Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 328–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:02:12

УДК 517.5

Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов

С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная

Получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых модуль непрерывности функции определен при помощи функции Стеклова. Для классов функций, заданных при помощи указанной характеристики, получены точные значения n -поперечников.

Библиография: 14 названий.

1. Пусть $L_2 \equiv L_2([0, 2\pi])$ – пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n - 1$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, которая имеет разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx,$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf \{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где $S_{n-1}(f)$ есть частная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции f , $\rho_j^2(f) \stackrel{\text{def}}{=} a_j^2(f) + b_j^2(f)$. Символом $L_2^r (r \in \mathbb{Z}_+; L_2^0 \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r - 1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка принадлежат пространству L_2 .

Под неравенствами типа Джексона–Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через некоторую характеристику ее гладкости (см., например, [1]–[13]). В [4], в частности, отмечается, что интерес к точным константам, который сложился вокруг неравенств типа Джексона, возможно, не был бы столь оправданным, если бы каждый новый случай не требовал привлечения новых идей и методов, которые затем оказывались полезными и при решении других экстремальных задач.

Пусть

$$S_h(f, x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau, \quad h > 0,$$

– функция Стеклова элемента $f \in L_2$. При этом $S_{h,i}(f) \stackrel{\text{df}}{=} S_h(S_{h,i-1}(f))$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве L_2 . Определим согласно [10] разности первого и высших порядков следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h^1(f, x) &\stackrel{\text{df}}{=} S_h(f, x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f, x), \\ \tilde{\Delta}_h^k(f, x) &\stackrel{\text{df}}{=} \tilde{\Delta}_h^1(\tilde{\Delta}_h^{k-1}(f), x) = (S_h - \mathbb{I})^k(f, x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} S_{h,i}(f, x), \end{aligned}$$

где $k = 2, 3, \dots$. Используя указанные обозначения, рассмотрим введенную в [10] характеристику гладкости

$$\Omega_k(f, t) \stackrel{\text{df}}{=} \sup\{\|\tilde{\Delta}_h^k(f, \cdot)\| : 0 < h \leq t\}, \quad (2)$$

которую назовем *специальным модулем непрерывности k -го порядка функции $f \in L_2$* . В [10], в частности, было показано, что для любой функции $f \in L_2^r$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) справедлива оценка

$$E_{n-1}(f) \leq \left(\frac{2}{\pi^2 - 4}\right)^k n^{2k-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} t \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt \right\}^k, \quad (3)$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ константа в правой части неравенства (3) уменьшена быть не может.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеют место равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{r-k} E_{n-1}(f)}{(\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt)^k} = \frac{1}{(\pi - \text{Si}(\pi))^k}, \quad (4)$$

где $\text{Si}(t) = \int_0^t x^{-1} \sin x dx$ – интегральный синус.

2. Прежде чем сформулировать второй основной результат, напомним необходимые понятия и определения. Пусть $\mathbb{B}$ – единичный шар в L_2 , Q – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 , $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n , $\mathfrak{I}: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, $\mathfrak{I}^\perp: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$\begin{aligned} b_n(Q; L_2) &= \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon \mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\}, \\ d_n(Q; L_2) &= \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\} : f \in Q\} : \Lambda_n \subset L_2\}, \\ \delta_n(Q; L_2) &= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathfrak{I}f\| : f \in Q\} : \mathfrak{I}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\}, \\ d^n(Q; L_2) &= \inf\{\sup\{\|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\}, \\ \pi_n(Q; L_2) &= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathfrak{I}^\perp f\| : f \in Q\} : \mathfrak{I}^\perp L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *коломоговским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками*. Поскольку L_2 является гильбертовым пространством, справедливы следующие соотношения между перечисленными величинами:

$$b_n(Q; L_2) \leq d^n(Q; L_2) \leq d_n(Q; L_2) = \delta_n(Q; L_2) = \Pi_n(Q; L_2). \quad (5)$$

Пусть $\Psi(t)$, $0 \leq t < \infty$, есть непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Через $W^r(\Omega_k, \Psi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, обозначим класс функций $f \in L_2^r$, для которых имеет место неравенство

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau \leq \Psi^{1/k}(t) \quad (6)$$

при любом $0 < t < \infty$.

Полагая при $t = 0$ значение функции $\sin t/t$ равным 1, обозначим через t_* величину ее аргумента, при котором эта функция достигает на полусегменте $[0, \infty)$ своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть минимальный положительный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t$, $4.49 < t_* < 4.51$. Пусть

$$E_{n-1}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{df}}{=} \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathcal{M}\},$$

где $\mathcal{M} \subset L_2$, и

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 1 - \frac{\sin t}{t}, & \text{если } 0 \leq t \leq t_*, \\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } t \geq t_*. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для любых $0 < t < \infty$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Psi(t)$ удовлетворяет ограничению

$$\left(\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/n)}\right)^{1/k} \geq \frac{\pi \int_0^{nt} (1 - \sin \tau/\tau)_* d\tau}{tn(\pi - \operatorname{Si}(\pi))}. \quad (7)$$

Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} p_{2n}(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2) &= p_{2n-1}(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2) \\ &= E_{n-1}(W^r(\Omega_k, \Psi)) = \left(1 - \frac{\operatorname{Si}(\pi)}{\pi}\right)^{-k} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $p_n(\cdot)$ – любой из ранее рассмотренных n -поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (7), не пусто.

Для $r \in \mathbb{N}$ и $h > 0$ полагаем

$$W_k^r(h) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ f \in L_2^r : \int_0^h \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt \leq 1 \right\}.$$

Следующая теорема, как и теорема 2 из работы Тайкова [2], содержит определенное ограничение на натуральные числа n , для которых вычислены точные значения n -поперечников классов $W_k^r(h)$ в метрике пространства L_2 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $nh \leq t_*$. Тогда справедливы равенства

$$p_{2n}(W_k^r(h); L_2) = p_{2n-1}(W_k^r(h); L_2) = E_{n-1}(W_k^r(h)) = \left(h \left(1 - \frac{\text{Si}(nh)}{nh} \right) \right)^{-k} n^{-r}, \quad (9)$$

где $p_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников, рассмотренных ранее.

3. Доказательство теоремы 1. В [10] было получено следующее неравенство:

$$E_{n-1}^2(f) \leq (E_{n-1}^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \|\tilde{\Delta}_h^k(f^{(r)}, \cdot)\|^{1/k} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\sin mh}{mh} \rho_m^2(f). \quad (10)$$

Проинтегрируем обе части неравенства (10) по h в пределах от 0 до t :

$$tE_{n-1}^2(f) \leq (E_{n-1}^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/n} \int_0^t \|\tilde{\Delta}_h^k(f^{(r)}, \cdot)\|^{1/k} dh + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\text{Si}(mt)}{m} \rho_m^2(f). \quad (11)$$

Поскольку функция $\text{Si}(x)$ при $0 < x < \infty$ принимает свое наибольшее значение в точке $x = \pi$ (см., например, [14]), полагая в (11) $t = \pi/n$ и используя определение (2), получим

$$\frac{\pi}{n} E_{n-1}^2(f) \leq (E_{n-1}^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, h) dh + \frac{\text{Si}(\pi)}{n} E_{n-1}^2(f).$$

Отсюда имеем неравенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{r-k} E_{n-1}(f)}{(\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt)^k} \leq \frac{1}{(\pi - \text{Si}(\pi))^k}. \quad (12)$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (12), рассмотрим в L_2^r функцию $f_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos nx$. Нетрудно показать, что для произвольной функции $f \in L_2^r$ справедливо равенство

$$\|\tilde{\Delta}_h^k(f^{(r)}, \cdot)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin mh}{mh} \right)^{2k} m^{2r} \rho_m^2(f). \quad (13)$$

Используя (1) и (13), для f_0 запишем

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \|\tilde{\Delta}_h^k(f_0^{(r)}, \cdot)\|^{1/k} = \left(1 - \frac{\sin nh}{nh} \right) n^{r/k},$$

$$\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f_0^{(r)}, t) dt = (\pi - \text{Si}(\pi)) n^{r/k-1}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{r-k} E_{n-1}(f)}{(\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt)^k} \geq \frac{n^{r-k} E_{n-1}(f_0)}{(\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f_0^{(r)}, t) dt)^k} = \frac{1}{(\pi - \text{Si}(\pi))^k}. \quad (14)$$

Сопоставляя неравенства (12) и (14), получим требуемое равенство (4). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Для любой функции $f \in L_2^r$ из соотношения (12) имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \left(1 - \frac{\text{Si}(\pi)}{\pi}\right)^{-k} n^{-r} \left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt\right)^k. \quad (15)$$

Используя определение класса $W^r(\Omega_k, \Psi)$ и неравенства (5) и (15), получим

$$\begin{aligned} p_{2n}(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2) &\leq p_{2n-1}(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2) \\ &\leq E_{n-1}(W^r(\Omega_k, \Psi)) \leq \left(1 - \frac{\text{Si}(\pi)}{\pi}\right)^{-k} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Для получения оценок снизу выше перечисленных n -поперечников рассмотрим шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq \left(1 - \frac{\text{Si}(\pi)}{\pi}\right)^{-k} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}.$$

Поскольку для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Delta}_h^k(T_n^{(r)}, \cdot)\|^2 &= \sum_{m=1}^n \left(1 - \frac{\sin mh}{mh}\right)^{2k} m^{2r} \rho_m^2(T_n) \\ &\leq n^{2r} \sum_{m=1}^n \left(1 - \frac{\sin mh}{mh}\right)^{2k}_* \rho_m^2(T_n) \leq n^{2r} \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)^{2k}_* \|T_n\|^2, \end{aligned}$$

отсюда в силу (2) запишем

$$\Omega_k^{1/k}(T_n^{(r)}, \tau) \leq n^{r/k} \left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_* \|T_n\|^{1/k}. \quad (17)$$

Используя (17) и ограничение на мажоранту (7), для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_k^{1/k}(T_n^{(r)}, \tau) d\tau &\leq n^{r/k} \|T_n\|^{1/k} \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)_* d\tau \\ &\leq \left(1 - \frac{\text{Si}(\pi)}{\pi}\right)^{-1} \Psi^{1/k}\left(\frac{\pi}{n}\right) \frac{1}{nt} \int_0^{nt} \left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right)_* d\tau \leq \Psi^{1/k}(t). \end{aligned}$$

Следовательно, шар $\mathbb{B}_{2n+1}$ принадлежит классу $W^r(\Omega_k, \Psi)$.

В силу сказанного, неравенств (5) и определения бернштейновского n -поперечника имеем

$$\begin{aligned} p_{2n}(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2) &\geq b_{2n}(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2) \\ &\geq b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2) \geq \left(1 - \frac{\text{Si}(\pi)}{\pi}\right)^{-k} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Сопоставляя неравенства (16) и (18), получаем соотношения (8).

Покажем, что функция $\Psi_*(t) \stackrel{\text{df}}{=} t^{\beta k}$, где

$$\beta \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\text{Si}(\pi)}{\pi - \text{Si}(\pi)}, \quad 1.42 < \beta < 1.44, \quad (19)$$

удовлетворяет ограничению (7). Подставляя Ψ_* в (7), получим неравенство

$$\left(\frac{nt}{\pi}\right)^\beta \geq \frac{\pi \int_0^{nt} (1 - \sin \tau/\tau)_* d\tau}{nt(\pi - \text{Si}(\pi))},$$

которое требуется доказать. Полагая $u \stackrel{\text{df}}{=} nt$, $0 \leq u < \infty$, перепишем последнее неравенство в виде

$$u^{\beta+1} \geq \frac{\pi^{\beta+1} \int_0^u (1 - \sin \tau/\tau)_* d\tau}{\pi - \text{Si}(\pi)}. \quad (20)$$

Рассмотрим функцию

$$\Lambda(u) \stackrel{\text{df}}{=} u^{\beta+1} - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} \int_0^u \left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right)_* d\tau, \quad 0 \leq u < \infty. \quad (21)$$

Рассуждения проведем для трех случаев: $0 \leq u \leq \pi$, $\pi \leq u \leq t_*$ и $t_* \leq u < \infty$.

Пусть $0 \leq u \leq \pi$. Запишем функцию $\Lambda(u)$ в окрестности нуля:

$$\Lambda(u) = u^{\beta+1} \left(1 - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} O(u^{2-\beta})\right).$$

Очевидно, что при $u \rightarrow 0$ в бесконечно малой окрестности нуля функция Λ является положительной. Рассуждая от противного, покажем, что на интервале $(0, \pi)$ функция Λ является знакопостоянной. Для этого предположим, что существует некоторая точка $\eta \in (0, \pi)$, в которой Λ меняет знак. Поскольку из (21) имеем $\Lambda(0) = \Lambda(\pi) = 0$, в силу теоремы Ролля заключаем, что производная первого порядка

$$\Lambda^{(1)}(u) = \frac{1}{u} \left((\beta+1)u^{\beta+1} - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} (u - \sin u) \right) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Lambda_1(u)}{u} \quad (22)$$

должна иметь на интервале $(0, \pi)$ не менее двух различных нулей. Очевидно, что это относится и к функции Λ_1 , исследованием которой займемся далее. Учитывая формулы (19) и (22), нетрудно убедиться в том, что $\Lambda_1(0) = \Lambda_1(\pi) = 0$. Следовательно, производная первого порядка

$$\Lambda_1^{(1)}(u) = (\beta+1)^2 u^\beta - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} (1 - \cos u) \quad (23)$$

должна иметь в силу теоремы Ролля не менее трех различных нулей на множестве $(0, \pi)$. Так как $\Lambda_1^{(1)}(0) = 0$, на основании аналогичных соображений производная второго порядка

$$\Lambda_1^{(2)}(u) = (\beta+1)^2 \beta u^{\beta-1} - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} \sin u \quad (24)$$

обязана иметь не менее трех различных нулей на интервале $(0, \pi)$. Из соотношения $\Lambda_1^{(2)}(0) = 0$ аналогичный вывод о наличии не менее трех различных нулей на $(0, \pi)$ можно сделать и для функции

$$\Lambda_1^{(3)}(u) = (\beta+1)^2 \beta (\beta-1) u^{\beta-2} - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} \cos u. \quad (25)$$

Из (19) и (25) следует, что $\Lambda_1^{(3)}$ является разностью двух функций, одна из которых выпукла вниз, а другая выпукла вверх. Из геометрических соображений очевидно, что на интервале $(0, \pi)$ $\Lambda_1^{(3)}$ не может иметь более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (20) на отрезке $0 \leq u \leq \pi$.

Пусть $\pi \leq u \leq t_*$. Применим метод рассуждений от противного, полагая, что существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (\pi, t_*)$, в которой функция Λ меняет знак. Поскольку $\Lambda(\pi) = 0$, на основании теоремы Ролля и (22) функция $\Lambda^{(1)}$, а значит, и Λ_1 , должны иметь на интервале (π, t_*) не менее одного нуля. Из (24) следует, что для любого $u \in [\pi, t_*]$ функция $\Lambda_1^{(2)}(u) > 0$. Используя формулы (19) и (23), можно показать, что

$$\Lambda_1^{(1)}(\pi) = \pi^\beta \left((\beta + 1)^2 - \frac{2\pi}{\pi - \text{Si}(\pi)} \right) > 0.$$

Следовательно, $\Lambda_1^{(1)}$ является положительной монотонно возрастающей функцией на отрезке $[\pi, t_*]$. Поскольку $\Lambda_1(\pi) = 0$, то из выше приведенного следует, что на множестве $\pi < u \leq t_*$ функция Λ_1 должна быть монотонно возрастающей и положительной. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (20) на указанном отрезке.

Рассмотрим случай, когда $t_* \leq u < \infty$. Используя (21), запишем

$$\Lambda(u) = u^{\beta+1} - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} \left(u \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*} \right) + \sin t_* - \text{Si}(t_*) \right). \quad (26)$$

Отсюда следует

$$\Lambda^{(1)}(u) = (\beta + 1)u^\beta - \frac{\pi^{\beta+1}}{\pi - \text{Si}(\pi)} \left(1 - \frac{\sin t_*}{t_*} \right). \quad (27)$$

Поскольку, как нетрудно убедиться, $\Lambda^{(1)}(t_*) > 0$, из (27) получаем, что $\Lambda^{(1)}(u) > 0$ для любого $u \in [t_*, \infty)$. В силу (26) имеем

$$\Lambda(t_*) = \pi^{\beta+1} \left(\left(\frac{t_*}{\pi} \right)^{\beta+1} - \frac{t_* - \text{Si}(t_*)}{\pi - \text{Si}(\pi)} \right) > 0.$$

Учитывая выше сказанное об $\Lambda^{(1)}$, заключаем, что функция Λ является положительной и монотонно возрастающей на полусегменте $[t_*, \infty)$. Это означает, что на рассматриваемом точечном множестве $t_* \leq u < \infty$ неравенство (20) также имеет место. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого натурального числа n имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} p_{2n}(W^r(\Omega_k, \Psi_*); L_2) &= p_{2n-1}(W^r(\Omega_k, \Psi_*); L_2) = E_{n-1}(W^r(\Omega_k, \Psi_*)) \\ &= \pi^{\text{Si}(\pi)/(\pi - \text{Si}(\pi))} \left(1 - \frac{\text{Si}(\pi)}{\pi} \right)^{-k} n^{-(r + \text{Si}(\pi)/(\pi - \text{Si}(\pi)))}. \end{aligned}$$

5. Доказательство теоремы 3. Учитывая, что функция $\text{Si}(x)/x$ является невозрастающей на интервале $0 < x < \infty$ (см., например, [11; с. 34]) и используя соотношения (1), (2) и (11), для произвольного элемента $f \in L_2^r$ запишем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f) &\leq (E_{n-1}^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \|\tilde{\Delta}_\tau^k(f^{(r)}, \cdot)\|^{1/k} d\tau + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\text{Si}(mt)}{mt} \rho_m^2(f) \\ &\leq \frac{\text{Si}(nt)}{nt} E_{n-1}^2(f) + (E_{n-1}^2(f))^{(2k-1)/(2k)} n^{-r/k} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \left(\frac{n}{nt - \text{Si}(nt)} \right)^k n^{-r} \int_0^t \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau. \quad (28)$$

Используя определение класса $W_k^r(h)$, а также соотношение (5) и (28), получим

$$p_{2n}(W_k^r(h), L_2) \leq p_{2n-1}(W_k^r(h), L_2) \leq E_{n-1}(W_k^r(h)) \leq \left(h \left(1 - \frac{\text{Si}(nh)}{nh} \right) \right)^{-k} n^{-r}. \quad (29)$$

Для получения оценок снизу перечисленных выше n -поперечников рассмотрим шар

$$\mathbb{B}_{2n+1}^* \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq \left(h \left(1 - \frac{\text{Si}(nh)}{nh} \right) \right)^{-k} n^{-r} \right\}.$$

Учитывая ограничение $nh \leq t_*$ и используя неравенство (17), для любого полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}^*$ получим

$$\int_0^h \Omega_k^{1/k}(T_n^{(r)}, \tau) d\tau \leq n^{r/k} \|T_n\|^{1/k} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau} \right) d\tau \leq 1.$$

Следовательно, шар $\mathbb{B}_{2n+1}^*$ принадлежит классу $W_k^r(h)$. В силу определения бернштейновского n -поперечника и неравенств (5) имеем

$$p_{2n}(W_k^r(h), L_2) \geq b_{2n}(W_k^r(h), L_2) \geq b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}^*, L_2) \geq \left(h \left(1 - \frac{\text{Si}(nh)}{nh} \right) \right)^{-k} n^{-r}. \quad (30)$$

Сопоставляя неравенства (29) и (30), получим требуемые равенства (9), чем и завершим доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [2] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.
- [3] Л. В. Тайков, “Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **25**:2 (1979), 217–223.
- [4] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p* , ТулГУ, Тула, 1995.
- [5] Б. Сендов, В. Попов, *Усредненные модули гладкости*, Мир, М., 1988.

- [6] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer Ser. Comput. Math., **9**, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [7] K. G. Ivanov, “On a new characterization of functions. I”, *Serdica*, **8**:3 (1982), 262–279.
- [8] С. Б. Вакарчук, “О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников”, *Матем. заметки*, **70**:3 (2001), 334–345.
- [9] С. Б. Вакарчук, А. Н. Шитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. журн.*, **56**:11 (2004), 1458–1466.
- [10] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, “Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ ”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 803–811.
- [11] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Некоторые вопросы теории аппроксимации классов 2π -периодических функций в пространствах L_p , $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Проблемы теории приближения функций и смежные вопросы*, Сб. трудов Ин-та матем. НАН Украины, **1**, № 1, ИМ НАН Украины, Киев, 2004, 25–41.
- [12] С. Б. Вакарчук, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 ”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 792–796.
- [13] С. Б. Вакарчук, “Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 ”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 11–19.
- [14] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979.

С. Б. Вакарчук

Днепропетровский университет экономики и права

E-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Поступило

18.06.2007

В. И. Забутная

Днепропетровский национальный университет

E-mail: zabutna@mail.ru