Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Найденко, О стягиваемости полупространств частичной выпуклости, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 915–926

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:21:11

О стягиваемости полупространств частичной выпуклости

В. Г. Найденко

Исследуется проблема Финка–Вуда о стягиваемости полупространств частичной выпуклости. Доказано, что существует связное полупространство орто-выпуклости в трехмерном пространстве, которое не является односвязным, что опровергает гипотезу Финка–Вуда в общем случае. В частном случае показано, что если множество направлений частичной выпуклости содержит базис линейного n -мерного пространства, то все направленные полупространства частичной выпуклости являются стягиваемыми.

Библиография: 7 названий.

Теория выпуклости представляет собой раздел геометрии, который находит широкое применение в других областях математики, таких как линейная алгебра, статистика, теория чисел, комбинаторика и оптимизация. Прикладное значение классической теории выпуклости заключается в том, что она нередко позволяет разработать эффективные методы решения многих проблем. Однако требование выпуклости часто является слишком жестким. В практических задачах множества часто могут не удовлетворять условию выпуклости. Исследование прикладных проблем, например, задачи синтеза интегральных схем, обработки изображений, проектирования баз данных и др., приводит к необходимости введения нетрадиционных понятий выпуклости, например, выпуклости по заданным направлениям, или частичной выпуклости [1]–[4].

Важным аспектом в исследовании частично выпуклых множеств является изучение их топологических свойств. В монографии [5] Финк и Вуд сформулировали следующую гипотезу: всякое связное полупространство частичной выпуклости является стягиваемым в пространстве $\mathbb{R}^n$, если множество направляющих гиперплоскостей имеет *свойство пересечения в точке*. Цель настоящего исследования – решить проблему Финка–Вуда для общего случая и для случая направленных полупространств частичной выпуклости. Дадим необходимые определения [1].

Пусть в n -мерном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ задано фиксированное множество единичных векторов (направлений) $O \subseteq S^{n-1}$, где S^{n-1} – единичная сфера. Прямая, параллельная какому-нибудь вектору из O , называется O -прямой. Напомним, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *частично выпуклым* (O -выпуклым), если пересечение X с произвольной O -прямой связно или пусто. Кроме того, замкнутое

Работа выполнена при поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры” при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф07-293).

частично выпуклое множество X называется *полупространством частичной выпуклости*, если пересечение X с произвольной O -прямой оказывается прямой, лучом или пустым множеством. Полупространство X частичной выпуклости называется *направленным*, если для любых двух параллельных O -прямых l_1 и l_2 , пересечения которых с X образуют лучи r_1 и r_2 , эти лучи имеют одинаковое направление, т.е. r_1 можно получить из r_2 параллельным переносом и наоборот. Отметим, что частичная выпуклость является обобщением понятия классической выпуклости, так как все классически выпуклые множества являются O -выпуклыми. Кроме того, если $O = S^{n-1}$, то O -выпуклость совпадает с классической выпуклостью.

В работе [5] предложен другой способ задания системы O -прямых. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано фиксированное множество гиперплоскостей $\mathcal{O}$, проходящих через начало координат $\mathbf{0}$ и называемых направляющими гиперплоскостями. Прямая, параллельная или совпадающая с прямой, образованной пересечением каких-нибудь $n - 1$ направляющих гиперплоскостей, называется O -прямой. Говорят, что множество $\mathcal{O}$ имеет свойство пересечения в точке, если пересечение всех гиперплоскостей из $\mathcal{O}$ содержит только одну точку $\mathbf{0}$.

Будем говорить, что множество направлений $O \subseteq S^{n-1}$ *соответствует* множеству направляющих гиперплоскостей $\mathcal{O}$, если выполняется следующее утверждение: вектор $e \in S^{n-1}$ принадлежит множеству направлений O тогда и только тогда, когда e параллелен прямой, являющейся пересечением каких-нибудь $n - 1$ направляющих гиперплоскостей из множества $\mathcal{O}$. В этом случае множества O -прямых, определяемых с помощью множества направлений O и множества направляющих гиперплоскостей $\mathcal{O}$, совпадают.

Через $\bar{A}$, $\text{int}(A)$ и $\text{fr}(A)$ обозначим соответственно замыкание, внутренность и границу произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Через $a + A$ (соответственно $A - a$) обозначим параллельный перенос множества A на вектор a (соответственно на вектор $-a$). Для удобства считаем, что в алгебраических выражениях параллельный перенос имеет более высокий приоритет по сравнению с теоретико-множественными операциями объединения и пересечения.

Теперь докажем некоторые вспомогательные утверждения. Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Если множество направляющих гиперплоскостей $\mathcal{O}$ имеет свойство пересечения в точке, то множество направлений O , соответствующее $\mathcal{O}$, содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество гиперплоскостей $\mathcal{O}$ содержит только одну общую точку $\mathbf{0}$, то, как известно из курса линейной алгебры [6], из $\mathcal{O}$ можно выбрать ровно n гиперплоскостей $H_1, \dots, H_n$ таких, что $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{\mathbf{0}\}$. Тогда нетрудно видеть, что множество единичных попарно неколлинеарных и непротивоположных единичных векторов $\{o_1, \dots, o_n\}$, каждый из которых лежит на одной из прямых, образованных пересечениями $(n - 1)$ -элементных подмножеств гиперплоскостей из множества $\{H_1, \dots, H_n\}$, образует базис пространства $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

Согласно лемме 1 гипотезу Финка–Вуда можно сформулировать следующим образом: всякое связное полупространство частичной выпуклости является стягиваемым в пространстве $\mathbb{R}^n$, если множество направлений O содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$. Действительно, в двумерном пространстве легко показать, что любое связ-

ное частично выпуклое множество является стягиваемым. Однако мы построим пример связного полупространства частичной выпуклости в трехмерном пространстве, который опровергает гипотезу Финка–Вуда.

Мы будем рассматривать орто-выпуклость в трехмерном пространстве. Напомним, что *орто-выпуклость* представляет собой случай частичной выпуклости, где множество направлений образуют векторы, параллельные осям координат. Очевидно, что множество этих векторов содержит базис трехмерного пространства. Полупространство орто-выпуклости иногда будем сокращенно называть *орто-полупространством*. *О-прямую* будем называть X -, Y - или Z -*прямой*, если она параллельна какой-нибудь из оси координат X , Y или Z соответственно. Рассмотрим множества A , B , C , D , E и F , определяемые следующими соотношениями:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \leq 0, z \leq 0\}, \quad (1)$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, z \leq 0\}, \quad (2)$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 1, z \geq 1\}, \quad (3)$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, z \geq 1\}, \quad (4)$$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, y \leq 0\}, \quad (5)$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, y \geq 1\}. \quad (6)$$

Через x_0 , y_0 и z_0 будем обозначать некоторые фиксированные вещественные числа. Имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Множество $A \cup B$ является полупространством орто-выпуклости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем непустое пересечение произвольной O -прямой с $A \cup B$.

Рассмотрим случай с X -прямой $l_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = y_0, z = z_0\}$. Заметим, что если прямая l_X имеет непустое пересечение с A , то $y_0 \leq 0$ и $z_0 \leq 0$. Поэтому $l_X \subset A$, так как выполняется соотношение (1) из-за $y_0 \leq 0$ и $z_0 \leq 0$. Если $l_X \cap B \neq \emptyset$, то множество $l_X \cap B$ представляет собой луч

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, y = y_0, z = z_0\}.$$

Следовательно, непустое пересечение X -прямой с $A \cup B$ оказывается прямой (если $l_X \cap A \neq \emptyset$) или лучом (если $l_X \cap A = \emptyset$ и $l_X \cap B \neq \emptyset$).

Случай с Y -прямой $l_Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, z = z_0\}$ полностью аналогичен случаю с X -прямой, поэтому его рассмотрение здесь мы опускаем.

Наконец, рассмотрим случай с Z -прямой $l_Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y = y_0\}$. Если $l_Z \cap A \neq \emptyset$, то множество $l_Z \cap A$ является лучом $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y = y_0, z \leq 0\}$. Если $l_Z \cap B \neq \emptyset$, то множество $l_Z \cap B$ есть тот же луч

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y = y_0, z \leq 0\}.$$

Следовательно, непустое пересечение Z -прямой с $A \cup B$ представляет собой луч.

Суммируя все вышесказанное, заключаем, что в общем случае непустое пересечение O -прямой с множеством $A \cup B$ представляет собой луч или прямую. Лемма доказана.

Доказательство утверждения о том, что множество $C \cup D$ является орто-полупространством, полностью аналогично доказательству леммы 2. Тогда примем без доказательства следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Множество $C \cup D$ является полупространством орто-выпуклости.*

Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Множество $E \cup F$ является полупространством орто-выпуклости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $E \cap F = \emptyset$. Следовательно, $E \cup F$ несвязно и имеет две компоненты связности E и F . Тогда, чтобы доказать утверждение леммы, достаточно показать, что множества E и F сами в отдельности являются орто-полупространствами. Исследуем непустые пересечения произвольных O -прямых с множествами E и F . Сначала заметим, что любая Z -прямая, имеющая непустое пересечение с E или F , целиком лежит в E или F . Что касается X -прямой $l_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = y_0, z = z_0\}$, то если $l_X \cap E \neq \emptyset$, то множество $l_X \cap E$ представляет собой луч

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, y = y_0, z = z_0\}.$$

Аналогично, если $l_X \cap F \neq \emptyset$, то множество $l_X \cap F$ является лучом

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, y = y_0, z = z_0\}.$$

Для Y -прямой $l_Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, z = z_0\}$, если $l_Y \cap E \neq \emptyset$, то множество $l_Y \cap E$ представляет собой луч

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y \leq 0, z = z_0\}.$$

Если $l_Y \cap F \neq \emptyset$, то множество $l_Y \cap F$ является лучом

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y \geq 1, z = z_0\}.$$

Таким образом, непустое пересечение любой O -прямой с $E \cup F$ представляет собой либо луч, либо прямую. Лемма доказана.

Рассмотрим множество

$$G = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Множество G является связным орто-полупространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что G представляет собой орто-полупространство. Исследуем непустые пересечения произвольных O -прямых с G . Рассмотрим Z -прямую $l_Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0, y = y_0\}$. Допустим, что $l_Z \cap E \neq \emptyset$, тогда выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} x_0 \leq 0, \\ y_0 \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Значит, $l_Z \subset E$ и, следовательно, $l_Z \subset G$. В этом случае пересечение l_Z с G представляет собой прямую l_Z .

Случай $l_Z \cap F \neq \emptyset$ полностью аналогичен предыдущему, поэтому его рассмотрение здесь мы опускаем.

Рассмотрим теперь случай, когда $l_Z \cap F = \emptyset$ и $l_Z \cap E = \emptyset$, но l_Z имеет непустое пересечение с $A \cup B$. Тогда выполняется одна из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} x_0 > 0, \\ y_0 \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

или

$$\begin{cases} x_0 \geq 1, \\ y_0 < 1. \end{cases} \quad (9)$$

В силу определений (3)–(6) легко видеть, что $l_Z \cap (C \cup D \cup E \cup F) = \emptyset$. Следовательно,

$$l_Z \cap G = l_Z \cap (A \cup B).$$

Согласно лемме 2 множество $A \cup B$ – орто-полупространство, поэтому в этом случае $l_Z \cap G$ – луч или прямая.

Случай, когда $l_Z \cap F = \emptyset$ и $l_Z \cap E = \emptyset$, но $l_Z \cap (C \cup D) \neq \emptyset$, полностью аналогичен. Согласно лемме 3 множество $C \cup D$ – орто-полупространство, поэтому и здесь $l_Z \cap G$ – луч или прямая.

Рассмотрим теперь непустое пересечение X -прямой $l_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = y_0, z = z_0\}$ с множеством G . Заметим, если $l_X \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, то $l_X \cap (C \cup D) = \emptyset$, и наоборот, если $l_X \cap (C \cup D) \neq \emptyset$, то $l_X \cap (A \cup B) = \emptyset$, так как либо $z_0 \leq 0$, либо $z_0 \geq 1$, в зависимости от того, какое из множеств $A \cup B$ или $C \cup D$ пересекает прямая l_X . Допустим, что $l_X \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Заметим, что $A \cup B$ целиком содержится в (классическом) полупространстве

$$H_{z \leq 0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\}.$$

Отметим, что $E \cap H_{z \leq 0} \subset A$, $F \cap H_{z \leq 0} \subset B$ и $l_X \subset H_{z \leq 0}$. Тогда нетрудно видеть, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} l_X \cap (A \cup B \cup E \cup F) &= l_X \cap H_{z \leq 0} \cap (A \cup B \cup E \cup F) \\ &= l_X \cap (A \cup B \cup (E \cap H_{z \leq 0}) \cup (F \cap H_{z \leq 0})) = l_X \cap (A \cup B). \end{aligned}$$

В силу того, что в данном случае $l_X \cap (C \cup D) = \emptyset$, получаем

$$l_X \cap G = l_X \cap (A \cup B).$$

Так как согласно лемме 2 множество $A \cup B$ – орто-полупространство, то $l_X \cap G$ – луч или прямая. Случай, когда $l_X \cap (C \cup D) \neq \emptyset$, полностью аналогичен. В силу леммы 4 множество $E \cup F$ – орто-полупространство, следовательно, и в этом случае $l_X \cap G$ представляет собой луч или прямую.

Исследование пересечений Y -прямой с множеством G полностью аналогично приведенному выше исследованию пересечений X -прямой с G , поэтому мы его здесь опускаем.

Рис. 1. Иллюстрация к доказательству многосвязности множества G

Суммируя все вышесказанное, заключаем, что непустое пересечение произвольной O -прямой с G представляет собой луч или прямую, т.е. множество G является орто-полупространством.

Докажем теперь, что G связно. Заметим, что каждая компонента A, B, C, D, E и F множества G связна. Рассмотрим замкнутую ломаную с вершинами в точках $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ и $(1,0,0)$. Нетрудно видеть, что каждый отрезок этой ломаной целиком лежит в каком-нибудь из множеств A, B, C, D, E или F . Так,

$$\begin{aligned} [(0,0,0), (0,0,1)] &\subset E, & [(0,0,1), (0,1,1)] &\subset D, & [(0,1,1), (1,1,1)] &\subset C, \\ [(1,1,1), (1,1,0)] &\subset F, & [(1,1,0), (1,0,0)] &\subset B, & [(1,0,0), (0,0,0)] &\subset A. \end{aligned}$$

Тогда из связности этой ломаной вытекает связность множества $G = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$. Теорема доказана.

Покажем теперь, что множество G не является односвязным. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *В трехмерном пространстве существует связное полупространство орто-выпуклости, которое не является односвязным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутую ломаную L , лежащую в орто-полупространстве G и обозначенную на рис. 1 жирной линией, а также множество

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

отмеченное на рис. 1 волнистой штриховкой. Заметим, что кривая L охватывает множество P , следовательно, любое стягивание кривой L в точку приведет на определенном этапе к непустому пересечению L с P . Но так как $P \cap G = \emptyset$, то L

при стягивании выйдет за границу множества G , следовательно, связное орто-полупространство G не является односвязным. Теорема доказана.

Таким образом, нами опровергнута гипотеза Финка–Вуда в общем случае. Однако далее мы покажем, что эта гипотеза выполняется для случая направленных полупространств частичной выпуклости. Дадим следующее определение.

Ориентацией O_X направленного полупространства X частичной выпуклости назовем множество векторов $O_X \subseteq O$ такое, что вектор e из O принадлежит O_X тогда и только тогда, когда для любой точки $a \in X$ луч $\{a + \alpha e \mid \alpha \geq 0\}$ целиком содержится в X . Тогда из этого определения непосредственно вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Если множество направлений O частичной выпуклости содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$, то ориентация O_X любого направленного полупространства X частичной выпуклости также содержит некоторый базис пространства $\mathbb{R}^n$.*

Заметим, что ориентация O_X тесно связана с рецессивным (характеристическим) конусом полупространства X . Напомним, что *рецессивным (характеристическим) конусом* множества X называется множество $\mathbf{0}^+X$, состоящее из векторов $h \in X$ таких, что $x + \gamma h \in X$ для всех $x \in X$ и всех действительных чисел $\gamma \geq 0$. Нетрудно убедиться, что $O_X = O \cap \mathbf{0}^+X$. Через $\text{CH}[A]$ обозначим выпуклую коническую оболочку множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$, т.е. наименьший выпуклый конус, содержащий A . Тогда справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6. *Для любой точки a направленного полупространства X частичной выпуклости множество $a + \overline{\text{CH}[O_X]}$ целиком содержится в X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что рецессивный конус любого замкнутого множества является замкнутым и выпуклым [7]. Тогда справедливо включение $\overline{\text{CH}[O_X]} \subseteq \mathbf{0}^+X$. Отметим, что для любой точки $a \in X$ выполняется утверждение $a + \mathbf{0}^+X \subseteq X$. Следовательно, $a + \overline{\text{CH}[O_X]} \subseteq X$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к вопросам, непосредственно связанным со стягиваемостью направленных полупространств частичной выпуклости. Отметим, что если множество направляющих гиперплоскостей $\mathcal{O}$ имеет свойство пересечения в точке, то любое направленное полупространство X частичной выпуклости является связным [5]. Рассмотрим случай, когда $\text{CH}[O_X] = \mathbb{R}^n$. Тогда по лемме 6 направленное полупространство X частичной выпуклости совпадает с $\mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что пространство $\mathbb{R}^n$ стягиваемо, поэтому в этом случае X также будет стягиваемым. Обратимся теперь к случаю $\text{CH}[O_X] \neq \mathbb{R}^n$. Построим гомотопию F для заданного X при условии, что множество направляющих гиперплоскостей $\mathcal{O}$ имеет свойство пересечения в точке. Зафиксируем произвольную точку x_0 в направленном полупространстве X частичной выпуклости. Согласно леммам 1 и 5 выберем n векторов $e_1, \dots, e_n$ в ориентации O_X направленного полупространства X частичной выпуклости, которые образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем прямую $l_0 = \{\alpha(e_1 + \dots + e_n) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Через l_{x_0} обозначим прямую $x_0 + l_0$. Идея стягивания множества X в точку заключается в следующем. Сначала мы стягиваем множество X в подмножество прямой l_{x_0} , а затем стягиваем это подмножество в точку x_0 . Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим

через $P(x)$ точку пересечения границы множества $x + \text{CH}[O_X]$ с выделенной прямой l_{x_0} . Тогда можно предложить следующую подходящую функцию F с областью определения $[0, 1] \times X$:

$$F(t, x) = \begin{cases} (1 - 2t)x + 2tP(x), & \text{если } 0 \leq t < 0.5, \\ (2 - 2t)P(x) + (2t - 1)P(x_0), & \text{если } 0.5 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Оставшуюся часть статьи мы посвятим доказательству того, что функция $F(t, x)$, задаваемая соотношениями (10), представляет собой гомотопию, стягивающую множество X в точку x_0 .

Справедлива следующая

ЛЕММА 7. *Область значений функции $F(t, x)$ содержит X , если функция $P(x)$ определена на множестве X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого t в интервале $[0, 0.5)$ точка $(1 - 2t)x + 2tP(x)$ принадлежит отрезку $[x, P(x)]$. Из определения $P(x)$ следует, что $P(x) \in x + \text{CH}[O_X]$. Тогда в силу выпуклости $x + \text{CH}[O_X]$ справедливо $[x, P(x)] \subseteq x + \text{CH}[O_X]$. Следовательно, $(1 - 2t)x + 2tP(x) \in x + \text{CH}[O_X]$ и в силу леммы 6 справедливо $(1 - 2t)x + 2tP(x) \in X$. Предположим теперь, что t лежит в интервале $[0.5, 1]$. Тогда точка $(2 - 2t)P(x) + (2t - 1)P(x_0)$ лежит на отрезке $[P(x), P(x_0)]$. Заметим, что так как отрезок $[P(x), P(x_0)]$ лежит на прямой l_{x_0} , то вектор $P(x) - P(x_0)$ либо коллинеарен, либо противоположен вектору $e_1 + \dots + e_n$. Тогда если вектор $P(x) - P(x_0)$ коллинеарен вектору $e_1 + \dots + e_n$, то $P(x) \in P(x_0) + \text{CH}[O_X]$. Если $P(x) - P(x_0)$ противоположен вектору $e_1 + \dots + e_n$, то $P(x_0) \in P(x) + \text{CH}[O_X]$. Значит, отрезок $[P(x), P(x_0)]$ принадлежит множеству $P(x_0) + \text{CH}[O_X]$ или множеству $P(x) + \text{CH}[O_X]$. Из леммы 6 следует, что $P(x), P(x_0) \in X$. Поэтому $[P(x), P(x_0)] \subseteq X$. Лемма доказана.

Отметим, что если доказать непрерывность функции $P(x)$, то из этого вытекает непрерывность функции $F(t, x)$, что показывает следующая

ЛЕММА 8. *Если функция $P(x)$ непрерывна на X , то функция $F(t, x)$ непрерывна на $[0, 1] \times X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для t в интервале $[0, 0.5)$ функция $F(t, x)$ совпадает с $(1 - 2t)x + 2tP(x)$. Но функция $(1 - 2t)x + 2tP(x)$, очевидно, непрерывна на множестве $[0, 0.5) \times X$, если $P(x)$ непрерывна на X . Тогда $F(t, x)$ непрерывна на $[0, 0.5) \times X$. Аналогично, для t в интервале $(0.5, 1]$ функция $F(t, x)$ совпадает с $(2 - 2t)P(x) + (2t - 1)P(x_0)$. Но функция $(2 - 2t)P(x) + (2t - 1)P(x_0)$, очевидно, непрерывна на множестве $(0.5, 1] \times X$, если $P(x)$ непрерывна на X . Тогда $F(t, x)$ непрерывна на $(0.5, 1] \times X$. Отметим, что функция $F(t, x)$ могла бы претерпеть разрыв в точках $\{0.5\} \times X$. Но для $t = 0.5$ справедливо равенство

$$(1 - 2t)x + 2tP(x) = (2 - 2t)P(x) + (2t - 1)P(x_0).$$

Тогда $F(t, x)$ непрерывна на $\{0.5\} \times X$. Подытоживая все вышесказанное, мы делаем вывод, что функция $F(t, x)$ непрерывна на $[0, 1] \times X$, если функция $P(x)$ непрерывна на X . Лемма доказана.

Перейдем теперь к исследованию функции $P(x)$. Введем вспомогательную функцию $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом: для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ значение $G(x)$ представляет собой точку пересечения прямой $l_0 - x$ с границей конуса $\text{CH}[O_X]$. Тогда функцию $P(x)$ можно выразить через $G(x)$ с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 9. *Справедливо равенство $P(x) = x + G(x - x_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} G(x - x_0) &= l_0 - (x - x_0) \cap \text{fr}(\text{CH}[O_X]) \\ &= (l_0 + x_0) - x \cap \text{fr}(\text{CH}[O_X]) = l_{x_0} - x \cap \text{fr}(\text{CH}[O_X]). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x + G(x - x_0) &= x + (l_{x_0} - x \cap \text{fr}(\text{CH}[O_X])) \\ &= x + l_{x_0} - x \cap x + \text{fr}(\text{CH}[O_X]) = l_{x_0} \cap x + \text{fr}(\text{CH}[O_X]) = P(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Покажем теперь, что функция $G(x)$ определяется однозначно, т.е. для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ прямая $l_0 - x$ всегда пересекает границу конуса $\text{CH}[O_X]$ только в одной точке. Справедлива следующая

ЛЕММА 10. *Если $\text{CH}[O_X] \neq \mathbb{R}^n$, то для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ прямая $l_0 - x$ пересекает границу конуса $\text{CH}[O_X]$ только в одной точке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть по-прежнему векторы $e_1, \dots, e_n \in O_X$ образуют некоторый базис пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда точку x можно представить в виде $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ для некоторых вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Пусть α – настолько большое число, что для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется неравенство $\alpha - \alpha_i > 0$. Рассмотрим точку

$$y = \alpha(e_1 + \dots + e_n) - x.$$

Так как $\alpha(e_1 + \dots + e_n) \in l_0$, то $y \in l_0 - x$. С другой стороны

$$\begin{aligned} y &= \alpha(e_1 + \dots + e_n) - x \\ &= \alpha(e_1 + \dots + e_n) - (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = (\alpha - \alpha_1)e_1 + \dots + (\alpha - \alpha_n)e_n. \end{aligned}$$

Так как $\alpha - \alpha_1 > 0, \dots, \alpha - \alpha_n > 0$, то $y \in \text{CH}[\{e_1, \dots, e_n\}]$, где $\text{CH}[\{e_1, \dots, e_n\}] \subseteq \text{CH}[O_X]$. Более того, очевидно, что луч $\{y + \beta(e_1 + \dots + e_n) \mid \beta \geq 0\}$ будет целиком лежать в $\text{CH}[O_X]$. Таким образом, пересечение $l_0 - x$ с $\text{CH}[O_X]$ представляет собой неограниченное множество. Далее мы покажем, что $l_0 - x \not\subseteq \overline{\text{CH}[O_X]}$. Так как по условию настоящей леммы $\text{CH}[O_X] \neq \mathbb{R}^n$, то точка $\mathbf{0}$ (начало координат) является граничной точкой для $\overline{\text{CH}[O_X]}$. Следовательно, через $\mathbf{0}$ можно провести опорную гиперплоскость H к $\overline{\text{CH}[O_X]}$. Выберем некоторую точку $\alpha(e_1 + \dots + e_n) \in l_0$, где $\alpha > 0$. Заметим, что точка $\alpha(e_1 + \dots + e_n)$ принадлежит $\text{int}(\text{CH}[\{e_1, \dots, e_n\}])$. Так как $\text{CH}[\{e_1, \dots, e_n\}] \subseteq \text{CH}[O_X]$, то $\alpha(e_1 + \dots + e_n) \in \text{int}(\text{CH}[O_X])$. Следовательно, $\alpha(e_1 + \dots + e_n) \notin H$. Тогда поскольку прямая l_0 проходит через точку $\alpha(e_1 + \dots + e_n)$, то она не лежит целиком в гиперплоскости H , но пересекает H в начале координат $\mathbf{0}$.

Так как H – опорная гиперплоскость к $\overline{\text{CH}[O_X]}$, то открытый луч $\{-\alpha(e_1 + \dots + e_n) \mid \alpha > 0\} \subseteq l_0$ не пересекает $\overline{\text{CH}[O_X]}$. Поскольку прямая $l_0 - x$ параллельна прямой l_0 , то она будет пересекать H в некоторой одной точке, скажем z_0 . Тогда открытый луч $\{z_0 - \alpha(e_1 + \dots + e_n) \mid \alpha > 0\} \subseteq l_0 - x$ не будет пересекать конус $\text{CH}[O_X]$. Следовательно, $l_0 - x \not\subseteq \overline{\text{CH}[O_X]}$. В то же время мы показали, что пересечение $l_0 - x$ с $\overline{\text{CH}[O_X]}$ представляет собой неограниченное множество. Так как $\overline{\text{CH}[O_X]}$ – замкнутое выпуклое множество, то $l_0 - x \cap \overline{\text{CH}[O_X]}$ – некоторый замкнутый луч $\{a_0 + \alpha(e_1 + \dots + e_n) \mid \alpha \geq 0\}$, причем начальная точка a_0 этого луча, очевидно, принадлежит границе конуса $\text{CH}[O_X]$.

Покажем, что a_0 – единственная точка пересечения $l_0 - x$ с $\text{fr}(\text{CH}[O_X])$. Предположим, что существует еще одна точка $a' \in l_0 - x \cap \text{fr}(\text{CH}[O_X])$. Выразим эту точку через базис $a' = \alpha'_1 e_1 + \dots + \alpha'_n e_n$. Выберем достаточно большое число α такое, что $\alpha + \alpha'_1 > 0, \dots, \alpha + \alpha'_n > 0$. Рассмотрим точку

$$a_1 = a' + \alpha(e_1 + \dots + e_n) = (\alpha + \alpha'_1)e_1 + \dots + (\alpha + \alpha'_n)e_n.$$

Поскольку все величины $\alpha + \alpha'_1, \dots, \alpha + \alpha'_n$ положительны и $e_1, \dots, e_n$ – базис пространства $\mathbb{R}^n$, то $a_1 \in \text{int}(\text{CH}[\{e_1, \dots, e_n\}])$. Так как $\text{CH}[\{e_1, \dots, e_n\}] \subseteq \overline{\text{CH}[O_X]}$, то $a_1 \in \text{int}(\overline{\text{CH}[O_X]})$. Рассмотрим отрезок $[a_0, a_1]$. Поскольку точка a_1 является внутренней для $\text{CH}[O_X]$, то все точки отрезка $[a_0, a_1]$, за исключением концевой точки a_0 , являются внутренними для $\text{CH}[O_X]$. Заметим, что точка a' принадлежит отрезку $[a_0, a_1]$, так как $a_1 \in l_0 - x$. Тогда точка a' должна быть внутренней для $\text{CH}[O_X]$. Получаем противоречие с принятым ранее утверждением $a' \in l_0 - x \cap \text{fr}(\text{CH}[O_X])$. Следовательно, точка a_0 – единственная точка в пересечении прямой $l_0 - x$ и границей конуса $\text{CH}[O_X]$. Лемма доказана.

Покажем теперь непрерывность функции $G(x)$. Справедлива следующая

ЛЕММА 11. *Функция $G(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, если $\text{CH}[O_X] \neq \mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вещественнозначную функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую как $f(x) = \lambda$, где вещественное число λ такое, что точка $\lambda(e_1 + \dots + e_n) - x$ принадлежит границе конуса $\text{CH}[O_X]$. Заметим, что справедливо равенство $G(x) = f(x)(e_1 + \dots + e_n) - x$. Так как по лемме 10 значения функции $G(x)$ однозначно определяются на $\mathbb{R}^n$, то значение функции $f(x)$ также однозначно определено для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, если мы покажем непрерывность функции $f(x)$, то из этого будет следовать непрерывность функции $G(x)$. Докажем, что функция $f(x)$ выпукла. Функция $f(x)$ выпукла $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ для любого вещественного числа $\alpha \in [0, 1]$ и любых точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $f(x)$ невыпукла, т.е. найдутся такое число $\alpha \in [0, 1]$ и такие точки x_1 и x_2 , что $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$. Рассмотрим точку

$$x' = \alpha G(x_1) + (1 - \alpha)G(x_2).$$

Так как $G(x_1), G(x_2) \in \overline{\text{CH}[O_X]}$ и $\overline{\text{CH}[O_X]}$ выпукло, то $x' \in \overline{\text{CH}[O_X]}$. Пусть

$$\epsilon = f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) - \alpha f(x_1) - (1 - \alpha)f(x_2).$$

Тогда так как $\epsilon > 0$, то согласно утверждению $\text{CH}\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \overline{\text{CH}[O_X]}$ справедливо $\epsilon(e_1 + \dots + e_n) \in \text{int}(\text{CH}[O_X])$. Следовательно,

$$x' + \epsilon(e_1 + \dots + e_n) \in \text{int}(x' + \text{CH}[O_X]).$$

Так как $x' \in \overline{\text{CH}[O_X]}$, то $\text{int}(x' + \text{CH}[O_X]) \subseteq \text{int}(\text{CH}[O_X])$. Поэтому

$$x' + \epsilon(e_1 + \dots + e_n) \in \text{int}(\text{CH}[O_X]).$$

Справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} x' + \epsilon(e_1 + \dots + e_n) &= \alpha G(x_1) + (1 - \alpha)G(x_2) + \epsilon(e_1 + \dots + e_n) \\ &= \alpha(f(x_1)(e_1 + \dots + e_n) - x_1) \\ &\quad + (1 - \alpha)(f(x_2)(e_1 + \dots + e_n) - x_2) \\ &\quad + (f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) - \alpha f(x_1) \\ &\quad - (1 - \alpha)f(x_2))(e_1 + \dots + e_n) \\ &= f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)(e_1 + \dots + e_n) - (\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \\ &= G(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2). \end{aligned}$$

Но функция G принимает значения только на границе конуса $\text{CH}[O_X]$. Тогда

$$x' + \epsilon(e_1 + \dots + e_n) \in \text{fr}(\text{CH}[O_X]),$$

что противоречит полученному ранее $x' + \epsilon(e_1 + \dots + e_n) \in \text{int}(\text{CH}[O_X])$. Следовательно, всегда выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ для любого вещественного числа $\alpha \in [0, 1]$ и любых точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Тогда функция $f(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$, и из этого вытекает ее непрерывность на $\mathbb{R}^n$. Значит, функция $G(x)$ также непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

Итак, справедлива следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Если полупространство X частичной выпуклости не совпадает с $\mathbb{R}^n$, то функция $F(t, x)$, задаваемая соотношениями (10), является гомотопией между тождественным отображением и постоянным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X \neq \mathbb{R}^n$, то в силу леммы 6 справедливо $\text{CH}[O_X] \neq \mathbb{R}^n$. Так как $\text{CH}[O_X] \neq \mathbb{R}^n$, то согласно леммам 10 и 11 функция $G(x)$ определена и непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Следовательно, по лемме 9 функция $P(x)$ также определена и непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда в силу лемм 7 и 8 функция $F(t, x)$, задаваемая соотношениями (10), будет определена и непрерывна на $[0, 1] \times X$. По лемме 7 ее областью значений будет множество X . Кроме того, нетрудно видеть, что $F(0, x) = x$ и $F(1, x) = P(x_0) = x_0$ для любого $x \in X$. Теорема доказана.

Таким образом, мы получили следующий основной результат: любое направленное полупространство X частичной выпуклости является стягиваемым при условии, что множество направляющих гиперплоскостей $\mathcal{O}$ имеет свойство пересечения в точке.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Найденко, “Частичная выпуклость”, *Матем. заметки*, **75**:2 (2004), 222–235.
- [2] В. Г. Найденко, “Об одном варианте частичной выпуклости”, *Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 2004, № 2, 102–106.
- [3] В. Г. Найденко, “Построение частично выпуклых оболочек”, *Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 2002, № 4, 48–53.
- [4] Н. Н. Метельский, В. Г. Найденко, “Алгоритмические аспекты частичной выпуклости”, *Матем. заметки*, **68**:3 (2000), 399–410.
- [5] E. Fink, D. Wood, *Restricted-Orientation Convexity*, Monogr. Theoret. Comput. Sci. EATCS Ser., Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [6] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience Publ., New York, 1967.
- [7] В. В. Гороховик, Е. А. Семенова, “Классификация полупространств по типам в бесконечномерных векторных пространствах”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 191–198.

В. Г. Найденко

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

E-mail: naidenko@im.bas-net.by

Поступило

21.06.2007

Исправленный вариант

11.02.2008