Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Гимадисламов, О дискретности спектра полярной дифференциальной операции в пространстве вектор-функций, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 351–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:25:35

О дискретности спектра полярной дифференциальной операции в пространстве вектор-функций

М. Г. Гимадисламов

В статье для полярной дифференциальной операции в пространстве вектор-функций получены достаточные условия дискретности спектра.

Библиография: 5 названий.

Рассмотрим непрерывную матричную функцию $Q(x) = (q_{jk}(x))$, $x \geq 0$, такую, что $(Q(x))^* = Q(x)$ при $x \geq 0$ (т.е. $q_{jk}(x) = \bar{q}_{kj}(x)$, $x \geq 0$). Она приводит к симметричному оператору в гильбертовом пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, связанному с выражением $y'' + Q(x)y$ и граничным условием $y(0) = 0$. Если этот оператор имеет нулевые индексы дефекта, возникает вопрос о дискретности спектра и о распределении этого спектра; эти вопросы представляют интерес, прежде всего, для полуограниченной снизу матричной функции $Q(x)$. Ряд результатов на эту тему выражается через функции $q_1(x) \leq q_2(x) \leq \dots \leq q_n(x)$ – собственные значения матрицы $Q(x)$ (см. [1]). В работах [2]–[4] было показано, что в этих вопросах играют роль не только собственные значения $q_k(x)$, но и собственные векторы $l_k(x)$ матрицы $Q(x)$.

В данной работе аналогичный эффект изучается для спектральной задачи $y'' + \lambda Q(x)y = 0$, $x \geq 0$, $y(0) = 0$; предполагается, что $Q(x) \geq 0$ для всех $x \geq 0$. Для упрощения изложения ограничимся случаем $n = 2$. Заметим, что соответствующая скалярная задача хорошо изучена (см. [5; гл. II]).

Итак, изучается задача

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad x \geq 0, \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x)). \quad (1)$$

Матричную функцию $Q(x)$ зададим при помощи двух числовых функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ (собственные значения матрицы $Q(x)$) и двух вектор-функций $l_1(x) = (\cos \psi(x), -\sin \psi(x))$, $l_2(x) = (\sin \psi(x), \cos \psi(x))$ (собственных векторов матрицы $Q(x)$). Предполагается, что все эти функции имеют класс гладкости C^2 и $q_k(x) > 0$ при $k = 1, 2$, $x \geq 0$. Важно подчеркнуть, что мы не требуем, чтобы $q_1(x)$ и $q_2(x)$ были упорядочены (т.е. не предполагаем, что $q_1(x) \leq q_2(x)$ или $q_1(x) \geq q_2(x)$). Наша цель – исследовать условия дискретности задачи (1). Согласно общим принципам спектральной теории дискретность спектра равносильна следующему условию D: множество гладких вектор-функций $y(x)$, $x \geq 0$, таких, что $y(0) = 0$, $y(x) = 0$ при достаточно больших x и $\int_0^{+\infty} |y'|^2 dx \leq 1$, компактно относительно нормы $\|y\|_Q = \sqrt{\int_0^{+\infty} (Q(x)y, y) dx}$.

Образно говоря, результат данной работы можно описать так: если собственные векторы $l_1(x)$ и $l_2(x)$ “достаточно быстро вращаются” при $x \rightarrow +\infty$, то дискретность спектра (1) равносильна дискретности спектра скалярной задачи $y'' + \lambda(q_1 + q_2)y = 0$, $y(0) = 0$, $x \geq 0$. Согласно [5] последняя задача имеет дискретный спектр в том и только в том случае, когда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} (q_1(t) + q_2(t)) dt = 0. \quad (2)$$

Упомянутое “быстрое вращение” векторов $l_1(x)$ и $l_2(x)$ означает достаточно быстрый рост функций $\psi'(x)$ и $\psi''(x)$. Точная формулировка дается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $\psi''(x)/(\psi'(x))^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$;
- 2) $q_1 - q_2 = o(\psi'')$ при $x \rightarrow +\infty$;
- 3) $(q'_1 - q'_2)/(q_1 + q_2) = o(\psi')$ при $x \rightarrow +\infty$.

Тогда дискретность спектра задачи (1) равносильна выполнению условия (2).

Таким образом, точный смысл “быстрого вращаения” векторов $l_1(x)$ и $l_2(x)$ заключается в условиях 1)–3) этой теоремы.

Заметим, что к настоящему времени отсутствуют конструктивные признаки дискретности спектра указанных векторных спектральных задач; как мы видим “быстрое вращение” указанных векторов существенно упрощает картину.

Введем обозначения

$$A[y] = \int_0^{+\infty} |y'|^2 dx, \quad B[y] = \int_0^{+\infty} (Qy, y) dx,$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ и предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть вектор-функция $y(x)$ сосредоточена на полуоси $[h, +\infty)$. Тогда

$$B[y] = (1 + \alpha(h)) \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx + \beta(h) A[y], \quad (3)$$

где величины $\alpha(h)$ и $\beta(h)$ удовлетворяют условию $\alpha(h) \rightarrow 0$, $\beta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} Q(x) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \frac{q_1 + q_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{q_1 - q_2}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} B[y] &= \int_0^{+\infty} (Qy, y) dx = \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{q_1 - q_2}{2} (|y_1|^2 + |y_2|^2) \cos 2\psi - 2 \operatorname{Re}(y_1, \bar{y}_2) \sin 2\psi dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразуем второй интеграл, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{q_1 - q_2}{2} |y_1|^2 \cos 2\psi \, dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{q_1 - q_2}{4} y_1 \bar{y}_1 \frac{d(\sin 2\psi)}{\psi'} \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \sin 2\psi \left(\frac{(q_1 - q_2) y_1 \bar{y}_1}{\psi'} \right)' \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \sin 2\psi \left(\frac{(q'_1 - q'_2)}{\psi'} y_1 \bar{y}_1 + \frac{(q_1 - q_2)}{\psi'} (y_1 \bar{y}'_1 + y'_1 \bar{y}_1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(q_1 - q_2) y_1 \bar{y}_1 \psi''}{(\psi')^2} \right) \, dx.
 \end{aligned}$$

Взяв модуль рассматриваемого интеграла, получаем

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{+\infty} \frac{q_1 - q_2}{2} |y_1|^2 \cos 2\psi \, dx \right| \\
 & \leq \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(\frac{|q'_1 - q'_2|}{\psi'} |y_1|^2 + \frac{2|q_1 - q_2| |y_1 \bar{y}'_1|}{\psi'} + \frac{|q_1 - q_2| \psi'' |y_1|^2}{(\psi')^2} \right) \, dx. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Напомним, что вектор-функция $y(x)$ сосредоточена на $[h, +\infty]$. Из условий теоремы видно, что $(q'_1 - q'_2)/(q_1 + q_2)\psi' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому $|(q'_1 - q'_2)/(q_1 + q_2)\psi'| \leq \varepsilon_1(h)$ при $x \in [h, +\infty]$, где $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$. Тогда $|(q_1 - q_2)/\psi'| \leq \varepsilon_1(h)(q_1 + q_2)$. Отсюда получаем оценку первого слагаемого из выражения (5)

$$\int_0^{+\infty} \frac{|q'_1 - q'_2|}{\psi'} |y_1|^2 \, dx \leq \varepsilon_1(h) \int_0^{+\infty} (q_1 + q_2) |y_1|^2 \, dx. \quad (6)$$

Оценим второе слагаемое из (5):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{|q_1 - q_2|}{\psi'} |y_1 \bar{y}'_1| \, dx &= \int_0^{+\infty} |q_1 - q_2| \frac{|\bar{y}'_1|}{\sqrt{\psi''}} \frac{y_1 \sqrt{\psi''}}{\psi'} \, dx \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \frac{|q_1 - q_2|}{2} \left(\frac{|y'_1|^2}{\psi''} + \frac{|y_1|^2 \psi''}{(\psi')^2} \right) \, dx \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{|q_1 - q_2|}{\psi''} |y'_1|^2 \, dx + \int_0^{+\infty} \frac{|q_1 - q_2| \psi'' |y_1|^2}{(\psi')^2} \, dx.
 \end{aligned}$$

По условию теоремы, $(q_1 - q_2)/\psi'' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому $|(q_1 - q_2)/\psi''| \leq \varepsilon_2(h)$ при $x > h$, где $\varepsilon_2(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$. Далее, $\psi''/(\psi')^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому $|\psi''|/(\psi')^2 \leq \varepsilon_3(h)$, где $\varepsilon_3(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$. Отсюда последняя сумма не превосходит величины $\varepsilon_2(h) \int_0^{+\infty} |y'_1|^2 \, dx + \varepsilon_3(h) \int_0^{+\infty} (q_1 + q_2) |y_1|^2 \, dx$. Итак, второе слагаемое из (5) не превосходит величины

$$\varepsilon_2(h) \int_0^{+\infty} |y'_1|^2 \, dx + \varepsilon_3(h) \int_0^{+\infty} (q_1 + q_2) |y_1|^2 \, dx.$$

Оценив третье слагаемое из (5), используя условие $\psi''/(\psi')^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, получаем, что оно не превосходит величины $\varepsilon_4(h) \int_0^{+\infty} (q_1 + q_2) |y_1|^2 \, dx$, где $\varepsilon_4(h) \rightarrow 0$

при $x \rightarrow +\infty$. Итак, выражение (5) не превосходит величины

$$(\varepsilon_1(h) + \varepsilon_3(h) + \varepsilon_4(h)) \int_0^{+\infty} (q_1 + q_2) |y_1|^2 dx + \varepsilon_2(h) \int_0^{+\infty} |y'_1|^2 dx.$$

Аналогично оцениваются все остальные слагаемые из (4) (снова интегрируем по частям, применяем неравенство Коши–Буняковского и т.д.). В итоге для $B[y]$ получаем следующую оценку:

$$B[y] \leq \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx + \varepsilon(h) \int_0^{+\infty} (q_1 + q_2) |y|^2 dx + \varepsilon(h) \int_0^{+\infty} |y'|^2 dx,$$

где $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h) + \varepsilon_3(h) + \varepsilon_4(h)$. Этим лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Исследуем условия компактности множества $\{y : A[y] \leq 1\}$ относительно нормы $\|y\| = \sqrt{B[y]}$ (это равносильно дискретности спектра). По принципу расщепления [5] для дискретности спектра оператора (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mu > 0$ существовало такое $h = h(\mu)$, что $A[y] \geq \mu B[y]$ при $y \in C_0^\infty(h, \infty)$, т.е. $A[y] - \mu B[y] \geq 0$. Оценим сверху и снизу величину $A[y] - \mu B[y] \geq 0$, используя доказанную лемму:

$$\begin{aligned} A[y] - \mu B[y] &= A[y] - \mu(1 + \alpha(h)) \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx - \mu\beta(h) A[y] \\ &= (1 - \mu\beta(h)) A[y] - \mu(1 + \alpha(h)) \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx, \end{aligned}$$

где $\alpha(h) \rightarrow 0$, $\beta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$. Пусть h столь велико, что $-1/2 \leq \mu\beta(h) \leq 1/2$ и $-1/2 \leq \mu\alpha(h) \leq 1/2$. Тогда

$$\frac{1}{2} A[y] - \frac{3}{2} \mu(h) \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx \leq A[y] - \mu B[y] \leq \frac{3}{2} A[y] - \frac{1}{2} \mu(h) \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |y'|^2 dx - \frac{3\mu}{2} \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx \leq \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} |y'|^2 dx - \frac{\mu}{2} \int_0^{+\infty} \frac{q_1 + q_2}{2} |y|^2 dx \quad (7)$$

для любой вектор-функции $y(x)$, сосредоточенной на $[h, \infty)$. Из неравенства (7) вытекает, что равносильны следующие условия:

- а) для любого μ существует такое h , что $A[y] - \mu B[y] \geq 0$ при $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, взятой из $C_0^\infty(h, \infty)$;
- б) для любого N существует такое h , что

$$\int_h^{+\infty} |y'|^2 dx - N \int_h^{+\infty} |y|^2 \frac{q_1 + q_2}{2} dx \geq 0$$

при $y(x) \in C_0^\infty(h, \infty)$.

Но условие б) равносильно дискретности спектра задачи $y'' + \lambda(q_1 + q_2)y = 0$, $y(0) = 0$, $x \geq 0$ (снова по принципу расщепления), а это, в свою очередь, равносильно условию (2). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. М. Левитан, Г. А. Суворченкова, “Достаточные условия дискретности спектра уравнения Штурма–Лиувилля с операторным коэффициентом”, *Функци. анализ и его прил.*, **2**:2 (1968), 56–62.
- [2] Р. С. Исмагилов, “Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций”, *Матем. заметки*, **9** (1971), 667–676.
- [3] Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, “О спектре векторного оператора Шрёдингера”, *Докл. РАН*, **411**:4 (2006), 449–451.
- [4] М. Г. Гимадисламов, Р. С. Исмагилов, “О дискретности спектра оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор-функций”, *Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения*, Т. 4, Ин-т матем. с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 1996, 29–36.
- [5] И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматгиз, М., 1963.

М. Г. Гимадисламов

Башкирский государственный университет, г. Уфа

Поступило

28.06.2007