligned} \|a'_t(t, \cdot) - a'_t(\tau, \cdot)\|_{L_p} &\leq C(\log |t - \tau|)^\alpha, \\ b(t, \cdot) &\in C[0, 1], \quad a(t, x) \neq 0, \quad b(t, x) \neq 0; \end{aligned}$$

- 3) $\|f(t, \cdot) - f(\tau, \cdot)\|_{L_p} \leq C(\log |t - \tau|)^\alpha$;
- 4) $u_0 \in D(B(0))$, $u_1(x) \in D(A(0))$.

Тогда задача (16)–(20) имеет единственное решение $u(t, x)$, для которого производные $\partial u / \partial t$, $\partial^{2k} u / \partial x^{2k}$ непрерывны при $t \geq 0$ по норме пространства L_p , а функции $\partial^2 u / \partial t^2$, $\partial^{2k+1} u / (\partial t \partial x^{2k})$, $\partial^{2k+2m} u / \partial x^{2k+2m}$ непрерывны при $t > 0$ по норме пространства L_p .

ПРИМЕР 4. Теперь рассмотрим начально краевые задачи с нерегулярными граничными условиями. Рассмотрим в прямоугольнике $[0, T] \times [0, 1]$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + a(t) \frac{\partial^{2m+1} u(t, x)}{\partial t \partial x^{2m}} + A_0(t) \frac{\partial u(t, \cdot)}{\partial t} \Big|_x + b(t) \frac{\partial^{2m} u(t, x)}{\partial x^{2m}} + B_0(t) u(t, \cdot) \Big|_x$$

$$+ \sum_{k=0}^{2m-1} a_k(t, x) \frac{\partial^{k+1} u(t, x)}{\partial t \partial x^k} + \sum_{k=0}^{2m-1} b_k(t, x) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} = f(t, x), \quad (21)$$

с краевыми условиями

$$L_i u = \alpha_i u^{(n_i)}(t, 0) + \beta_i u^{(n_i)}(t, 1) + T_i u(t, \cdot) = 0, \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, 2m-1, \quad 0 \leq r \leq 2m.$$

$$L_i u = \int_0^1 \varphi_i(x) u(t, x) dx = 0, \quad i = 2m-r+1, \dots, 2m. \quad (23)$$

Здесь $a(t), b(t), a_i(t, x), b_i(t, x)$, $i = 0, 1, \dots, 2m-1$, — непрерывные функции на прямоугольнике $[0, T] \times [0, 1]$, α_i, β_i — комплексные числа, $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, 2m-r$, n_i — целые числа, $0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_i \leq n_{i+1} \leq \dots \leq 2m-1$, T_i — линейные непрерывные функционалы, принадлежащие $W_p^{n_i-1}(0, 1)$ при некотором $p \in [1, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, 2m-r$, и наконец, $\{\varphi_k(x)\}$ — некоторая заданная на $[0, 1]$ система непрерывных и независимых функций, $k = 1, 2$.

Пусть выполнены следующие условия.

1. Имеет место оценка $|\arg a(t)| < \pi/2$, если m — четное; $|\arg a(t)| > \pi/2$, если m — нечетное; $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0, t \in [0, T]$;
2. Имеет место оценка $|\arg b(t) - \arg a(t)| < \pi/2$.
3. Функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывно дифференцируемы по t ; функции $a_k(t, x)$ и $b_k(t, x)$, $k = 0, 1, \dots, 2m-1$, непрерывны по x и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \|a'_t(t, \cdot) - a'_t(\tau, \cdot)\|_{L_p(0,1)} &\leq C |\log |t - \tau||^\alpha, \\ \|a_k(t, \cdot) - a_k(\tau, \cdot)\|_{L_p(0,1)} &\leq C |\log |t - \tau||^\alpha, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1, \\ \|b_k(t, \cdot) - b_k(\tau, \cdot)\|_{L_p(0,1)} &\leq C |\log |t - \tau||^\alpha, \quad k = 0, 1, \dots, 2m, \\ \|f(t, \cdot) - f(\tau, \cdot)\|_{L_p(0,1)} &\leq C |\log |t - \tau||^\alpha; \end{aligned}$$

4. Обозначим через

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \exp\left(i \frac{\pi}{m}\right), \quad \dots, \quad \exp\left(i \frac{\pi(2m-1)}{m}\right)$$

все корни $(2m)$ -й степени из 1. Введем обозначение

$$e_j(x, p) = \begin{cases} \exp(\rho \omega_j x), & j = 1, 2, \dots, m, \\ \exp(\rho \omega_j (x-1)), & j = m+1, \dots, 2m. \end{cases}$$

Предположим, что для системы функций $\{\varphi_k(x)\}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_k(x) \exp[\rho \omega_j (x-y)] dx &= -\frac{\varphi_k(y)}{\rho \omega_j} + \rho^{-1} \alpha_{kj}(y, \rho), \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \int_0^1 \varphi_k(x) \exp[\rho \omega_j (x-y)] dx &= \frac{\varphi_k(y)}{\rho \omega_j} + \rho^{-1} \alpha_{kj}(y, \rho), \quad j = m+1, \dots, 2m, \\ \int_0^1 \varphi_k(x) e_j(x, \rho) dx &= [C_{kj} + \alpha_{kj}(\rho)] \rho^{-l_k}, \quad j = 1, 2, \dots, 2m, \end{aligned}$$

где $\alpha_{kj}(\rho)$, $\alpha_{kj}(y, \rho)$ – непрерывные функции, причем $|\alpha_{kj}(\rho)| \leq C|\rho|^{-1}$, $|\alpha_{kj}(y, \rho)| \leq C$ и $\alpha_{kj}(y, \rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. Эти условия выполнены, например, для гладких функций $\varphi_k(x)$. Введем определитель

$$\theta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{n_1} & \dots & \alpha_1 \omega_m^{n_1} & \beta_1 \omega_{m+1}^{n_1} & \dots & \beta_1 \omega_{2m}^{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2m-r} \omega_1^{n_{2m-r}} & \dots & \alpha_{2m-r} \omega_m^{n_{2m-r}} & \beta_{2m-r} \omega_{m+1}^{n_{2m-r}} & \dots & \beta_{2m-r} \omega_{2m}^{n_{2m-r}} \\ C_{11} & \dots & C_{1m} & C_{1\ m+1} & \dots & C_{1\ 2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{r1} & \dots & C_{rm} & C_{rm+1} & \dots & C_{r\ 2m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

5. Число l , определяемое граничными условиями, удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{p} \leq l \leq \frac{1}{p} + 2m, \quad \text{где } l = \max\{l_1, l_2, \dots, l_r\}.$$

6. T_i , $i = 1, 2, \dots, 2m - r$, – линейные непрерывные функционалы в $W_p^{n_i-1}(0, 1)$ при некотором $p < \infty$.

7. При любом $\varepsilon > 0$ и $t \in [0, T]$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} \|A_1(t)u\|_{L_p(0,1)} &\leq \varepsilon \|u\|_{W_p^{2m}(0,1)} + C(\varepsilon) \|u\|_{L_p(0,1)}, & u \in W_p^{2m}(0,1), \\ \|B_1(t)u\|_{L_p(0,1)} &\leq \varepsilon \|u\|_{W_p^{2m}(0,1)} + C(\varepsilon) \|u\|_{L_p(0,1)}, & u \in W_p^{2m}(0,1). \end{aligned}$$

8. Функции $u_0, u_1 \in W_p^{2m}((0, 1); L_i u = 0, i = 1, 2, \dots, 2m)$.

Тогда задача (21)–(23) имеет единственное решение

$$u \in C^1([0, T]; W_p^{2m}(0, 1), L_p(0, 1)) \cap C^2((0, T]; W_p^{2m}(0, 1), L_p(0, 1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы свести задачу (21)–(23) к задаче Коши для дифференциально-операторных уравнений введем в $L_p(0, 1)$ операторы $A(t)$, $B(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t)$ равенствами

$$\begin{aligned} D(A(t)) &= W_p^{2m}((0, 1); L_i u = 0, i = 1, 2, \dots, 2m), \\ A(t)u &= a(t)u^{(2m)}(x) + a_{2m-1}(t, x)u^{(2m-1)}(x) + \dots + a_0(t, x)u(x) + \omega u(t), \\ D(B(t)) &= W_p^{2m}((0, 1); L_i u = 0, i = 1, 2, \dots, 2m), \\ B(t)u &= b(t)u^{(2m)}(x) + b_{2m-1}(t, x)u^{(2m-1)}(x) + \dots + b_0(t, x)u(x), \\ D(A_1(t)) &= D(A(t)), \quad A_1(t)u = A_0(t)u(x) - \omega u(x), \quad D(B_0(t)) = D(B(t)). \end{aligned}$$

Тогда задачу (21)–(23) в пространстве $L_p(0, 1)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} u''(t) + (A(t) + A_1(t))u'(t) + (B(t) + B_1(t))u(t) &= f(t), \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{aligned} \tag{24}$$

Из условий 1, 4 и 5 в силу теоремы 1 [11], следует, что оператор $A(t)$ при некотором ω удовлетворяют условию 1 теоремы 2. В силу теоремы 1 [11] существует число R такое, что все комплексные числа λ , для которых $\operatorname{Re}[\lambda - \omega a(t)] \geq R$, являются регулярными значениями оператора $A(t)$. Отсюда следует, что ω должно быть

выбрано следующим образом: если m – четное, то $\omega < -R/\operatorname{Re} a(t)$; если же m – нечетное, то $\omega > -R/\operatorname{Re} a(t)$.

Таким образом, имеем

$$\|R(\lambda, -A(t))\| \leq C|\lambda|^{-1-1/(2mp)+l/(2m)}, \quad |\arg \lambda| < \pi - \varepsilon, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

где $l = \max\{l_1, l_2, \dots, l_r\}$, т.е. $\beta_1 = 1 + 1/(2mp) - l/(2m)$.

Оператор $B(t)A^{-1}(t)$ ограничен, откуда следует, что оператор $B(t)A^{-1}(t)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2.

Если граничные условия (22) регулярны, т.е. $r = 0$, то в этом случае для резольвенты оператора $A(t)$ имеет место оценка

$$\|R(\lambda, -A(t))\| \leq C|\lambda|^{-1}, \quad |\arg \lambda| < \pi - \varepsilon, \quad |\lambda| \geq R_\varepsilon > 0.$$

Проводя далее выкладки, аналогичные [2; гл. V, § 3, с. 179], проверяем все условия теоремы 2 для задачи (24), откуда следует разрешимость задачи (21)–(23).

Приведем пример граничных условий, для которых $\theta \neq 0$ [11].

Пусть условия (2) имеют вид

$$L_i u = u^{(i-1)}(0) + u^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2m - 2r,$$

а условия (3) задаются системой функций

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2x - 1, \quad \varphi_2(x) = x(1 - x), \quad \varphi_3(x) = (2x - 1)x^2(1 - x)^2, \quad \dots, \\ \varphi_{2r-1}(x) &= (2x - 1)x^{2r-2}(1 - x)^{2r-2}, \quad \varphi_{2r}(x) = x^{2k-1}(1 - x)^{2r-1}. \end{aligned}$$

Для этих функций

$$\int_0^1 \varphi_k(x) e_j(x, \rho) dx = [(k-1)! + o(\rho^{-1})](\rho \omega_j)^{-k}.$$

Поэтому определитель θ является определителем Вандермонда и отличен от нуля.

Особенностью задачи (21)–(23) является то, что области определения $D(A(t))$, $D(A_1(t))$, $D(B(t))$, $D(B_1(t))$ операторов $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$, $B_1(t)$ не являются плотными в пространстве $L_p(0, 1)$ множествами из-за наличия условий (22) и резольвента оператора $A(t)$ не имеет максимального убывания при $\lambda \rightarrow \infty$.

Граничные условия (22) при $r = 0$ называются *регулярными* [2; с. 17], если $\theta \neq 0$. Здесь задача рассматривается и при $r > 0$, когда граничные условия не являются регулярными.

Отметим, что задача (21)–(23) исследована при $r = 0$ [2] в случае регулярных граничных условий, с гёльдеровыми непрерывными коэффициентами. Даже в этом случае полученные здесь результаты являются новыми, так как здесь не требуется гёльдерова непрерывность коэффициентов задачи (21)–(23).

В случае $r > 0$ задача исследуется впервые, и в случае $\omega(r) = r^\alpha$ полученные результаты являются новыми.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность рецензенту за важные замечания и пожелания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.
- [2] С. Я. Якубов, *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения*, Элм, Баку, 1985.
- [3] П. Е. Соболевский, “Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве”, *Тр. ММО*, **10**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1961, 297–350.
- [4] Н. Tanabe, “On the equations of evolution in a Banach space”, *Osaka Math. J.*, **12**:2 (1960), 363–376.
- [5] A. Yagi, “Parabolic evolution equations in which the coefficients are generators of infinity differentiable semigroups”, *Funkcial. Ekvac.*, **32**:1 (1989), 107–124; “Parabolic evolution equations in which the coefficients are generators of infinity differentiable semigroups. II”, *Funkcial. Ekvac.*, **33**:1 (1990), 139–150.
- [6] Ю. Т. Сильченко, П. Е. Соболевский, “Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотным заданным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью”, *Сиб. матем. журн.*, **27**:4 (1986), 93–104.
- [7] Ю. Т. Сильченко, “Эволюционные уравнения с неплотным заданным операторным коэффициентом”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:2 (1993), 166–169.
- [8] S. Kawatsu, “Cauchy problem for abstract evolution equations of parabolic type”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **30**:1 (1990), 59–91.
- [9] Ю. Т. Сильченко, “О задаче Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными операторными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **60**:1 (1996), 149–152.
- [10] М. К. Балаев, “Об эволюционных уравнениях с переменными операторными коэффициентами”, *Докл. АН Азербайджана*, **55**:1-2 (1999), 44–50.
- [11] Ю. Т. Сильченко, “Об оценке резольвенты дифференциального оператора второго порядка с нерегулярными граничными условиями”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 2, 65–68.

М. К. Балаев

Институт математики и механики НАН Азербайджана

E-mail: m-balayev@yahoo.com

Поступило

09.07.2007

Исправленный вариант

15.10.2010