Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Лаптев, Об отсутствии решений эллиптических дифференциальных неравенств в конических областях, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 855–866

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:54:26

УДК 517.9

ОБ ОТСУТСТВИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Г. Г. Лаптев

Исследуются вопросы отсутствия решений полулинейных эллиптических дифференциальных неравенств и систем второго порядка в конических областях. Доказательство основано на разработанном Митидиери и Похожаевым методе пробных функций без использования теорем сравнения и принципа максимума.

Библиография: 24 названия.

Введение. Статья посвящена нахождению условий отсутствия нетривиальных глобальных решений полулинейных дифференциальных неравенств эллиптического типа в конических областях.

Теория линейных краевых задач в конических областях ведет свой отсчет с классической работы Кондратьева [1]. Современное состояние исследований можно найти в книге Назарова и Пламеневского [2] (см. также литературу там). Изучение полулинейных и нелинейных уравнений проводится в основном на основе известных утверждений для соответствующих линейных задач. При этом получают достаточно тонкие оценки на рост решений [3]–[6]. Следствием этих оценок является, в частности, отсутствие нетривиального решения при некоторых дополнительных условиях.

В настоящей работе для доказательства отсутствия решения применяется теория нелинейной емкости (Похожаев [7]) в виде метода пробных функций, разработанного для эллиптических задач во всем пространстве в статьях Митидиери и Похожаева [8], [9] (см. также работы Курты [10]–[12]).

Отметим, что метод не использует каких-либо сведений из линейной теории и позволяет изучать также разнообразные типы эволюционных (параболических и гиперболических) задач. Заинтересованный читатель может найти соответствующие утверждения в книге Митидиери и Похожаева [13].

Пусть K_ω – область на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, с достаточно гладкой границей ∂K_ω . *Конусом* K называется множество

$$K = \{x = x(r, \omega) : 0 < r < +\infty, \omega \in K_\omega\},$$

где (r, ω) – сферические координаты точки x в $\mathbb{R}^N$. Боковую поверхность конуса обозначаем ∂K . Под *конической областью* K_R понимается область $\{x \in K : |x| > R\}$ с полной границей ∂K_R .

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 00-136, программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96047, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00884.

Пусть Ω – неограниченная область с кусочно-гладкой границей. Далее используются пространства Соболева $W_q^1(\Omega)$, $W_q^2(\Omega)$, а также локальное пространство $L_{q,\text{loc}}(\Omega)$, элементы которого принадлежат $L_q(\Omega')$ для любого компактного подмножества Ω' такого, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Через $C(\overline{\Omega})$ обозначается пространство непрерывных функций, через $C^m(\overline{\Omega})$ – пространство гладких функций. Символ Δ обозначает оператор Лапласа, $\text{div} = \sum_{i=1}^N \partial/\partial x_i$, вектор из частных производных обозначаем $Du = (\partial u/\partial x_i)$. Для двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $\varphi(x)$ полагаем

$$Du D\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Выражение $\int_{\partial K_R} (\partial u/\partial n) dx$ обозначает интеграл от производной функции u по направлению внешней нормали n к границе конуса ∂K_R . Через c и C с индексами будем обозначать постоянные.

Напомним, что оператор Лапласа Δ в сферических координатах (r, ω) имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega,$$

где Δ_ω – оператор Бельтрами–Лапласа на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

В дальнейшем постоянно используются наименьшее (первое) собственное значение $\lambda_\omega \equiv \lambda_1(K_\omega) > 0$ и соответствующая собственная функция $\Phi(\omega)$ оператора Δ_ω , являющиеся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_\omega \Phi + \lambda \Phi = 0 & \text{в } K_\omega, \\ \Phi|_{\partial K_\omega} = 0. \end{cases}$$

Хорошо известно, что $\Phi(\omega) > 0$ для $\omega \in K_\omega$. Предполагается, что $\Phi(\omega) \leq 1$.

1. Модельная задача. Пусть R – фиксированное число. Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{cases} -\Delta u \geq u^q & \text{в } K_R, \\ u \geq 0, & u \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Данная задача для уравнения впервые рассмотрена в работах Бендл и Эссена [14], Бендл [15] и Эгнелла [3]. С использованием предлагаемого метода задача во всем конусе K изучалась в статье автора [16]; утверждения для общих эволюционных неравенств высокого порядка анонсированы в [17]. В работе Бидо-Верон и Похожаева [18] с использованием метода пробных функций рассмотрены более сложные квазилинейные неравенства (с p -лапласианом в главной части) в полупространстве, однако с использованием теорем сравнения.

Далее слабое решение будет пониматься в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $u(x) \in C(\overline{K_R})$. Неотрицательная функция $u(x)$ называется *слабым решением* задачи (1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x) \in W_\infty^2(K_R)$ такой, что $\varphi|_{\partial K_R} = 0$, и финитной по переменной r , выполнено интегральное неравенство

$$\int_{\partial K_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx - \int_{K_R} u \Delta \varphi dx \geq \int_{K_R} u^q \varphi dx$$

(предполагается, что все входящие в это неравенство интегралы имеют смысл).

Приведем пример решения задачи (1).

Рассмотрим функцию

$$u(r, \omega) = \varepsilon r^s \Phi(\omega),$$

где $\Phi(x)$ – введенная выше собственная функция оператора Бельтрами–Лапласа, $\varepsilon > 0$. Используя выражения для оператора Лапласа в сферических координатах и учитывая, что $-\Delta_\omega \Phi = \lambda_\omega \Phi$, получим

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -\varepsilon \left(s(s-1)r^{s-2}\Phi(\omega) + s\frac{N-1}{r}r^{s-1}\Phi(\omega) + \frac{r^s}{r^2}\Delta_\omega \Phi \right) \\ &= -\varepsilon \Phi r^{s-2} \{s^2 + s(N-2) - \lambda_\omega\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках. Введем обозначения для его корней

$$-s^* = -\frac{N-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega} < 0, \quad s_* = -\frac{N-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega} > 0. \quad (2)$$

Рассматриваемое выражение меньше нуля, если

$$-s^* < s < s_*.$$

Пусть $s^2 + s(N-2) - \lambda_\omega = -\delta < 0$. Выберем $s-2 = sq$ и $\varepsilon\delta = \varepsilon^q$. Тогда

$$-\varepsilon \Phi r^{s-2}(-\delta) = \varepsilon\delta \Phi r^{sq} = (\varepsilon r^s)^q \Phi.$$

Поскольку мы предполагаем $\Phi \leq 1$, то $\Phi \geq \Phi^q$ и последнее выражение оценивается так:

$$-\Delta u = (\varepsilon r^s)^q \Phi \geq (\varepsilon r^s \Phi)^q = u^q.$$

Заметим, что последнее неравенство получено при двух условиях на параметр s :

$$\begin{cases} -s^* < s < s_*, \\ s-2 = sq, \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} -s^* < -\frac{2}{q-1} < s_*, \\ s = -\frac{2}{q-1}. \end{cases}$$

Поскольку мы интересуемся случаем $q > 1$, то в силу $s_* > 0$ всегда выполнено неравенство $-2/(q-1) < s_*$. Остается только условие

$$-s^* < -\frac{2}{q-1},$$

откуда

$$q > 1 + \frac{2}{s_*} = q^*.$$

Итак, при $q > q^*$ введенная функция $u(x)$ является решением задачи (1).

ТЕОРЕМА 1. При $1 < q \leq q^* = 1 + 2/s^*$ задача (1) не имеет решения.

Как отмечалось выше, в используемом методе главным является подходящий выбор пробных функций. Введем функцию в K_R

$$\xi(x) \equiv \xi(r, \omega) = (r^{s^*} - R^{s^*})\Phi(\omega), \quad (3)$$

где $s^* > 0$ определено формулой (2). Очевидно, $\xi(R, \omega) = 0$, $\partial\xi/\partial r(R, \omega) \geq 0$ и почти всюду в K_R

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r} - \frac{\lambda_\omega\xi}{r^2} = R^{s^*}\frac{\lambda_\omega}{r^2}\Phi(\omega) \geq 0.$$

Пробную функцию будем брать в виде произведения

$$\varphi_\rho(x) = \eta_\rho(x)\xi(x). \quad (4)$$

Здесь $\eta_\rho(x) \equiv \eta_\rho(|x|) = \eta_\rho(r) \in C^2[0, \infty)$ – стандартная срезающая функция такая, что $\eta_\rho(r) = 1$ для $0 \leq r \leq \rho$, $\eta_\rho(r) \equiv 0$ для $r > 2\rho$ и при достаточно больших ρ

$$\frac{\eta_\rho^p}{\eta_\rho^{p-1}} = \eta_\rho \leq c_\eta, \quad \frac{|d\eta_\rho/dr|^p}{\eta_\rho^{p-1}} \leq \frac{c_\eta}{\rho^p}, \quad \frac{|\Delta\eta_\rho|^p}{\eta_\rho^{p-1}} \leq \frac{c_\eta}{\rho^{2p}},$$

где c_η не зависит от ρ . Возможность построения такой функции η_ρ известна из работ [8]–[10].

Очевидны также неравенства (при $\rho \geq 2R$ и $\rho \leq |x| \leq 2\rho$)

$$c_{\xi 0}\Phi(\omega)\rho^{s^*} \leq \xi(r, \omega) \leq c_{\xi 1}\Phi(\omega)\rho^{s^*},$$

$$\left| \frac{\partial\xi}{\partial r}(r, \omega) \right| \leq c_{\xi 1}\Phi(\omega)\rho^{s^*-1}, \quad |\Delta\xi| \leq c_{\xi 1}\Phi(\omega)\rho^{s^*-2},$$

где $c_{\xi 0}, c_{\xi 1}$ зависят от R , но не зависят от ρ и r .

В дальнейшем нам понадобится оценка интеграла

$$\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} dx$$

при $p > 1$, зависящая от ρ . Для ее получения воспользуемся приведенными выше неравенствами и известной формулой

$$\Delta\varphi_\rho = \Delta(\eta_\rho\xi) = \Delta\eta_\rho\xi + 2(\nabla\eta_\rho, \nabla\xi) + \eta_\rho\Delta\xi = \Delta\eta_\rho\xi + 2\frac{d\eta_\rho}{dr}\frac{\partial\xi}{\partial r} + \eta_\rho\Delta\xi.$$

Тогда в области $\rho < |x| < 2\rho$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} &= \frac{|\Delta(\eta_\rho\xi)|^p}{\eta_\rho^{p-1}\xi^{p-1}} \leq c_p \frac{|\Delta\eta_\rho|^p}{\eta_\rho^{p-1}} \frac{\xi^p}{\xi^{p-1}} + c_p \frac{|d\eta_\rho/dr|^p}{\eta_\rho^{p-1}} \frac{|\partial\xi/\partial r|^p}{\xi^{p-1}} + c_p \frac{|\eta_\rho|^p}{\eta_\rho^{p-1}} \frac{|\Delta\xi|^p}{\xi^{p-1}} \\ &\leq c_p c_\eta \frac{c_{\xi 1}^p}{c_{\xi 0}^{p-1}} \Phi(\omega) \rho^{s^*-2p}, \end{aligned}$$

откуда для искомого интеграла получаем

$$\begin{aligned} \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} dx &\leq c_p c_\eta \frac{c_{\xi 1}^p}{c_{\xi 0}^{p-1}} \rho^{s^*-2p} \int_\rho^{2\rho} r^{N-1} dr \int_{K_\omega} \Phi(\omega) d\omega \\ &\leq c_{Np\eta\xi} \rho^{-2p+s^*+N}, \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянная $c_{Np\eta\xi}$ не зависит от ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Доказываем от противного. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1) с $1 < q \leq q^*$. Наша цель – показать, что тогда $u \equiv 0$. Согласно определению 1 с пробной функцией $\varphi(x) = \varphi_\rho(x)$ (где взято $p = q' > 1$) это означает

$$\begin{aligned} \int_{K_R} u^q \varphi_\rho dx &\leq \int_{\partial K_R} u \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial n} dx - \int_{K_R} u \Delta \varphi_\rho dx \\ &= - \int_{\{|x|=R\} \cap \partial K_R} u \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} dx + \int_{\{|x|>R\} \cap \partial K_R} u \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial n} dx \\ &\quad - \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u \Delta \varphi_\rho dx - \int_{K_R \cap \{|x| < \rho\}} u \Delta \varphi_\rho dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим интегралы в правой части. По построению имеем

$$\left. \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial r} \right|_{r=R} \geq 0,$$

поэтому первый интеграл неотрицателен. Далее заметим, что мы предполагаем $u \geq 0$ в K_R , откуда в силу неравенства $\Delta \xi \geq 0$ заключаем, что последний интеграл также неотрицателен (без учета знака). Наконец, на боковой поверхности конуса K_R имеем

$$\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial n} = \eta_\rho(r)(r^{s_*} - R^{s_*}) \frac{\partial \Phi(\omega)}{\partial n_\omega} \leq 0,$$

где n_ω – внешняя нормаль к границе области K_ω . Вывод о неположительности производной $\partial \Phi(\omega)/\partial n_\omega$ на границе области K_ω сделан на том основании, что $\Phi(w) \geq 0$ в K_ω и $\Phi(\omega)|_{\partial K_\omega} = 0$ по построению. Таким образом, и второй интеграл в правой части неравенства (6) неположителен. В совокупности из приведенных рассуждений следует, что

$$\int_{K_R} u^q \varphi_\rho dx \leq \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u |\Delta \varphi_\rho| dx.$$

Для оценки правой части этого неравенства применим неравенство Гёльдера. Получим

$$\begin{aligned} \int_{K_R} u^q \varphi_\rho dx &= \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u^q \varphi_\rho dx + \int_{K_R \cap \{|x| < \rho\}} u^q \xi dx \\ &\leq \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u |\Delta \varphi_\rho| dx \\ &\leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u^q \varphi_\rho dx \right)^{1/q} \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx \right)^{1/q'}, \end{aligned} \quad (7)$$

откуда с учетом оценки (5) для последнего интеграла справа будем иметь

$$\int_{K_R \cap \{|x| < \rho\}} u^q \xi dx \leq \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx \leq c_0 \rho^{-2q' + s_* + N}. \quad (8)$$

Так как подынтегральное выражение в левой части не зависит от ρ , можем перейти к пределу по $\rho \rightarrow 0$. В случае

$$-2q' + s_* + N \leq 0$$

это приводит к соотношению

$$\int_{K_R} u^q \xi \, dx \leq c_0.$$

Тогда в силу равностепенной непрерывности интеграла и ввиду оценки $\varphi_\rho \leq \xi$ имеем

$$\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u^q \varphi_\rho \, dx \leq \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u^q \xi \, dx = \varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Возвращаясь теперь к неравенству (7), получим

$$\int_{K_R \cap \{|x| < \rho\}} u^q \xi \, dx \leq \varepsilon^{1/q}(\rho) c_0^{1/q'} \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow 0$, т.е. в пределе

$$\int_{K_R} u^q \xi \, dx = 0,$$

откуда в силу положительности ξ в K_R следует $u \equiv 0$, что противоречит нашему предположению о существовании нетривиального решения (техника исследования критического случая $-2q' + s_* + N = 0$ заимствована из работ [8], [9]).

Элементарными преобразованиями из неравенства

$$-2q' + s_* + N \leq 0$$

получаем условие отсутствия нетривиального решения: $1 < q \leq q^*$.

Приведенное определение обобщенного решения может быть расширено, в частности, рассмотрением пространства суммируемых функций $L_q(K_R)$ вместо пространства непрерывных функций.

2. Система неравенств. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_1} Du) \geq |x|^{\beta_1} v^{q_1}, & \beta_1 - \alpha_1 + 2 > 0, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2} Dv) \geq |x|^{\beta_2} u^{q_2}, & \beta_2 - \alpha_2 + 2 > 0, \\ u \geq 0, & u \not\equiv 0, & v \geq 0, & v \not\equiv 0, \end{cases} \quad \text{в } K_R. \quad (9)$$

Для случая всего пространства такого рода системы рассмотрены в книге [13] (даже без предположения о положительности решения) и работе [19]. Результаты об отсутствии решений более простых систем в полном конусе получены в работе автора [16]. Заметим, что полученные ниже результаты можно переформулировать (с использованием преобразования Кельвина) также для задач с сильно вырождающимися коэффициентами в ограниченной области и получить на этом пути аналоги ряда результатов Брезиса и Кабре [20], Галахова [21], Похожаева и Тесея [22] (см. также [23]) для областей с коническими точками границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара функций $u, v \in C(K_R)$ называется *слабым решением* задачи (9), если для любых неотрицательных пробных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in W_\infty^2(K_R)$ таких, что $\varphi_1|_{\partial K_R} = 0$, $\varphi_2|_{\partial K_R} = 0$, и финитных по переменной r , выполнены интегральные неравенства

$$\begin{cases} \int_{\partial K_R} u |x|^{\alpha_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dx - \int_{K_R} u \operatorname{div}(|x|^{\alpha_1} D\varphi_1) dx \geq \int_{K_R} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx, \\ \int_{\partial K_R} v |x|^{\alpha_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dx - \int_{K_R} v \operatorname{div}(|x|^{\alpha_2} D\varphi_2) dx \geq \int_{K_R} |x|^{\beta_2} u^{q_2} \varphi_2 dx \end{cases}$$

(предполагается, что все интегралы имеют смысл).

Введем параметры

$$\sigma_1 = 2 + \beta_1 - \alpha_1 + s_{\alpha_1}^*, \quad \sigma_2 = 2 + \beta_2 - \alpha_2 + s_{\alpha_2}^*.$$

ТЕОРЕМА 2. Задача (9) не имеет глобального неотрицательного нетривиального слабого решения, если

$$\max\{k_1, k_2\} \geq 0,$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= (\sigma_1 - s_{\alpha_2}^*)q_1 - (\sigma_2 - \beta_2 + \beta_1)(q_1 - 1) + (\sigma_2 - s_{\alpha_1}^*)q_2q_1 - (\sigma_1 - \beta_1 + \beta_2)(q_2 - 1)q_1, \\ k_2 &= (\sigma_2 - s_{\alpha_1}^*)q_2 - (\sigma_1 - \beta_1 + \beta_2)(q_2 - 1) + (\sigma_1 - s_{\alpha_2}^*)q_1q_2 - (\sigma_2 - \beta_2 + \beta_1)(q_1 - 1)q_2, \end{aligned}$$

$s_{\alpha_1}^*, s_{\alpha_2}^*$ определяются формулой (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u, v – слабое решение задачи (9). Для упрощения последующих выкладок введем оператор

$$A_\alpha \varphi = \operatorname{div}(|x|^\alpha D\varphi). \quad (10)$$

При $\alpha = 0$ имеем $A_0 \varphi = \Delta \varphi$.

Выберем пробные функции $\varphi_\alpha(x) = \varphi_{\alpha, \rho}(x)$ по формуле (4), но при определении ξ по формуле (3) и в дальнейших рассуждениях в качестве s_* и s^* положим

$$\begin{aligned} s_{*\alpha} &= -\frac{\alpha + N - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + N - 2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}, \\ s_\alpha^* &= \frac{\alpha + N - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + N - 2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega} = s_{*\alpha} + \alpha + N - 2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \alpha_2$. Перейдя к сферической системе координат, аналогично модельной задаче (см. также [16]) можно убедиться, что

$$\{x \in K_R : A_\alpha \varphi_{\alpha, \rho} < 0\} \subseteq K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}$$

и справедливы оценки (для $p > 1$)

$$\int_{K_R \cap \{\rho < r < 2\rho\}} \frac{|A_\alpha \varphi_{\alpha, \rho}|^p}{|x|^{\beta(p-1)} \varphi_{\gamma, \rho}^{p-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{(s_\gamma^* - s_\alpha^* + 2 + \beta - \gamma)p - s_\alpha^* + \alpha - \beta - 2}}. \quad (12)$$

Заметим, что здесь введен параметр γ , в качестве которого в дальнейшем будут выбираться α_1 или α_2 .

Положим $\varphi_1(x) = \varphi_{\alpha_1, \rho}(x)$ и $\varphi_2(x) = \varphi_{\alpha_2, \rho}(x)$. Используя рассуждения из доказательства теоремы 1 о знаке производной по нормали к границе конической области K_R функции $\varphi_{\alpha, \rho}(x)$, из определения слабого решения получаем

$$\begin{cases} \int_{K_R} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx \leq - \int_{K_R} u A_{\alpha_1} \varphi_1 dx, \\ \int_{K_R} |x|^{\beta_2} u^{q_2} \varphi_2 dx \leq - \int_{K_R} v A_{\alpha_2} \varphi_2 dx. \end{cases}$$

Для оценки интегралов справа применим неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \int_{K_R} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx &\leq - \int_{K_R} u A_{\alpha_1} \varphi_1 dx \leq - \int_{A_{\alpha_1} \varphi_1 < 0} |x|^{\beta_2/q_2} u \varphi_2^{1/q_2} \frac{A_{\alpha_1} \varphi_1}{|x|^{\beta_2/q_2} \varphi_2^{1/q_2}} dx \\ &\leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} |x|^{\beta_2} u^{q_2} \varphi_2 dx \right)^{1/q_2} \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|A_{\alpha_1} \varphi_1|^{q'_2}}{|x|^{\beta_2(q'_2-1)} \varphi_2^{q'_2-1}} dx \right)^{1/q'_2} \\ &= \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} |x|^{\beta_2} u^{q_2} \varphi_2 dx \right)^{1/q_2} J_1^{1/q'_2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_{K_R} |x|^{\beta_2} u^{q_2} \varphi_2 dx &\leq - \int_{K_R} v A_{\alpha_2} \varphi_2 dx \leq - \int_{A_{\alpha_2} \varphi_2 < 0} |x|^{\beta_1/q_1} v \varphi_1^{1/q_1} \frac{A_{\alpha_2} \varphi_2}{|x|^{\beta_1/q_1} \varphi_1^{1/q_1}} dx \\ &\leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx \right)^{1/q_1} \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|A_{\alpha_2} \varphi_2|^{q'_1}}{|x|^{\beta_1(q'_1-1)} \varphi_1^{q'_1-1}} dx \right)^{1/q'_1} \\ &= \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx \right)^{1/q_1} J_2^{1/q'_1}, \end{aligned} \quad (14)$$

причем согласно (12) имеем оценки

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|A_{\alpha_1} \varphi_1|^{q'_2}}{|x|^{\beta_2(q'_2-1)} \varphi_2^{q'_2-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{(s_{\alpha_2}^* - s_{\alpha_1}^* + 2 + \beta_2 - \alpha_2)q'_2 - s_{\alpha_1}^* + \alpha_1 - \beta_2 - 2}}, \\ J_2 &= \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|A_{\alpha_2} \varphi_2|^{q'_1}}{|x|^{\beta_1(q'_1-1)} \varphi_1^{q'_1-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{(s_{\alpha_1}^* - s_{\alpha_2}^* + 2 + \beta_1 - \alpha_1)q'_1 - s_{\alpha_2}^* + \alpha_2 - \beta_1 - 2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим неравенство (14) в (13). Тогда

$$\int_{K_R} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx \leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx \right)^{1/(q_1 q_2)} J_2^{1/(q'_1 q_2)} J_1^{1/q'_2},$$

откуда с учетом нашего предположения о нетривиальности $v(x)$ и оценок (15)

$$\int_{K_R} |x|^{\beta_1} v^{q_1} \varphi_1 dx \leq (J_2^{1/q'_1} J_1^{q_2-1})^{q_1/(q_1 q_2 - 1)} \leq \frac{C}{\rho^{k_1/(q_1 q_2 - 1)}}.$$

Аналогично, подставляя (13) в (14), приходим к оценке

$$\int_{K_R} |x|^{\beta_2} u^{q_2} \varphi_2 dx \leq (J_1^{1/q'_2} J_2^{q_1-1})^{q_2/(q_1 q_2 - 1)} \leq \frac{C}{\rho^{k_2/(q_1 q_2 - 1)}}.$$

Аналогично модельной задаче легко видеть, что если $k_1 \geq 0$, то $v(x) \equiv 0$, если же $k_2 \geq 0$, то $u(x) \equiv 0$. Очевидно, что если хотя бы одна из функций $u(x)$ или $v(x)$ тождественно равна нулю, то равна нулю и другая. Таким образом, условие отсутствия нетривиального решения принимает вид

$$\max\{k_1, k_2\} \geq 0.$$

Теорема доказана.

Приведем конкретные примеры использования теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Задача*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) \geq |x|^\beta u^q, & \beta - \alpha + 2 > 0, \\ u \geq 0, & u \neq 0, \end{cases} \quad \text{в } K_R$$

не имеет слабого решения, если

$$1 < q \leq q^* = 1 + \frac{2 + \beta - \alpha}{s_\alpha^*}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Задача*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) \geq |x|^\beta v^{q_1}, & \beta - \alpha + 2 > 0, \\ -\operatorname{div}(|x|^\alpha Dv) \geq |x|^\beta u^{q_2}, \\ u \geq 0, & u \neq 0, \\ v \geq 0, & v \neq 0, \end{cases} \quad \text{в } K_R$$

не имеет слабого решения, если

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{s_\alpha^*}{2 + \beta - \alpha},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{q_1 + 1}{q_2 q_1 - 1}, \quad \gamma_2 = \frac{q_2 + 1}{q_2 q_1 - 1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим один специальный частный случай. Условия $2 + \beta_1 - \alpha_1 > 0$ и $2 + \beta_2 - \alpha_2 > 0$ дают возможность считать параметры α_1 и α_2 сколь угодно большими по модулю отрицательными числами. Используем это наблюдение в следующей ситуации.

Полагаем $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, оставив только параметр $\alpha_2 \rightarrow -\infty$, т.е. рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\Delta u \geq v^{q_1}, \\ -\operatorname{div}(|x|^{\alpha_2} Dv) \geq u^{q_2}, & \alpha_2 < 0, \\ u \geq 0, & u \neq 0, \\ v \geq 0, & v \neq 0, \end{cases} \quad \text{в } K_R.$$

Выпишем показатели σ_1 , σ_2 и k_1 при указанных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 + s_0^*, & \sigma_2 &= 2 - \alpha_2 + s_{\alpha_2}^*, \\ k_1 &= (2 + s_0^* - s_{\alpha_2}^*)q_1 - (2 - \alpha_2 + s_{\alpha_2}^*)(q_1 - 1) \\ &\quad + (2 - \alpha_2 + s_{\alpha_2}^* - s_0^*)q_1 q_2 - (2 + s_0^*)q_1(q_2 - 1). \end{aligned}$$

С помощью очевидных преобразований k_1 условие $k_1 \geq 0$ приведем к виду

$$k_1 = q_1(-\alpha_2 + 2 - s_{\alpha_2}^* + (q_2 - 1)(-\alpha_2 + s_{\alpha_2}^* - 2s_0)) - \alpha_2 + 2 + s_{\alpha_2}^* \geq 0.$$

Легко видеть, что это неравенство будет выполнено при любых $q_1, q_2 > 1$, если

$$\begin{cases} -\alpha_2 + 2 - s_{\alpha_2}^* \geq 0, \\ -\alpha_2 + s_{\alpha_2}^* - 2s_0 \geq 0, \\ -\alpha_2 + 2 + s_{\alpha_2}^* \geq 0. \end{cases}$$

По нашему предположению $-\alpha_2 \rightarrow +\infty$, и из формулы (11) легко видеть, что тогда $s_{\alpha_2}^* \rightarrow 0$. Таким образом, можно выбрать такое α_2 , чтобы все эти три неравенства удовлетворялись одновременно.

Итак, построен пример задачи с сильной сингулярностью в главной части, которая не имеет глобального нетривиального неотрицательного решения при всех $q_1, q_2 > 1$.

3. Отсутствие решений задач из заданного функционального класса: модельная задача. В предыдущих пунктах мы рассматривали вопросы отсутствия решений без каких-либо предположений о поведении решения на бесконечности. Если же потребовать, чтобы решение было суммируемо в некоторой степени $l > 1$, то, в свою очередь, возникают определенные критические показатели. В данной постановке во всем пространстве задача рассматривалась в работе [19]. Соответствующие утверждения известны как обобщения теоремы Бернштейна [24].

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи (1). Под слабым решением будем понимать функцию $u(x) \in L_l(K_R)$, удовлетворяющую определению 1. Подчеркнем, что здесь мы не имеем в виду локальное пространство $L_{l,\text{loc}}(K_R)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$1 < l \leq l^* = \frac{N}{s^*}.$$

Тогда задача (1) не имеет слабого решения из $L_l(K_R)$ ни при каких $q \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим от противного. Пусть $u \in L_l(K_R)$ – слабое (нетривиальное) решение задачи (1). Аналогично доказательству теоремы 1 с соответствующей пробной функцией $\varphi_\rho(x)$ из определения слабого решения с использованием неравенства Гёльдера получим

$$\begin{aligned} \int_{K_R} u^q \varphi_\rho dx &\leq \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u |\Delta \varphi_\rho| dx \\ &\leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u^l dx \right)^{1/l} \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} |\Delta \varphi_\rho|^{l'} dx \right)^{1/l'} \\ &\leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u^l dx \right)^{1/l} \left(\frac{C}{\rho^{(2-s_*)l' - N}} \right)^{1/l'}. \end{aligned} \quad (16)$$

Первый интеграл стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$ (как в предельном случае $q = q^*$ теоремы 1), поэтому при $(2 - s_*)l' - N \geq 0$ имеем отсутствие нетривиального решения для всех $q \in \mathbb{R}$.

Полученный критический показатель l^* является неулучшаемым. Действительно, рассмотрим функцию

$$u(x) \equiv u(r, \omega) = \varepsilon r^s \Phi(\omega),$$

где $\varepsilon > 0$. Как уже вычислялось ранее,

$$-\Delta u = -\varepsilon \Phi r^{s-2} \{s^2 + s(N-2) - \lambda_\omega\}.$$

Выберем $s < 0$ такое, что $s^2 + s(N-2) - \lambda_\omega = -\delta < 0$, и положим $\varepsilon \delta = \varepsilon^q$. Считая для простоты, что $R > 1$ (т.е. в нашей области K_R имеем $|x| = r > 1$) и $q > 0$, можем использовать неравенство $r^{s-2} \geq r^{sq}$ при $s-2 \geq sq$ (так как $s < 0$). Тогда

$$-\Delta u = \varepsilon^q r^{s-2} \Phi \geq (\varepsilon r^s \Phi)^q = u^q.$$

Условия на s вместе с требованием суммируемости $u(x) \in L_l(K_R)$ дают

$$\begin{cases} s-2 \geq sq, \\ -s^* < s < 0, \\ sl < -N. \end{cases}$$

Выполнение этих условий следует из

$$\begin{cases} -s^* < s \leq -\frac{2}{q-1}, \\ -s^* < s < -\frac{N}{l}, \end{cases}$$

что, в свою очередь, вытекает из

$$\begin{cases} q > 1 + \frac{2}{s^*}, \\ l > \frac{N}{s^*}. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств отражает критический показатель отсутствия решений без условия на бесконечности, а второе – наше требование суммируемости.

Поскольку мы рассматриваем коническую область, то естественно обобщить эту теорему 3 на пространства типа Кондратьева со степенным весом.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и

$$1 < l \leq l^* = \frac{N}{s^* - \alpha}.$$

Тогда задача (1) ни при каких $q \in \mathbb{R}$ не имеет слабого решения $u(x)$ такого, что

$$u(x)|x|^\alpha \in L_l(K_R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично предыдущему доказательству требуемое утверждение следует из оценки

$$\begin{aligned} \int_{K_R} u^q \varphi_\rho \, dx &\leq \int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} u |x|^\alpha \frac{|\Delta \varphi_\rho|}{|x|^\alpha} \, dx \\ &\leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} (u |x|^\alpha)^l \, dx \right)^{1/l} \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{l'}}{|x|^{\alpha l'}} \, dx \right)^{1/l'} \\ &\leq \left(\int_{K_R \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}} (u |x|^\alpha)^l \, dx \right)^{1/l} \left(\frac{C}{\rho^{(\alpha+2-s_*)l'-N}} \right)^{1/l'}. \end{aligned} \quad (17)$$

В заключение автор выражает благодарность С. И. Похожаеву за постановку задачи и В. В. Курте за полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [2] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
- [3] Egnell H. Positive solutions of semilinear equations in cones // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 330. P. 191–201.
- [4] Нгуен Мань Хунг. Об отсутствии положительных решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в конических областях // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. С. 533–539.
- [5] Коньков А. А. О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. С. 41–127.
- [6] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135. №6. С. 346–360.
- [7] Похожаев С. И. Существенно нелинейные емкости, индуцированные дифференциальными операторами // Докл. РАН. 1997. Т. 357. С. 592–594.
- [8] Митидиери Э., Похожаев С. И. Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств // Докл. РАН. 1998. Т. 359. С. 456–460.
- [9] Митидиери Э., Похожаев С. И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 192–222.
- [10] Курта В. В. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дисс. ... д. ф.-м. н. М.: МИАН, 1994.
- [11] Курта В. В. К вопросу об отсутствии целых положительных решений у полулинейных эллиптических уравнений // УМН. 1995. Т. 50. №4. С. 131.
- [12] Курта В. В. Об отсутствии положительных решений у полулинейных эллиптических уравнений // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 162–169.
- [13] Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. Тр. МИАН. Т. 234. М.: Наука, 2001.
- [14] Bandle C., Essen M. On positive solutions of Emden equations in cone-like domains // Arch. Rational Mech. Anal. 1990. V. 112. P. 319–338.
- [15] Bandle C. Positive solutions of Emden equations in a cone-like domains // Progress in Nonlinear Differential Equations Appl. 1992. V. 7. P. 71–75.
- [16] Лаптев Г. Г. Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №6. С. 107–124.
- [17] Laptev G. G. Some nonexistence results for higher-order evolution inequalities in cone-like domains // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 7. P. 87–93.
- [18] Bidaut-Veron M.-F., Pohozaev S. Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems // J. Anal. Math. 2001. V. 84. P. 1–49.
- [19] Kartsatos A. G., Kurta V. V. Nonexistence theorems for weak solutions of quasilinear elliptic equations // Abstract Appl. Anal. 2000. №6. P. 163–189.
- [20] Brezis H., Cabré X. Some simple nonlinear PDE's without solutions // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8). 1998. V. 1. P. 223–262.
- [21] Galakhov E. Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. P. 256–277.
- [22] Похожаев С. И., Тесей А. Полное разрушение решений нелинейных эллиптических неравенств // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. С. 521–528.
- [23] Лаптев Г. Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 223–235.
- [24] Митидиери Э., Похожаев С. И. Некоторые обобщения теоремы Бернштейна // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38 (в печати).