Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Теляковский, Об одном достаточном условии гармоничности функций двух переменных, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 628–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:13:49

Об одном достаточном условии гармоничности функций двух переменных

Д. С. Теляковский

Известно, что в утверждении о гармоничности непрерывных функций $u(x, y)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа, условие непрерывности можно ослабить. Г. П. Толстов заменил его условием ограниченности, затем автор – условием суммируемости. При этом условие суммируемости существенно ослабить уже нельзя.

В настоящей работе рассматривается обобщение уравнения Лапласа. Будем предполагать, что в каждой точке области u функции равна нулю сумма вторых производных (понимаемых в смысле Пеано) вдоль некоторой пары проходящих через эту точку ортогональных прямых, причем направления прямых пары в каждой точке, вообще говоря, свои. Доказано, что суммируемость таких функций достаточна для их гармоничности. Отказаться от условия ортогональности указанных прямых нельзя.

Библиография: 8 названий.

В 1925 г. Привалов доказал [1], что если непрерывная в области функция удовлетворяет уравнению Лапласа, то эта функция гармонична в области (число переменных произвольно, и предполагается существование только частных производных, входящих в уравнение Лапласа). В случае функций двух переменных предположение о непрерывности можно существенно ослабить. Толстов (1951, [2]) показал, что функцию достаточно предполагать ограниченной, а затем автор (1986, [3]) показал, что достаточно суммируемости функции (относительно плоской меры Лебега).

Положим

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{i}{(x + iy)^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad u(0, 0) = 0.$$

Функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду внутри единичного круга D , гармонична во всех точках D , кроме его центра $(0, 0)$, и $|u(x, y)|$ суммируема в D во всех положительных степенях, меньших 1. Этот пример показывает, что условие суммируемости существенно ослабить нельзя. Но оказалось, что при сохранении предположения о суммируемости функции оператор Лапласа можно понимать в более общем смысле.

Если в точке (x_0, y_0) функция удовлетворяет уравнению Лапласа, то это накладывает условие на функцию только на “крестике”, состоящем из двух пересекающихся

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00962) и программы АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1/6827).

в точке (x_0, y_0) взаимно перпендикулярных интервалов, параллельных координатным осям. В настоящей работе показывается, что в каждой точке области крестик может быть ориентирован произвольным образом. При этом отказаться от условия перпендикулярности составляющих крестик интервалов нельзя, а производные понимаются в смысле Пеано.

Введем некоторые обозначения. Точки комплексной плоскости будем обозначать как z, w, ζ , так и $(x, y), (u, v), (\xi, \eta)$ ($z = x + iy, w = u + iv, \zeta = \xi + i\eta$). Замкнутый круг радиуса r с центром в точке ζ будем обозначать $D(\zeta, r)$, а его границу — $C(\zeta, r)$. Если множество $B(\zeta)$ зависит от точки ζ , то положим $B(\zeta, r) := B(\zeta) \cap D(\zeta, r)$.

Ортогональным крестиком с центром в точке ζ будем называть множество, состоящее из двух ортогональных интервалов равной длины с серединой в точке ζ . Такой крестик будем обозначать $A(\zeta)$, а составляющие его интервалы — $a_1(\zeta)$ и $a_2(\zeta)$. Ясно, что ортогональный крестик, состоящий из интервалов длины 2σ , полностью определяется углом $\varphi, 0 \leq \varphi < \pi/2$, между положительным направлением оси Ox и интервалом крестика, ближайшим к Ox при повороте крестика вокруг точки ζ по часовой стрелке. Такой крестик обозначим $A(\zeta, \sigma, \varphi)$. Если величина угла φ будет не важна, то соответствующий крестик будем обозначать $A(\zeta, \sigma)$. Крестики будем также обозначать $K(\zeta), K(\zeta, \sigma), K(\zeta, \sigma, \varphi), E(\zeta)$ и т.д. Заметим, что концы интервалов, образующих крестик, крестик не принадлежат.

Если функция $u(z)$ определена в области G и в точке $w \in \partial G$ выполнено соотношение $\overline{\lim}_{z \rightarrow w, z \in G} u(z) \leq C$, то будем говорить, что функция $u(z)$ не превосходит числа C в граничной точке w области G . Положительную часть функции $u(z)$ будем обозначать $u^+(z) := \max\{u(z), 0\}$.

Пусть прямая l проходит через точку ζ области определения функции $u(z)$. Будем считать, что на l выбрана система координат с началом в ζ , точку на l будем обозначать z , а ее координату h . Функция $u(z)$ дважды дифференцируема в точке ζ вдоль l в смысле Пеано, если для некоторых чисел a_l и b_l выполнено соотношение

$$u(z) = u(\zeta) + a_l h + \frac{1}{2} b_l h^2 + o(h^2) \quad \text{при } z \rightarrow \zeta, \quad z \in l. \quad (1)$$

Если функция $u(x, y)$ удовлетворяет в точке ζ уравнению Лапласа, то вдоль проходящих через ζ прямых l_1 и l_2 , параллельных соответственно осям Ox и Oy , выполнено условие дифференцируемости (1), причем

$$b_{l_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{z=\zeta} \quad \text{и} \quad b_{l_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{z=\zeta}.$$

Выполнение уравнения Лапласа означает, что $b_{l_1} + b_{l_2} = 0$. Введем обобщение уравнения Лапласа, которое будет рассматриваться в настоящей работе. Пусть через точку ζ проходят две ортогональные прямые l_1 и l_2 , вдоль каждой из которых функция $u(z)$ удовлетворяет соотношению (1). Выражение $b_{l_1} + b_{l_2}$ будем называть параметром Лапласа $\Delta^\times u$ функции $u(z)$ в точке ζ относительно пары прямых l_1 и l_2 . Если конкретный выбор прямых l_1 и l_2 будет неважен, то будем говорить просто о параметре Лапласа $\Delta^\times u$.

Привалов рассматривал в [4] обобщенный параметр Лапласа $\Delta^* u$, в случае функций двух переменных равный пределу в точке ζ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{8}{r^2} \left(\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(\zeta, r)} u(z) dx dy - u(\zeta) \right). \quad (2)$$

Если функция $u(z)$ имеет в точке ζ второй дифференциал в обычном смысле, то она имеет в ζ как параметр Лапласа $\Delta^\times u$ относительно любой пары ортогональных прямых, проходящих через эту точку, так и обобщенный параметр Лапласа $\Delta^* u$ в смысле (2) и значения этих параметров равны.

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Если локально суммируемая в области G функция $u(x, y)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta^\times u = 0$ относительно некоторой пары проходящих через ζ ортогональных прямых, причем в разных точках области направления прямых, вообще говоря, различны, то функция $u(x, y)$ гармонична в G .*

Пример функции $u(x, y) = a^2 x^2 - y^2$ показывает, что от условия перпендикулярности интервалов крестиков $A(\zeta)$ отказаться нельзя. Ясно, что в каждой точке плоскости функция $u(x, y)$ имеет вторую производную вдоль любой прямой, причем вторые производные вдоль параллельных прямых совпадают во всех точках. Так как $u(x, y) \equiv 0$ вдоль прямых $y = \pm ax$, то вторые производные функции $u(x, y)$ вдоль прямых, параллельных прямым $y = \pm ax$ равны нулю, значит, равна нулю и их сумма, но при $a^2 \neq 1$ функция $u(x, y)$ не является гармонической. Также легко видеть, что в каждой точке области сумма вторых производных гармонической функции $v(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль пары неортогональных прямых может быть как положительной, так и отрицательной.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $u(x, y)$ определена в окрестности точки ζ и имеет в ζ второй дифференциал в смысле Пеано*

$$u(z) = u(\zeta) + [p(x - \xi) + q(y - \eta)] + \frac{1}{2}[r(x - \xi)^2 + 2s(x - \xi)(y - \eta) + t(y - \eta)^2] + o((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2), \quad z \rightarrow \zeta. \quad (3)$$

Тогда вдоль каждой прямой l_α , проходящей через точку ζ ,

$$l_\alpha: \begin{cases} x = \xi + h \cos \alpha, \\ y = \eta + h \sin \alpha, \end{cases} \quad h \in (-\infty, +\infty), \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

функция $u(x, y)$ дважды дифференцируема в точке ζ в смысле Пеано

$$u(z) = u(\zeta) + a_\alpha h + \frac{1}{2} b_\alpha h^2 + o(h^2), \quad z = \zeta + h e^{i\alpha}, \quad h \rightarrow 0, \quad (4)$$

и для каждого угла α

$$b_\alpha + b_{\alpha+\pi/2} = r + t. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя координаты x и y точки z прямой l_α в соотношение (3), получаем при $z \rightarrow \zeta$ (или, что то же, при $h \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} u(z) &= u(\zeta) + (p \cos \alpha + q \sin \alpha)h \\ &\quad + \frac{1}{2}(r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin^2 \alpha)h^2 + o(h^2) \\ &= u(\zeta) + (p \cos \alpha + q \sin \alpha)h + \frac{1}{2} \left(r \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} + s \sin 2\alpha + t \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) h^2 + o(h^2) \\ &= u(\zeta) + (p \cos \alpha + q \sin \alpha)h + \frac{1}{2} \left(\frac{r - t}{2} \cos 2\alpha + s \sin 2\alpha + \frac{r + t}{2} \right) h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Это выражение имеет вид (4), причем коэффициент b_α (вторая пеановская производная) равен

$$b_\alpha = \frac{r-t}{2} \cos 2\alpha + s \sin 2\alpha + \frac{r+t}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} b_\alpha + b_{\alpha+\pi/2} &= \frac{r-t}{2} \left(\cos 2\alpha + \cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) + s \left(\sin 2\alpha + \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) + (r+t) \\ &= \frac{r-t}{2} (\cos 2\alpha + \cos(2\alpha + \pi)) + s(\sin 2\alpha + \sin(2\alpha + \pi)) + (r+t) = r+t. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция $u(x, y)$ имеет в точке ζ второй дифференциал и удовлетворяет в ζ уравнению Лапласа, то $\Delta u|_\zeta = r+t = 0$. Поэтому из леммы 1 видно, что если функция $u(x, y)$ гармонична в области, то в каждой точке области функция $u(x, y)$ вдоль любой пары пересекающихся в этой точке ортогональных прямых удовлетворяет и уравнению Лапласа $\Delta^\times u = 0$.

ЛЕММА 2. Если непрерывная функция $u(x, y)$ в каждой точке области G удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta^\times u = 0$ вдоль некоторой пары проходящих через эту точку ортогональных прямых, то функция $u(x, y)$ гармонична в G .

Доказательство леммы следует рассуждениям Привалова из [1; теорема 2]. Доказательство Привалова приведено также в примечании к статье Петровского [6; с. 107].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна и функция $u(z)$ не является гармонической всюду в области G . Возьмем замкнутый круг $D \subset G$, внутри которого $u(z)$ не всюду гармонична. Обозначим $v(z)$ – решение задачи Дирихле в круге D со значениями $u(z)$ на ∂D . Положим $w(z) := u(z) - v(z)$. Функция $w(z)$ непрерывна в D , тождественно равна нулю на ∂D и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta^\times w(z) = 0$ всюду внутри D , параметр Лапласа $\Delta^\times w(z)$ подсчитывается вдоль тех же крестиков, что и параметр $\Delta^\times u(z)$.

По предположению функция $w(z)$ отлична от нуля в некоторых точках из D . Будем считать, что $\max_D w(z) > 0$, если это не так, вместо $w(z)$ будем рассматривать функцию $-w(z)$. Пусть

$$\max_D w(z) = w(z_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

В круге D положим

$$w_\varepsilon(z) := w(z) + \varepsilon((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) = w(z) + \varepsilon|z-z_0|^2, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{w(z_0)}{2 \operatorname{diam}^2 D} > 0.$$

Для точек $z \in \partial D$ расстояние $|z-z_0| < \operatorname{diam} D$ и $w(z) = 0$, поэтому на ∂D значения $w_\varepsilon(z) \leq w(z_0)/2$. Так как $w_\varepsilon(z) \geq w(z)$ в D и $w_\varepsilon(z_0) = w(z_0)$, то $\max_D w_\varepsilon(z) \geq w(z_0)$. Поэтому, поскольку функция $w_\varepsilon(z)$ непрерывна в D и ее максимум в D превосходит значения на ∂D , то $w_\varepsilon(z)$ достигает максимума строго внутри D .

По лемме 1 вдоль каждого ортогонального крестика с центром в любой точке круга D выполнено

$$\Delta^\times \varepsilon((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) = 4\varepsilon > 0.$$

Поэтому, если оператор $\Delta^\times$ брать вдоль тех же крестиков $A(z)$, вдоль которых $u(z)$ удовлетворяет уравнению $\Delta^\times u = 0$, то

$$\Delta^\times w_\varepsilon(z) = \Delta^\times(u(z) - v(z)) + \Delta^\times \varepsilon((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = b_{a_1}(z) + b_{a_2}(z) = 4\varepsilon > 0.$$

Пусть

$$\max_D w_\varepsilon(z) = w_\varepsilon(\zeta).$$

Значит, по крайней мере вдоль одного из интервалов $a_1(\zeta)$ и $a_2(\zeta)$ крестика $A(\zeta)$ коэффициент $b_{a_j}(\zeta)$, $j = 1, 2$ (вторая пеановская производная функции $w_\varepsilon(z)$ в точке ζ вдоль интервала $a_j(\zeta)$), положителен. В то же время, если рассматривать функцию $w_\varepsilon(z)$ на интервалах $a_1(\zeta)$, $a_2(\zeta)$, то ζ — точка максимума и поэтому коэффициенты $b_{a_1(\zeta)}$ и $b_{a_2(\zeta)}$ должны быть неположительными. Мы пришли к противоречию.

Значит, предположение о том, что функция $u(z)$ гармонична не всюду внутри области D неверно. Лемма доказана.

Следующая лемма аналогична некоторым леммам Меньшова (см., например, [7; лемма 1]); ее доказательство основано на идеях Меньшова.

ЛЕММА 3. Пусть множество P замкнуто относительно области G . Пусть функция $u(z)$ определена в G , непрерывна на $G \setminus P$ и в каждой точке $\zeta \in P$ производные числа функции $u(z)$ вдоль некоторого ортогонального крестика $E(\zeta)$ ограничены. Тогда найдется такая порция Π множества P (быть может, состоящая из одной точки) и такие положительные числа σ и L , что для каждой точки $\zeta \in \Pi$ существует ортогональный крестик $A(\zeta, \sigma)$, во всех точках z которого выполнено неравенство

$$|u(z) - u(\zeta)| \leq L|z - \zeta|. \quad (6)$$

При этом, если расстояние между точками $\zeta_1, \zeta_2 \in \Pi$ меньше $\sigma/2$, то

$$|u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| \leq L|\zeta_1 - \zeta_2|. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что если для некоторых положительных чисел r и k на ортогональных крестиках

$$K(\zeta_j, r) = a_1(\zeta_j) \cup a_2(\zeta_j), \quad j = 1, 2, \quad |\zeta_1 - \zeta_2| < \frac{r}{2},$$

выполнены неравенства

$$|u(z) - u(\zeta_j)| \leq k|z - \zeta_j|, \quad z \in K(\zeta_j, r), \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

то

$$|u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| \leq 2\sqrt{2}k|\zeta_1 - \zeta_2|. \quad (9)$$

Соотношение (9) очевидно выполнено, если $\zeta_2 \in K(\zeta_1, r)$ или $\zeta_1 \in K(\zeta_2, r)$. Пусть это не так. Обозначим через R квадрат с диагоналями $a_1(\zeta_1)$ и $a_2(\zeta_1)$. Отрезки $a_1(\zeta_1)$ и $a_2(\zeta_1)$ разбивают R на четыре равнобедренных прямоугольных треугольника. Обозначим через Δ тот из этих треугольников, которому принадлежит точка ζ_2 . Проведем через ζ_2 прямую, параллельную гипотенузе треугольника Δ , и обозначим через Δ_{ζ_2} — треугольник, который эта прямая отделяет от Δ . Точка ζ_2 лежит на гипотенузе треугольника Δ_{ζ_2} . Поэтому в прямоугольном равнобедренном треугольнике Δ_{ζ_2} расстояние от вершины прямого угла ζ_1 до гипотенузы не превосходит $|\zeta_1 - \zeta_2|$ и, значит, $\text{diam } \Delta_{\zeta_2} \leq \sqrt{2}|\zeta_1 - \zeta_2|$. Так как $|\zeta_1 - \zeta_2| < r/2$, то $\text{diam } \Delta_{\zeta_2} < r$.

По крайней мере один из интервалов крестика $K(\zeta_2, r)$ не параллелен гипотенузе треугольника Δ_{ζ_2} , обозначим этот интервал a . С каждой стороны от гипотенузы Δ_{ζ_2} лежит по половине интервала a и длина этой половины равна r . Так как $\text{diam } \Delta_{\zeta_2} < r$, то эта половина пересекает один из катетов Δ_{ζ_2} , а эти катеты лежат на крестике $K(\zeta_1, r)$. Точку пересечения обозначим ζ' . Ясно, что величины $|\zeta_1 - \zeta'|$ и $|\zeta_2 - \zeta'|$ не превосходят $\text{diam } \Delta_{\zeta_2} < r$. Поэтому, поскольку на крестиках $K(\zeta_1, r)$ и $K(\zeta_2, r)$ выполнено неравенство (8) и $\zeta' \in K(\zeta_1, r) \cap K(\zeta_2, r)$, то

$$|u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| \leq |u(\zeta_1) - u(\zeta')| + |u(\zeta') - u(\zeta_2)| \leq k|\zeta_1 - \zeta'| + k|\zeta' - \zeta_2| \leq 2k \text{diam } \Delta_{\zeta_2}.$$

Так как $\text{diam } \Delta_{\zeta_2} \leq \sqrt{2}|\zeta_1 - \zeta_2|$, то отсюда следует неравенство (9).

Теперь покажем, что существуют числа σ , L и порция Π , о которых говорилось в условии леммы. К множеству P_m отнесем те точки ζ из P , для которых во всех точках $z \in E(\zeta, 1/m)$ выполнено неравенство

$$|u(z) - u(\zeta)| \leq m|z - \zeta|.$$

Ясно, что $P = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$. Множество P замкнуто относительно G , поэтому имеет тип G_δ . Значит, по теореме Бэра о категориях [8; с.87] найдется множество P_q , всюду плотное на некоторой порции Π множества P . Положим $\sigma := 1/q$. Будем считать, что расстояние от Π до ∂G больше σ . Определим крестики $A(\zeta)$ для точек порции Π .

Для точек $\zeta \in \Pi \cap P_q$ положим $A(\zeta) := E(\zeta, \sigma)$. При $L = 1/\sigma = q$ неравенство (6) для точек $z \in A(\zeta)$ выполнено по определению множества P_q . Если $\Pi = P_q$ (так будет, в частности, если Π состоит из изолированных точек), то крестики $A(\zeta)$ определены для всех точек порции Π и лемма доказана.

Определим теперь крестики $A(\zeta)$ для точек ζ множества $\Pi \setminus P_q$. Множество P_q всюду плотно на Π , поэтому найдется сходящаяся к ζ последовательность $\{\zeta_n\}$ точек множества P_q . По условию леммы для точки ζ найдутся такой крестик $E(\zeta, r)$ и такое число $k > 0$, что во всех точках $z \in E(\zeta)$ выполнено неравенство (8). На всех крестиках $A(\zeta_n)$ неравенство (8) выполняется с постоянной $L = 1/\sigma$. Поэтому, если $|\zeta - \zeta_n| < \min\{r, \sigma\}/2$, то по неравенству (9) справедливо соотношение $|u(\zeta) - u(\zeta_n)| < 2\sqrt{2} \max\{k, L\}|\zeta - \zeta_n|$ и, следовательно, $u(\zeta_n) \rightarrow u(\zeta)$ при $n \rightarrow \infty$.

Последовательность углов $\{\varphi_n\}$, определяющих крестики $A(\zeta_n)$, ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$. Ее предел обозначим φ . Для точки ζ положим $A(\zeta) := K(\zeta, \sigma, \varphi)$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, будем считать, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$. Так определенные интервалы крестика $A(\zeta)$ являются предельными положениями интервалов крестиков $A(\zeta_n)$.

Проверим, что во всех точках $w \in A(\zeta)$ при $L = 1/\sigma$ выполнено неравенство (6). Надо рассмотреть два случая: $w \in G \setminus P$ и $w \in P$. Сначала покажем, что в обоих случаях найдется последовательность точек $\{w_n\}$, $w_n \in A(\zeta_n)$, $w_n \rightarrow w$, вдоль которой $u(w_n) \rightarrow u(w)$.

По условию леммы функция $u(z)$ непрерывна на $G \setminus P$, поэтому для точек $w \in G \setminus P$ в качестве $\{w_n\}$ можно взять любую последовательность точек $w_n \in A(\zeta_n)$, сходящуюся к w .

Если точка $w \in P$, то по условию леммы вдоль некоторого ортогонального крестика $E(w, d)$ производные числа функции $u(z)$ в точке w ограничены. Возьмем произвольное положительное $\rho < \min\{(\sigma - |w - \zeta|)/2, d\}$. Пусть R_ρ – квадрат, у которого интервалы крестика $E(w, \rho)$ являются диагоналями. Ясно, что каждая прямая,

проходящая через любую точку квадрата R_ρ , пересекает диагонали R_ρ , т.е. пересекает интервалы крестика $E(w, \rho)$. Круг $D(w, \rho/\sqrt{2})$ целиком лежит в квадрате R_ρ . Интервалы крестика $A(\zeta)$ являются предельными положениями интервалов крестиков $A(\zeta_n)$. Поэтому, начиная с достаточно больших n , крестики $A(\zeta_n)$ пересекают круг $D(w, \rho/\sqrt{2})$, а значит, и крестики $E(w, \rho) \subset E(w, d)$. Следовательно, при этих n крестики $A(\zeta_n)$ пересекают крестик $E(w, d)$ на расстоянии от w , не превосходящем ρ . Поскольку ρ – произвольное достаточно малое положительное число, выбирая в качестве w_n соответствующую точку пересечения $A(\zeta_n) \cap E(w, d)$, мы получим последовательность $w_n \rightarrow w$. При номерах n , при которых крестики $A(\zeta_n)$ и $E(w, d)$ не пересекаются, в качестве w_n можно взять произвольную точку крестика $A(\zeta_n)$. Так как производные числа функции $u(z)$ в точке w вдоль крестика $E(w, d)$ ограничены, то $u(w_n) \rightarrow u(w)$.

Теперь проверим выполнение неравенства (6). Имеем

$$|u(w) - u(\zeta)| \leq |u(w) - u(w_n)| + |u(w_n) - u(\zeta_n)| + |u(\zeta_n) - u(\zeta)|.$$

Первое и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, для второго при каждом n выполнено неравенство (8) при $k = 1/\sigma$, причем $|w_n - \zeta_n| \rightarrow |w - \zeta|$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$|u(w) - u(\zeta)| \leq \frac{1}{\sigma} |w - \zeta|.$$

Неравенство (8) при $k = 1/\sigma$ доказано. Как было показано в начале доказательства леммы, из (8) следует выполнение неравенства (9) в достаточно близких друг к другу точках из Π .

Для доказательства теоремы точные значения постоянных Липшица в неравенствах (6) и (7) не важны. Положим $L := 2\sqrt{2}/\sigma$. Поскольку такое L не меньше постоянных из неравенств (8) и (9) при $k = 1/\sigma$, то из (8) и (9) следуют соответственно неравенства (6) и (7).

Лемма доказана.

Нам потребуется следующий вариант леммы Карлемана.

ЛЕММА 4. Пусть область G лежит в открытом угле величины $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leq 2$, с вершиной в точке $z = 0$. Пусть субгармоническая функция $u(z)$ ограничена в G сверху числом M и для некоторого круга $D(0, R)$ во всех точках ∂G , принадлежащих $D(0, R)$ (за исключением, быть может, точки $z = 0$, если она лежит на ∂G), не превосходит сверху числа m , $m < M$. Тогда во всех точках $z \in G \cap D(0, R)$ выполнено неравенство

$$u(z) \leq m + (M - m) \frac{4}{\pi} \left(\frac{|z|}{R} \right)^{1/\alpha}. \quad (10)$$

Из доказательства леммы будет видно, что оценка (10) точна по порядку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное число m' , $m < m' < M$. Обозначим D_α сектор круга $D(0, R)$, который выделяется из $D(0, R)$ углом раствора $\alpha\pi$, содержащим область G . В секторе D_α положим

$$u_1(z) = \begin{cases} \max\{u(z) - m', 0\} & \text{для } z \in D_\alpha \cap G, \\ 0 & \text{для } z \in D_\alpha \setminus G. \end{cases}$$

Внутри области $G \cap D_\alpha$ функция $u_1(z)$ субгармонична как максимум двух субгармонических функций. В каждой точке $\zeta \in \partial G$, $\zeta \neq 0$, лежащей внутри $D(0, R)$, по условию леммы $\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in G} u(z) \leq m$, и поскольку $m < m'$, то найдется окрестность $U(\zeta)$, для которой на $U(\zeta) \cap G$ выполнено неравенство $u(z) < m'$. Тогда по определению $u_1(z)$ на $U(\zeta) \cap D_\alpha$ тождественно $u_1(z) \equiv 0$, это же тождество выполняется в некоторой окрестности каждой точки множества $D_\alpha \setminus \overline{G}$. Точки ζ радиусов круга $D(0, R)$, ограничивающих сектор D_α с боков, являются либо внешними, либо граничными точками области G . Поэтому, если $\zeta \neq 0$, то для некоторой окрестности $U(\zeta)$ на $U(\zeta) \cap D_\alpha$ тождественно $u_1(\zeta) \equiv 0$. Таким образом, функция $u_1(z)$ субгармонична внутри D_α , ограничена в D_α числом $M' := M - m'$ и не превосходит нуля на сторонах сектора D_α , кроме, быть может, точки $z = 0$.

При отображении $w = z^{1/\alpha}$ сектор D_α перейдет в полукруг радиуса $R_1 := R^{1/\alpha}$, обозначим этот полукруг D_1 . Будем считать, что полукруг D_1 лежит в верхней полуплоскости, тогда его граница ∂D_1 состоит из отрезка $[-R_1; R_1]$ и дуги C_{R_1} — верхней половины окружности $C(0, R_1)$. Функция $v(w) = v(z^{1/\alpha}) := u_1(z)$ является ограниченной субгармонической внутри D_1 функцией, причем на дуге C_{R_1} функция $v(w)$ не превосходит числа M' , а на диаметре $[-R_1; R_1]$, кроме, быть может, его концов и середины, $v(w)$ не превосходит нуля.

В полукруге D_1 рассмотрим функцию

$$v_1(w) := \frac{2}{\pi}(\arg(w + R_1) + (\pi - \arg(w - R_1))).$$

Эта функция является гармонической и равна внешнему углу при вершине w в треугольнике Δ_w с вершинами в точках w , R_1 , $-R_1$, деленному на $\pi/2$. Чтобы оценить функцию $v_1(w)$ сверху, рассмотрим внутренний угол при вершине w треугольника Δ_w , $w \in D_1$. Величину этого угла обозначим $\varphi(w)$.

Возьмем произвольную точку $w_0 \in D_1$. Угол, вписанный в окружность и опирающийся на хорду с концами в точках A и B , равен половине угловой меры той дуги окружности с концами в точках A и B , которая не содержит вершины вписанного угла. Поэтому во всех точках w , лежащих внутри D_1 на дуге окружности, проходящей через точки w_0 , R_1 , $-R_1$, функция $\varphi(w)$ принимает одно и то же значение.

Обозначим C_a , $a \leq 0$, окружность с центром в точке ia , проходящую через точки $-R_1$ и R_1 . Дуга окружности C_a , лежащая в верхней полуплоскости, лежит в полукруге D_1 , причем $C_0 = C_{R_1}$, а отрезок $[-R_1; R_1]$ будем считать дугой окружности бесконечного радиуса. Когда центр окружности C_a пробегает отрицательную часть мнимой оси от $i(-\infty)$ до 0, дуга окружности C_a , лежащая в верхней полуплоскости, непрерывно и монотонно деформируется от отрезка $[-R_1; R_1]$ до полуокружности C_{R_1} . При этом значение функции $\varphi(w)$ на дугах $C_a \cap D_1$ уменьшается от π на отрезке $[-R_1; R_1]$ до $\pi/2$ на C_{R_1} . Следовательно, на полукругах $D(0, r) \cap D_1$, $r \leq R_1$, функция $\varphi(w)$ принимает минимальное значение в точке $w = ir$. Поэтому в каждой точке $w \in D_1$ выполнено неравенство

$$\varphi(w) \geq \varphi(i|w|) = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{|w|}{R_1}.$$

По своему определению функция

$$v_1(w) = \frac{2}{\pi}(\pi - \varphi(w)).$$

Поэтому внутри D_1 функция $v_1(z)$ удовлетворяет неравенству

$$v_1(w) \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{|w|}{R_1} < \frac{4}{\pi} \frac{|w|}{R_1}, \quad (11)$$

на открытой дуге C_{R_1} выполнено тождество $v_1(w) \equiv 1$, а на интервале $(-R_1; R_1)$ – тождество $v_1(w) \equiv 0$.

Сравнивая на ∂D_1 значения ограниченных субгармонических в D_1 функций $v_1(w)$ и $v(w)$, по обобщенному принципу максимума получаем, что в полукруге D_1 справедливо неравенство $v(w) \leq M'v_1(w)$. Поэтому из соотношения (11) при обратном отображении $z = w^\alpha$ полукруга D_1 на сектор D_α получаем следующую оценку функции $u_1(z)$ в секторе D_α :

$$u_1(z) = u_1(w^\alpha) = v(w) \leq M'v_1(w) < M' \frac{4}{\pi} \frac{|w|}{R_1} = M' \frac{4}{\pi} \left(\frac{|z|}{R} \right)^{1/\alpha}. \quad (12)$$

В области $G \cap D(0, R)$ по определению функции $u_1(z)$ выполнено неравенство $u(z) \leq u_1(z) + m'$. Поскольку $M' = M - m'$, то из (12) следует, что

$$u(z) \leq m' + (M - m') \frac{4}{\pi} \left(\frac{|z|}{R} \right)^{1/\alpha}, \quad z \in G.$$

Отсюда при $m' \rightarrow m + 0$ получаем неравенство (10).

Непосредственно из леммы 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть область G лежит в некотором угле с вершиной в точке ζ . Если субгармоническая в G функция $u(z)$ ограничена сверху числом M и не превосходит некоторого m , $m < M$, во всех точках ∂G , лежащих внутри некоторого круга $D(\zeta, r)$, за исключением, быть может, точки ζ , то $u(z)$ не превосходит m в точке ζ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Предположим, что теорема неверна и функция $u(z)$ гармонична не всюду в области G . Обозначим P – исключительное множество функции $u(z)$, т.е. множество точек области G , в любой окрестности каждой из которых $u(z)$ не всюду гармонична. Ясно, что множество P замкнуто относительно области G .

В силу леммы 3 найдутся такая порция Π множества P и такие положительные числа σ и L , что для каждой точки $\zeta \in \Pi$ определен ортогональный крестик $A(\zeta) = A(\zeta, \sigma)$, на котором выполнено условие (6). Можно считать, что $\operatorname{diam} \Pi < \sigma/2$ и порция Π лежит на расстоянии больше σ от ∂G . Тогда вдоль порции Π функция $u(z)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L и для всех точек $\zeta \in \Pi$ крестики $A(\zeta)$ целиком лежат в G . Обозначим $D = D(\omega, R)$ круг, определяющий порцию Π , т.е. круг, для которого $\Pi = P \cap D$. Так как $\operatorname{diam} \Pi < \sigma/2$, то можно считать, что и $\operatorname{diam} D < \sigma/2$.

Сначала докажем ограниченность функции $u(z)$ внутри круга $D(\omega, R/2)$.

Будем считать, что центр круга D – точка ω – принадлежит порции Π и что $u(\omega) = 0$. Возьмем круг $D(\eta, r)$ с центром в точке $\eta \in \Pi$ радиуса $r < \sigma/2$. Положим

$$\mathcal{A}(\eta, r) := \overline{\bigcup_{\zeta \in \Pi \cap D(\eta, r)} A(\zeta, 2r)}.$$

Вдоль порции Π функция $u(z)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L , и для каждой точки $\zeta \in \Pi$ на крестике $A(\zeta)$ она удовлетворяет неравенству (6). Возьмем произвольную точку $z \in \bigcup_{\zeta \in \Pi \cap D(\eta, r)} A(\zeta, 2r)$, пусть точка z лежит на крестике $A(\zeta, 2r)$, $\zeta \in \Pi \cap D(\eta, r)$. Тогда выполнены соотношения

$$|u(z) - u(\eta)| \leq |u(z) - u(\zeta)| + |u(\zeta) - u(\eta)| \leq L|z - \zeta| + L|\zeta - \eta| \leq L \cdot 2r + Lr = 3Lr. \quad (13)$$

Так как при замыкании множества $\bigcup_{\zeta \in \Pi \cap D(\eta, r)} A(\zeta, 2r)$ к нему могут добавляться только точки, в некоторой окрестности которых функция $u(z)$ гармонична и, следовательно, непрерывна, то неравенство (13) выполняется во всех точках множества $\mathcal{A}(\eta, r)$. Поскольку $u(\omega) = 0$ и $\text{diam } \Pi < \sigma$, из соотношения (13) следует, что на множестве

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{\zeta \in \Pi \cap D} A(\zeta, \sigma)}$$

функция $u(z)$ ограничена $|u(z)| \leq 3L\sigma =: m$.

Для точек $\zeta \in \Pi \subset D$ интервалы крестиков $A(\zeta)$ имеют длину 2σ и их середины лежат в точке $\zeta \in D$. Поэтому, так как $\text{diam } D < \sigma/2$, то каждый крестик $A(\zeta)$ разбивает круг D на четыре выпуклые части. Следовательно, множество $D \setminus \mathcal{A}$ состоит из непересекающихся выпуклых компонент. Пусть Δ – одна из них. По построению множества $\mathcal{A}$ компонента Δ может содержать точки порции Π только на своей границе. Граница $\partial\Delta$ лежит на множестве $\mathcal{A}$ и, быть может, на ∂D . Покажем, что во всех точках $w \in \partial\Delta$, лежащих внутри D , выполнено неравенство $\lim_{z \rightarrow w, z \in \Delta} |u(z)| \leq m$. На множестве $D \setminus \Pi$ функция $u(z)$ непрерывна, поэтому это неравенство выполняется во всех точках $\partial\Delta$, лежащих внутри круга D и не принадлежащих порции Π . Рассмотрим теперь точки $\partial\Delta$, принадлежащие порции Π .

Покажем сначала, что на $\partial\Delta$ может лежать не более четырех точек порции Π . Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ – точки из Π , лежащие на $\partial\Delta$. Так как множество Δ выпукло, то минимальная выпуклая оболочка точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ является выпуклым k -угольником, лежащим в Δ . Сумма углов выпуклого k -угольника равна $\pi(k-2)$. В то же время по определению множества $\mathcal{A}$ для каждой точки ζ_j , $j = 1, \dots, k$, область Δ лежит в прямом угле с вершиной в ζ_j , и поэтому сумма углов нашего k -угольника не превосходит $\pi k/2$. Поэтому должно выполняться неравенство $\pi(k-2) \leq \pi k/2$ и поэтому $k \leq 4$.

Ясно, что множество компонент множества $D \setminus \mathcal{A}$ не более чем счетно. На границе каждой компоненты лежит не более четырех точек порции Π . Поэтому если потребуется, можно так уменьшить радиус R круга $D = D(\omega, R)$, определяющего порцию Π , чтобы на окружности $C(\omega, R)$ не было точек порции Π , лежащих на границе какой-либо из компонент множества $D \setminus \mathcal{A}$.

Так как точек порции Π , лежащих на $\partial\Delta$, не больше четырех, то для каждой точки $\zeta \in \Pi \cap \Delta$ (если такие точки есть) найдется круг $D(\zeta, r)$, для которого замыкание $\overline{\Delta \cap D(\zeta, r)}$ не содержит точек из Π кроме ζ . В проколотом круге $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$ определим функцию $u^*(z)$, положив

$$u^*(z) := \begin{cases} \max\{|u(z)|, m+1\}, & z \in D(\zeta, r) \cap \Delta, \\ m+1, & z \in D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\} \setminus \Delta \end{cases} \quad (14)$$

(m – число, ограничивающее $|u(z)|$ на множестве $\mathcal{A}$).

Функция $u^*(z)$ субгармонична на $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$. Действительно, внутри Δ функция $u^*(z)$ субгармонична как максимум двух субгармонических функций, а в некоторой окрестности каждой из остальных точек $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$ функция $u^*(z) \equiv m + 1$ и поэтому субгармонична. Поскольку функция $u(z)$ суммируема на $D(\zeta, r) \subset G$, функция $u^*(z)$ суммируема на $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$.

Возьмем точку $w \in D(\zeta, r/2)$, $w \neq \zeta$. Круг $D(w, |w - \zeta|)$ лежит в проколотом круге $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$, внутри которого функция $u^*(z)$ субгармонична и положительна. Поэтому по неравенству среднего

$$u^*(w) \leq \frac{1}{\pi|w - \zeta|^2} \iint_{D(w, |w - \zeta|)} u^*(z) dx dy \leq \frac{1}{\pi|w - \zeta|^2} \iint_{D(\zeta, r)} u^*(z) dx dy.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла отсюда получаем, что

$$u^*(w) = o(|w - \zeta|^{-2}) \quad \text{при } w \rightarrow \zeta.$$

Воспользуемся следующей теоремой типа Фрагмена–Линделёфа для субгармонических функций.

Пусть область Ω лежит в угле величины $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leq 2$, с вершиной в точке $z = 0$, причем $0 \in \partial\Omega$. Пусть субгармоническая в Ω функция $\varphi(z)$ не превосходит некоторого C во всех точках $\partial\Omega \setminus \{0\}$ и при $z \rightarrow 0$, $z \in \Omega$, справедлива оценка $\varphi^+(z) = o(|z|^{-1/\alpha})$. Тогда неравенство $\varphi(z) \leq C$ выполняется во всей области Ω .

Эту теорему можно получить из утверждения, приведенного в монографии Привалова [4; с. 87], при помощи замены $z = 1/w$. Как было отмечено самим Приваловым, предположение, сделанное в [4], о том, что область Ω является углом раствора $\alpha\pi$, при доказательстве не использовалось и приведенная в [4] теорема остается верной, если Ω лежит в угле раствора $\alpha\pi$. Впрочем, этот случай легко свести к случаю угла, если вместо функции $u(z)$ рассматривать функцию $u^*(z)$, определенную внутри угла аналогично (14).

Область Δ лежит в секторе круга $D(\zeta, r)$ раствора $\pi/2$. На радиусах круга $D(\zeta, r)$, ограничивающих этот сектор с боков, функция $u^*(z)$ не превосходит $m + 1$. Действительно, если точка w на радиусе лежит на $\partial\Delta$, то это точка множества $\mathcal{A}$, в которой функция $u(z)$ непрерывна и $|u(w)| \leq m$, а поэтому $|u(z)| < m + 1$ в ее некоторой окрестности, в которой по определению $u^*(z)$ выполнено тождество $u^*(z) \equiv m + 1$; если точка на радиусе не лежит на $\partial\Delta$, то эта точка лежит во внешности области Δ и в любой ее окрестности, не пересекающейся с Δ по определению $u^*(z)$ выполнено тождество $u^*(z) \equiv m + 1$. На замкнутой дуге $\Delta \cap C(\zeta, r)$ функция $u^*(z)$ субгармонична и поэтому ограничена сверху. Согласно приведенной теореме типа Фрагмена–Линделёфа функция $u^*(z)$ ограничена на $\Delta \cap D(\zeta, r)$. По определению функции $u^*(z)$ на $\Delta \cap D(\zeta, r)$ выполнено неравенство $|u(z)| \leq u^*(z)$, поэтому функция $u(z)$ также ограничена на $\Delta \cap D(\zeta, r)$. Так как на границе компоненты Δ может лежать только конечное число точек порции Π , а во всех остальных точках замыкания $\bar{\Delta}$ функция $u(z)$ непрерывна, то отсюда следует ограниченность $u(z)$ на компоненте Δ . Число, которым функция $u(z)$ ограничена на Δ , может зависеть, вообще говоря, от Δ .

Возьмем произвольную компоненту Δ множества $D \setminus \mathcal{A}$. Во всех точках $\partial\Delta \cap \mathcal{A}$, не принадлежащих порции Π , функция $u(z)$ непрерывна и по определению величины m значения $|u(z)|$ не превосходят m . По определению круга $D = D(\omega, R)$ все точки из Π , лежащие на $\partial\Delta$, лежат строго внутри D , поэтому для каждой точки

$\zeta \in \Pi \cap \partial\Delta$, найдется круг $D(\zeta, r)$, в котором нет других точек из Π , лежащих на $\partial\Delta$. Поскольку во всех граничных точках $\partial\Delta \setminus \{\zeta\}$, лежащих внутри круга $D(\zeta, r)$, ограниченная субгармоническая функция $|u(z)|$ не превосходит числа m при приближении к граничной точке изнутри компоненты Δ , и компонента Δ лежит в угле с вершиной в точке ζ , по следствию из леммы 4 функция $|u(z)|$ не превосходит числа m и в точке ζ . Таким образом, функция $|u(z)|$ не превосходит числа m во всех граничных точках $\partial\Delta$, лежащих внутри круга D .

Теперь покажем, что функция $u(z)$ ограничена на круге $D(\omega, R/2)$. Для произвольной компоненты Δ множества $D \setminus \mathcal{A}$ рассмотрим функцию

$$u_{\Delta}(z) := \begin{cases} \max\{|u(z)|, m+1\}, & z \in \Delta, \\ m+1, & z \in D(\omega, R) \setminus \Delta. \end{cases}$$

Как и раньше, проверяется, что эта функция субгармонична внутри круга $D(\omega, R)$. Так как функция $|u(z)|$ интегрируема на $D(\omega, R) \subset G$, то функция $u_{\Delta}(z)$ интегрируема в круге $D(\omega, R)$ и

$$0 < \iint_{D(\omega, R)} u_{\Delta}(z) dx dy \leq \iint_{D(\omega, R)} |u(z)| dx dy + (m+1)\pi R^2.$$

Последний член в этой цепочке неравенств не зависит от выбора компоненты Δ , обозначим его K . Возьмем произвольную точку $\zeta \in D(\omega, R/2)$. Круг $D(\zeta, R/2)$ лежит в круге $D(\omega, R)$, внутри которого функция $u_{\Delta}(z)$ субгармонична. Поэтому по неравенству среднего

$$\begin{aligned} u_{\Delta}(\zeta) &\leq \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint_{D(\zeta, R/2)} u_{\Delta}(z) dx dy \\ &\leq \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint_{D(\omega, R)} u_{\Delta}(z) dx dy \leq \frac{K}{\pi(R/2)^2} =: K'. \end{aligned} \quad (15)$$

По определению функций $u_{\Delta}(z)$ на каждой компоненте Δ выполнено неравенство $|u(z)| \leq u_{\Delta}(z)$. Так как величина K' не зависит от выбора компоненты Δ , то из неравенства (15) следует, что на множестве $D(\omega, R/2) \setminus \mathcal{A}$ значения $|u(z)| \leq K'$. На множестве $\mathcal{A}$ значения $|u(z)| \leq m$. Следовательно, функция $u(z)$ ограничена в круге $D(\omega, R/2)$, причем в этом круге есть точки исключительного множества, например, точка ω .

Теперь докажем непрерывность $u(z)$ в круге $D(\omega, R/2)$.

Непрерывность функции $u(z)$ надо проверять только в точках порции Π исключительного множества. Предположим, что функция $u(z)$ имеет разрыв в точке $\zeta \in \Pi \cap D(\omega, R/2)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $u(\zeta) = 0$. Тогда $\lim_{z \rightarrow \zeta} |u(z)| = \varepsilon > 0$. Поэтому найдется круг $D(\zeta, r)$, в котором выполнено неравенство $|u(z)| < 5\varepsilon/4$, причем в любой окрестности точки ζ есть точки z' , в которых $|u(z')| > 3\varepsilon/4$.

По предположению $u(\zeta) = 0$, поэтому из неравенства (13) получаем, что на множестве $\mathcal{A}(\zeta, r)$ справедливо неравенство $|u(z)| < 3Lr$. Поэтому при достаточно малом радиусе r на $\mathcal{A}(\zeta, r)$ (в частности, во всех точках множества $\Pi \cap D(\zeta, r)$) будет $|u(z)| < \varepsilon/4$. Значит, функция $u(z)$ гармонична в некоторой окрестности каждой точки $z' \in D(\zeta, r/5)$, в которой $|u(z')| > 3\varepsilon/4$. Возьмем такую точку z' . Обозначим Δ' компоненту множества $D(\zeta, r/2) \setminus \mathcal{A}(\zeta, r)$, в которой лежит точка z' . В области Δ' значения $|u(z)|$ не превосходят $5\varepsilon/4$. Функция $u(z)$ непрерывна во всех

точках $\partial\Delta'$, не принадлежащих порции Π , которые лежат внутри круга $D(\zeta, r/2)$. В этих точках $|u(z)| \leq \varepsilon/4$. На $\partial\Delta'$ может лежать не более 4 точек η порции Π исключительного множества, причем компонента Δ' лежит в прямом угле с вершиной в точке η . Следовательно, так как функция $u(z)$ ограничена в Δ' , то по следствию из леммы 4 имеем

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \eta, z \in \Delta'} u(z) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, во всех точках $\partial\Delta'$, лежащих внутри круга $D(\zeta, r/2)$, функция $u(z)$ не превосходит $\varepsilon/4$. Поэтому по лемме 4 в точках $z \in \Delta'$ выполнено неравенство

$$|u(z)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon \frac{4}{\pi} \left(\frac{|z - \zeta|}{r/2} \right)^2. \quad (16)$$

Это неравенство выполнено и в точке z' . Так как $z' \in D(\zeta, r/5)$, то из (16) получаем, что

$$|u(z')| < \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon \frac{4}{\pi} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это противоречит тому, что по предположению $|u(z')| > 3\varepsilon/4$.

Следовательно, предположение о том, что у функции $u(z)$ есть точки разрыва, неверно, и функция $u(z)$ непрерывна. Тогда по лемме 2 функция $u(z)$ гармонична. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Priwaloff, “Sur les fonctions harmoniques”, *Матем. сб.*, **32**:3 (1925), 464–471.
- [2] Г. П. Толстов, “Об ограниченных функциях, удовлетворяющих уравнению Лапласа”, *Матем. сб.*, **29**:3 (1951), 559–564.
- [3] Д. С. Теляковский, “Об одном обобщении теоремы Лумана–Меньшова”, *Матем. заметки*, **39**:4 (1986), 539–549.
- [4] И. И. Привалов, *Субгармонические функции*, Математика в монографиях. Основная серия, **2**, ОНТИ, М.–Л., 1937.
- [5] Д. С. Теляковский, “Об одном достаточном условии гармоничности функций двух переменных”, *Современные методы теории краевых задач*, Материалы Воронежской весенней математической школы “Понтрягинские чтения – XVII”, ВГУ, Воронеж, 2006, 177–178.
- [6] И. Г. Петровский, “Метод Перрона решения задачи Дирихле”, *УМН*, 1941, № 8, 107–114.
- [7] D. Menchoff, “Sur la généralisation des conditions de Cauchy–Riemann”, *Fund. Math.*, **25** (1935), 59–97.
- [8] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.

Д. С. Теляковский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: dtelyakov@mail.ru

Поступило

05.05.2007

Исправленный вариант

22.12.2008