Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Подъяпольский, Полнота системы корневых функций одной нелокальной задачи в L_p , *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 878–889

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:02:09

УДК 517.95

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В L_p

В. В. Подъяпольский

Получены достаточные условия полноты системы корневых функций нелокальных эллиптических задач в пространствах Соболева $W_p^1(Q)$.

Библиография: 14 названий.

Введение. Спектральные свойства нелокальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы достаточно хорошо (см. [1]–[4] и др.). Например, в работе [3] для дифференциальных операторов второго порядка с нелокальными условиями установлены необходимые и достаточные условия базисности по Риссу системы корневых векторов.

Дискретность и угловая структура спектра нелокальных эллиптических задач, а также оценки резольвенты были установлены Скубачевским [5]. Однако асимптотика собственных значений, полнота системы корневых функций и суммируемость разложений по корневым функциям многомерных нелокальных задач остаются практически неисследованными. В связи с этим отметим работы Браудера [6], Моисеева [7], [8] и ряда других авторов. В [6] получен первый член асимптотики спектральной функции и функции распределения собственных значений самосопряженного в $L_2(Q)$ оператора, порожденного нелокальной эллиптической задачей. Однако условия существования такого оператора в работе [6] не были приведены, а нелокальные задачи, как правило, являются несамосопряженными. В работах [7] и [8] приведены примеры нелокальных задач для оператора Лапласа в двумерном круге, корневые функции которых полны и минимальны в $L_2(Q)$, но не образуют в нем базиса.

В предлагаемой статье рассматриваются свойства разложений по корневым функциям нелокальных эллиптических задач. Вводятся операторы, действующие в пространствах Соболева $W_q^s(Q)$. При наложении некоторых условий все эти операторы имеют одну систему корневых функций, и таким образом устанавливается полнота этой системы функций в различных пространствах. Для доказательства используются методы статьи Лидского [9] и результаты об априорных оценках и разрешимости нелокальных эллиптических задач, полученные Ковалевой и Скубачевским в работах [5], [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-01030, и Конкурсного центра по фундаментальным и естественным наукам при Санкт-Петербургском Государственном Университете, грант № 97-14.3-37.

1. Рассмотрим уравнение

$$Au(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (1)$$

с нелокальными условиями

$$B_\mu u = (B_\mu^0 u(x) + B_\mu^1 u)|_{\partial Q} + B_\mu^2 u = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m). \quad (2)$$

Здесь

$$A = A(x, \mathcal{D}) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) \mathcal{D}^\alpha, \quad (3)$$

$$B_\mu^0 = B_\mu^0(x, \mathcal{D}) = \sum_{|\alpha| = m_\mu} b_{\mu 0 \alpha}(x) \mathcal{D}^\alpha \quad (4)$$

– дифференциальные операторы с комплексными коэффициентами $a_\alpha, b_{\mu 0 \alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$; $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i\partial/\partial x_j$; $f \in L_p(Q)$; $m_\mu \leq 2m - 1$, $\mu = 1, \dots, m$, $p > 1$. Условия на операторы B_μ^1, B_μ^2 будут приведены позже.

В дальнейшем также будут использоваться полиномы

$$A^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad B_\mu^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m_\mu} b_{\mu 0 \alpha}(x) \xi^\alpha,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$.

Введем локальную задачу, порожденную нелокальной задачей (1), (2),

$$Au(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$B_\mu^0|_{\partial Q} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m). \quad (6)$$

Если выполнены следующие условия, то будем говорить, что локальная задача (5), (6) эллиптична с параметром на луче $\arg \lambda = \theta$.

УСЛОВИЕ I. Полином (по τ) $A^0(x, \eta + \tau\nu) - \lambda$ имеет m корней с положительными мнимыми частями при любых $x \in \overline{Q}$, $\nu \neq 0$ и $\eta \neq 0$, ортогональном к ν , где $\arg \lambda = \theta$.

Из этого условия следует, что

$$\arg A^0(x, \xi) \neq \theta$$

для всех вещественных $\xi \neq 0$ и $x \in \overline{Q}$.

Пусть x – произвольная точка ∂Q , ν – единичный вектор внутренней нормали и $\xi \neq 0$ – произвольный касательный вектор к ∂Q в точке x . Обозначим через $\tau_j^+(x, \xi, \lambda)$ ($j = 1, \dots, m$) корни с положительными мнимыми частями полинома по τ $A^0(x, \xi + \tau\nu) - \lambda$, где λ – произвольное число на луче $\arg \lambda = \theta$.

УСЛОВИЕ II. Полиномы

$$B_\mu^0(x, \xi + \tau\nu) \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

линейно независимы по модулю полинома

$$\prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j^+(x, \xi, \lambda))$$

для любых $x \in \partial Q$ и вектора ξ , касательного к ∂Q в точке x , таких, что $|\xi| + |\lambda| \neq 0$.

Будем предполагать, что существуют p_1, p_2 ($1 < p_1 \leq 2 \leq p_2$) такие, что для всех $p \in [p_1, p_2]$ выполнены следующие условия на нелокальные операторы.

УСЛОВИЕ III. Линейные ограниченные операторы

$$B_\mu^1: W_p^{m_\mu}(Q) \rightarrow L_p(Q), \quad B_\mu^2: W_p^{m_\mu+1/p-r}(Q) \rightarrow L_p(\partial Q)$$

таковы, что их сужения

$$B_\mu^1: W_p^{4m}(Q) \rightarrow W_p^{4m-m_\mu}(Q), \quad B_\mu^2: W_p^{4m-r}(Q) \rightarrow W_p^{4m-m_\mu-1/p}(\partial Q)$$

– также ограниченные операторы и

$$\begin{aligned} \|B_\mu^1 u\|_{0,p,Q} &\leq c_1(p) \|u\|_{m_\mu,p,Q_\delta} \quad (u \in W_p^{m_\mu}(Q)), \\ \|B_\mu^1 u\|_{4m-m_\mu,p,Q} &\leq c_2(p) \|u\|_{4m,p,Q_\delta} \quad (u \in W_p^{4m}(Q)), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_{s,p,Q}$ – норма в пространстве Соболева $W_p^s(Q)$, $Q_\delta = \{x \in Q: \rho(x, \partial Q) > \delta > 0\}$, $0 < r \leq m_\mu + 1/p$ ($\mu = 1, \dots, m$), а константы $c_1(p)$ и $c_2(p)$ не зависят от u .

Заметим, что из условий I и II следует выполнение условий 1)–3) в [10]. Из непрерывности полиномов следует, что выполнение условий I, II на луче $\arg \lambda = \theta$ означает выполнение тех же условий в некотором угле $|\arg \lambda - \theta| < \varepsilon$, где ε достаточно мало.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$ уравнение

$$Au(x) = -\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (7)$$

с нелокальным условием

$$B_1 u|_{\partial Q} = u|_{\partial Q} + \sum_{j=1}^l a_j(x) u(\omega_j(x))|_{\partial Q} = 0, \quad (8)$$

где $a_j \in C^\infty(\partial Q)$, ω_j – диффеоморфизмы класса C^∞ , отображающие окрестности границы ∂Q в область Q . В данном случае $A^0(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2$, $B_1^0(x, \xi) = 1$, $B_1^2 = 0$. Нетрудно убедиться, что для локальной задачи, порожденной нелокальной задачей (7), (8), условия I, II выполнены на любом луче $\arg \lambda \neq 0$. Для нелокальной задачи (7), (8) выполнено также условие III при любых $1 < p_1 \leq 2$.

2. Обозначим через $W_p^1(Q, \{B_\mu\}_1^m)$ замыкание в $W_p^1(Q)$ множества функций в $C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (2).

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_{s,p}$, действующий в $W_p^s(Q)$ ($0 \leq s \leq 2m$, $p_1 \leq p \leq p_2$) следующим образом:

- 1) область определения оператора $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{s,p}) = W_p^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$,
- 2) $\mathcal{A}_{s,p}u = A(x, \mathcal{D})u$ ($u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{s,p})$).

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие III при некоторых p_1, p_2 и локальная задача (5), (6) эллиптична с параметром на некотором луче $\arg \lambda = \theta$. Тогда $W_p^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$ плотно в $W_p^s(Q)$ при $0 \leq s < m_\mu + 1/p$ ($\mu = 1, \dots, m$), $p_1 \leq p \leq p_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – произвольная функция из $W_p^s(Q)$. Тогда для любого p , $p_1 \leq p \leq p_2$, и $\varepsilon > 0$ найдется такая $f_{p,\varepsilon} \in C^\infty(\overline{Q})$, что $\|f - f_{p,\varepsilon}\|_{s,p,Q} < \varepsilon$. В силу условия теоремы 1 из [10] (см. также [5]) найдется $q_0(p) > 0$ такое, что отображение $\mathcal{L}: W_p^{2m} \rightarrow W_p^0(Q, \partial Q)$, задаваемое по формуле

$$\mathcal{L}u = ((A - q^{2m}I)u, B_1u, \dots, B_mu),$$

обратно при $\arg q = \theta/(2m)$, $|q| > q_0$, и выполняется оценка

$$\|u\|_{2m,p,Q} \leq c_3(p) \|\mathcal{L}u\|_{0,p,Q,\partial Q}. \quad (9)$$

Здесь $W_p^0(Q, \partial Q) = W_p^0(Q) \times \prod_{\mu=1}^m W_p^{2m-m_\mu-1/p}(\partial Q)$,

$$\|u\|_{l,p,\Omega} = \{\|u\|_{l,p,\Omega}^2 + |q|^{2l}\|u\|_{0,p,\Omega}^2\}^{1/2},$$

$$\|f\|_{0,p,Q,\partial Q} = \left\{ \|f_0\|_{0,p,Q}^2 + \sum_{\mu=1}^m \|f_\mu\|_{2m-m_\mu-1/p,p,\partial Q}^2 \right\}^{1/2},$$

$f = (f_0, f_1, \dots, f_m)$, $\lambda = q^{2m}$.

Имеют место следующие интерполяционные неравенства (см. [11, предложение 2.2]):

$$|q|^{2m-s}\|u\|_{s,p,Q} \leq c_s(\|u\|_{2m,p,Q} + |q|^{2m}\|u\|_{0,p,Q}),$$

когда $u \in W_p^{2m}(Q)$, $q \neq 0$, $0 \leq s < 2m$.

Положим $v_{p,\varepsilon} = \mathcal{L}^{-1}((A - \lambda I)f_{p,\varepsilon}, 0, \dots, 0)$. Из теоремы 1 [10] следует, что $v_{p,\varepsilon} \in W_p^{2m+s}(Q)$. Для $f_{p,\varepsilon} - v_{p,\varepsilon}$ верна оценка (9). Следовательно,

$$\begin{aligned} |q|^{2m-s}\|f_{p,\varepsilon} - v_{p,\varepsilon}\|_{s,p,Q} &\leq c_4 \left(\sum_{\mu=1}^m \|B_\mu f_{p,\varepsilon}\|_{2m-m_\mu-1/p,p,\partial Q}^2 \right)^{1/2} \\ &= c_4 \left(\sum_{\mu=1}^m (\|B_\mu f_{p,\varepsilon}\|_{2m-m_\mu-1/p,p,\partial Q}^2 \right. \\ &\quad \left. + |q|^{2(2m-m_\mu-1/p)} \|B_\mu f_{p,\varepsilon}\|_{0,p,\partial Q}^2) \right)^{1/2}, \\ \|f_{p,\varepsilon} - v_{p,\varepsilon}\|_{s,p,Q} &\leq c_4 \left(\sum_{\mu=1}^m (|q|^{2(s-2m)} \|B_\mu f_{p,\varepsilon}\|_{2m-m_\mu-1/p,p,\partial Q}^2 \right. \\ &\quad \left. + |q|^{2(s-m_\mu-1/p)} \|B_\mu f_{p,\varepsilon}\|_{0,p,\partial Q}^2) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда, выбирая q достаточно большим, можно получить $\|f_{p,\varepsilon} - v_{p,\varepsilon}\|_{s,p,Q} < \varepsilon$.

3. Подробнее рассмотрим случай $p = 2$. Получим некоторые оценки резольвенты, необходимые нам в дальнейшем.

Предположим, что локальная задача (5), (6) эллиптична с параметром при некотором $0 \leq \theta < 2\pi$ и выполнено условие III; тогда из теоремы 2.1 [5] следует, что оператор $\mathcal{A}_{s,2}$ имеет дискретный спектр и резольвента оператора $\mathcal{A}_{s,2}$

$$R(\lambda, \mathcal{A}_{s,2}) = (\lambda I - \mathcal{A}_{s,2})^{-1}$$

может быть оценена сверху.

ЛЕММА 2. Пусть выполнено условие III и для некоторого θ выполнены условия I и II. Тогда для достаточно больших λ , лежащих на луче $\arg \lambda = \theta$, выполнена оценка

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}_{s,2})\|_{s,2} = O(|\lambda|^{s/(2m)-1}), \quad (10)$$

где под $\|\cdot\|_{s,2}$ понимается норма оператора из $W_2^s(Q)$ в $W_2^s(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует выполнение условий 2.1–2.3 на луче $\arg q = \Theta/(2m)$ в [5]. Тогда в силу теоремы 2.1 [5] для достаточно больших q на этом луче выполнена оценка

$$\|u\|_{2m+s,Q} \leq c_5 \|\mathcal{L}u\|_{s,Q,\partial Q}.$$

Следовательно, если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то

$$\begin{aligned} |q^{2m}| \cdot \|u\|_{s,2,Q} &\leq c_6 (\|Au - q^{2m}u\|_{s,2,Q} + |q|^s \|Au - q^{2m}u\|_{0,2,Q}), \\ \|u\|_{s,2,Q} &\leq c_6 \frac{1 + \|q\|^s}{|q|^{2m}} \|Au - q^{2m}u\|_{s,2,Q}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|u\|_{s,2,Q} \leq c_7 |q|^{s-2m} \|Au - q^{2m}u\|_{s,2,Q}.$$

Отсюда и из теоремы 2.1 [5] следует утверждение леммы.

При доказательстве леммы 2 использовались разрешимость и априорная оценка при s , вообще говоря, нецелых, получаемые из результатов для целых s путем интерполяции.

Пусть локальная задача (5), (6) эллиптична с параметром на некотором луче $\arg \lambda = \theta$. Обозначим через λ_k собственные значения оператора $\mathcal{A}_{s,2}$. Пусть z_0 – некоторая фиксированная точка в резольвентном множестве оператора $\mathcal{A}_{s,2}$. Тогда введем вполне непрерывный в $W_2^s(Q)$ оператор

$$T_{s,2} = (\mathcal{A}_{s,2} - z_0 I)^{-1} \quad (11)$$

с собственными значениями $\mu_k = 1/(\lambda_k - z_0)$. Резольвенты операторов $\mathcal{A}_{s,2}$ и $T_{s,2}$ связаны следующим образом:

$$R\left(\frac{1}{\lambda - z_0}, T_{s,2}\right) = (\lambda - z_0)I - (\lambda - z_0)^2 R(\lambda, \mathcal{A}_{s,2}), \quad \lambda \neq \lambda_k. \quad (12)$$

Очевидно, что операторы $T_{s,2}$ и $\mathcal{A}_{s,2}$ имеют одинаковые корневые функции. Поэтому в дальнейшем объектом изучения станет суммируемость разложений по корневым функциям оператора $T_{s,2}$.

Оператор $T_{s,2}$ обладает следующим важным свойством.

ЛЕММА 3. Пусть выполнено условие III и локальная задача (5), (6) эллиптически с параметром на некотором луче $\arg \lambda = \theta$. Тогда существует функция $C(\lambda)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|C(\lambda)R(\lambda, T_{s,2})\|_{s,2} \leq \exp(|\lambda|^{-n/(2m)-\varepsilon}) \quad (|\lambda| \leq \delta_0), \quad (13)$$

где $C(\lambda)$ – целая функция по переменной $1/\lambda$ порядка не выше $n/(2m)$, $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.1 [5] найдется такое λ , что $R(\lambda, \mathcal{A}_{s,2})f \in W_2^{2m+s}(Q)$ для любого $f \in W_2^s(Q)$. Тогда в силу тождества Гильберта

$$T_{s,2} = (\mathcal{A}_{s,2} - z_0 I)^{-1} = -R(\lambda, \mathcal{A}_{s,2})(I + (\lambda - z_0)R(z_0, \mathcal{A}_{s,2})),$$

следовательно, $T_{s,2}f \in W_2^{2m+s}(Q)$ для любого $f \in W_2^s(Q)$. Применяя далее теорему A1.1 [12], получаем утверждение леммы.

Без ограничения общности можно предполагать, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}_{s,2}$. Поэтому возьмем $z_0 = 0$.

Из (10) и (12) можно получить оценку нормы оператора $(I - \lambda T_{s,2})^{-1}$ на некоторых лучах.

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие III и для некоторого θ выполнены условия I и II. Тогда для достаточно больших λ , лежащих на луче $\arg \lambda = \theta$, выполнена оценка

$$\|(I - \lambda T_{s,2})^{-1}\|_{s,2} = O(|\lambda|^{s/(2m)}). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (12) следует $(I - \lambda T_{s,2})^{-1} = I - \lambda R(\lambda, \mathcal{A}_{s,2})$. Тогда, применяя оценку (10), получаем утверждение леммы.

4. Изучим полноту и базисность по Абелю системы корневых функций.

Пусть на лучах $\arg \lambda = \theta_j$ ($j = 1, \dots, N$) выполнены условия I, II. Предположим также, что углы L_j ($j = 1, \dots, N$), на которые разбивается комплексная плоскость этими лучами, имеют растроры меньше $2m\pi/n$. В силу теоремы 1 [10] в углах $|\arg \lambda - \theta_j| < \varepsilon$, где ε достаточно мало, содержится конечное число собственных значений оператора $\mathcal{A}_{s,2}$. Поэтому в них можно найти углы $\Lambda_j = \{\lambda: \theta_{j1} \leq \arg \lambda \leq \theta_{j2}\}$, состоящие из регулярных точек оператора $\mathcal{A}_{s,2}$. Очевидно, θ_{ij} можно выбрать так, что дополнение объединения Λ_j состоит из углов, меньших $2m\pi/n$. В силу того, что $\lambda = 0$ не является собственным значением $\mathcal{A}_{s,2}$, найдется круг $B = \{\lambda: |\lambda| \leq r\}$ такой, что в нем нет ни одного собственного значения $\mathcal{A}_{s,2}$. Обозначим через G объединение Λ_j и B и через γ – границу G . При интегрировании по γ направление будет выбираться так, что G остается слева. Без ограничения общности можно считать, что $\theta_j = (\theta_{j1} + \theta_{j2})/2$.

Пусть $\alpha = n/(2m) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Как хорошо известно, при α нецелых $\lambda = 0$ – точка ветвления функции λ^α и две различные ветви этой аналитической функции отличаются на множитель $e^{2k\pi i\alpha}$, где k целое. Поэтому под λ^α будем понимать следующую функцию: в каждом из углов L_j ($j = 1, \dots, N$) выберем такую ветвь функции λ^α , что $|\arg \lambda^\alpha| \leq \pi/2 - \omega_0$, где $\omega_0 > 0$ для всех $\lambda \in L_j$. Это всегда можно сделать в силу малости ε . В дальнейшем будем считать, что ε именно таково.

Построим систему векторов $\{e_q\}$ ($q = 1, 2, \dots$) из жордановых базисов в корневых подпространствах оператора $\mathcal{A}_{s,2}$. В [9, гл. II, § 4] показано, что найдется система векторов $\{g_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$), биортогональная к системе $\{e_q\}$. Заметим, что из существования биортогональной системы следует минимальность системы $\{e_q\}$.

Приведем понятие суммирования рядов по методу Абеля, следуя работе [9]. Для произвольного вектора $f \in W_2^s(Q)$ рассмотрим формальный ряд, строящийся следующим образом.

Задавшись некоторым $\alpha > 0$, введем в рассмотрение полиномы по переменной t

$$P_m^\alpha(\xi^{-1}, t) = \frac{e^{t\xi^{-\alpha}}}{m!} \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-t\xi^{-\alpha}} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (15)$$

Введем ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s(t) e_s, \quad (16)$$

коэффициенты которого вычисляются следующим образом. Если e_q – собственный вектор, не имеющий присоединенных, то

$$c_q(t) = e^{-\lambda_q^\alpha t} c_q, \quad (17)$$

где λ_q – собственное значение оператора $\mathcal{A}_{s,2}$.

Если векторы $e_q, e_{q+1}, \dots, e_{q+k}$ образуют жорданову цепочку, то

$$c_{q+j}(t) = e^{-\lambda_q^\alpha t} \sum_{m=0}^{k-j} P_m^\alpha(\lambda_q, t) c_{q+j+m} \quad (0 \leq j \leq k), \quad (18)$$

где

$$c_q = \frac{(f, g_q)}{(e_q, g_q)}$$

– коэффициенты разложения вектора f по системе e_q .

Пусть ряд (16) обладает подпоследовательностью частичных сумм $S_{N_\nu}(t)$, которая сильно сходится в $W_2^s(Q)$ при всех $t > 0$, и пусть $u(t)$ – соответствующая предельная функция:

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} c_s(t) e_s \right).$$

Пусть также

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = f.$$

Будем говорить, что ряд (16), соответствующий f , *суммируем к f по методу (A, λ, α)* .

Будем также говорить, что система e_q ($q = 1, 2, \dots$) *корневых функций оператора $\mathcal{A}_{s,2}$ образует базис Абеля со скобками порядка α в $W_2^s(Q)$* , если для любого $f \in W_2^s(Q)$ соответствующий ряд (16) суммируем к f по методу (A, λ, α) .

ЛЕММА 5. Если $f = T_{s,2}h$, $h \in W_2^s(Q)$ и $0 \leq s < 2m$, то

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\lambda^\alpha t} T_{s,2} (I - \lambda T_{s,2})^{-1} f d\lambda = f. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$(I - \lambda T_{s,2})^{-1} T_{s,2}^2 = \frac{1}{\lambda^2} [(I - \lambda T_{s,2})^{-1} - (I + \lambda T_{s,2})].$$

Поэтому, заменяя f на $T_{s,2}h$, получаем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\lambda^\alpha t} \frac{(I - \lambda T_{s,2})^{-1} h}{\lambda^2} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\lambda^\alpha t} \frac{(I + \lambda T_{s,2}) h}{\lambda^2} d\lambda.$$

В силу выбора ветвей функции λ^α имеем $|\arg \lambda^\alpha| \leq \pi/2 - \omega_0$; кроме того, подынтегральная функция регулярна в пересечении G с кругом $|\lambda| < R$ и достаточно быстро убывает в $\bar{G}$ при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, второй интеграл в правой части равен нулю. Первый интеграл в силу оценки (14) сходится равномерно по t при $t \geq 0$ и любом $s < 2m$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(I - \lambda T_{s,2})^{-1} h}{\lambda^2} d\lambda.$$

Этот интеграл равен вычету подынтегральной функции при $\lambda = 0$. Вычисляя его, находим

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = T_{s,2}h = f.$$

Дословно повторяя доказательство леммы 6 из [9], можно получить следующее утверждение.

ЛЕММА 6. Вычет функции $e^{-\lambda^\alpha t} T_{s,2} (I - \lambda T_{s,2})^{-1} f$ в полюсе λ_i оператора $(I - \lambda T_{s,2})^{-1}$ равен

$$- \sum_{q=q_1}^{q_2} c_q(t) e_s, \quad (20)$$

где $e_{q_1}, e_{q_1+1}, \dots, e_{q_2}$ — жорданов базис оператора $T_{s,2}$ в корневом подпространстве $\mathcal{N}_i$, а $c_q(t)$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам (17), (18).

Используя приведенные результаты, получаем теорему о суммируемости по корневым функциям оператора $\mathcal{A}_{s,2}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq s < 2m$, выполнено условие III для некоторых p_1, p_2 и существуют лучи $\arg \lambda = \theta_j$, $j = 1, \dots, N$, на комплексной плоскости такие, что

- углы, на которые разбивается комплексная плоскость этими лучами, меньше, чем $2\pi/n$,
- локальная задача (5), (6) эллипична с параметром на лучах $\arg \lambda = \theta_j$, $j = 1, \dots, N$.

Тогда для любого $f \in W_2^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$ ряд по корневым функциям оператора $\mathcal{A}_{s,2}$ суммируем к f в $W_2^s(Q)$ по методу $(A, \lambda, n/(2m) + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы осталось показать, что для любого $t > 0$ существует сходящаяся подпоследовательность частичных сумм. Согласно лемме 3 для резольвенты оператора $T_{s,2}$ верна оценка (13). Пусть R – некоторое положительное число и $1 > \delta > 0$. Используя теорему 11 [13, гл. I, § 8] при $\eta = \delta/8$, получим, что в кольце

$$R > |\lambda| > (1 - \delta)R$$

найдется окружность

$$|\lambda| = \tilde{R}, \quad (21)$$

на которой верна оценка

$$|C(1/\lambda)| > e^{-\ln\{\max |C(1/(2e \operatorname{Re} e^{i\psi}))|\}(2 + \ln(12e/\delta))} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi).$$

Заменяя в оценке (13) ε на $\varepsilon/4$, имеем

$$\|(I - \lambda T_{s,2})^{-1}\|_{s,2} \leq e^{|\lambda|^{n/(2m)+\varepsilon/2}} \quad (22)$$

на окружности (21).

Фиксируя R и δ , получим последовательность

$$R_\nu = R(1 - \delta)^{-\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Следовательно, в каждом кольце $R_\nu < |\lambda| < R_{\nu+1}$ найдется окружность $|\lambda| = \tilde{R}_\nu$, на которой выполнена оценка (22). Обозначим через γ_ν границу пересечения кольца $\tilde{R}_{\nu+1} \geq |\lambda| \geq \tilde{R}_\nu$ с дополнением множества G , через $\gamma_{\nu,k}$, $k = 1, \dots, N$, – связанные компоненты пересечения окружности $|\lambda| = \tilde{R}_\nu$ и дополнения G .

Пусть N_ν – число полюсов $(I - \lambda T_{s,2})^{-1}$ в круге $|\lambda| \leq \tilde{R}_\nu$ с учетом их кратности. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} e^{-\lambda^\alpha t} T_{s,2} (I - \lambda T_{s,2})^{-1} f d\lambda = \sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1} c_s(t) e_s.$$

На дугах $\gamma_{\nu,k}$ интеграл оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \|I_{\nu k}\|_{s,2,Q} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\nu,k}} e^{-\lambda^\alpha t} T_{s,2} (I - \lambda T_{s,2})^{-1} f d\lambda \right\|_{s,2,Q} \\ &\leq \|T_{s,2}\|_{s,2} |\lambda| e^{-t \operatorname{Re} \lambda^\alpha} e^{|\lambda|^{n/(2m)+\varepsilon/2}} \|f\|_{s,2,Q} \quad (k = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

По построению функции λ^α на каждой дуге $|\arg \lambda^\alpha| < \pi/2 - \omega_0$, поэтому

$$\operatorname{Re} \lambda^\alpha \geq |\lambda|^\alpha \sin \omega_0.$$

Учитывая, что

$$R_\nu < \tilde{R}_\nu < R_{\nu+1} = R(1 - \delta)^{-\nu},$$

получим

$$\|I_{\nu k}\|_{s,2,Q} \leq \|T_{s,2}\|_{s,2} R_\nu e^{-t |R_\nu|^{n/(2m)+\varepsilon} \sin \omega_0 + |R_\nu|^{n/(2m)+\varepsilon/2}} \|f\|_{s,2,Q} \quad (k = 1, \dots, N). \quad (23)$$

Аналогично оцениваются интегралы на прямолинейных участках контура γ_ν :

$$\|J_{\nu k}\|_{s,2,Q} \leq \|T_{s,2}\|_{s,2} R_\nu^{1+s/(2m)} e^{-tR_\nu^\alpha \sin \omega_0} ((1-\delta)^{-2} - 1) \|f\|_{s,2,Q} \quad (k = 1, \dots, 2N). \quad (24)$$

Из оценок (23) и (24) видно, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N (\|I_{\nu k}\|_{s,2,Q} + \|I_{\nu+1,k}\|_{s,2,Q}) + \sum_{k=1}^{2N} \|J_{\nu k}\|_{s,2,Q} \right)$$

сходится при любом $t > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $0 \leq s < m_\mu + 1/2$, $\mu = 1, \dots, m$. Тогда система корневых функций оператора $\mathcal{A}_{s,2}$ образует в $W_2^s(Q)$ базис Абеля со скобками порядка $n/(2m) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 $W_2^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$ плотно в $W_2^s(Q)$. Тогда из оценок (23), (24) следует, что $u(t)$ существует для любого $f \in W_2^s(Q)$. Введем семейство операторов $U(t)f$ ($t > 0$), действующих в $W_2^s(Q)$ по формуле $U(t)f = u(t)$. В силу теоремы Банаха–Штейнгауза и леммы 1 получаем, что семейство операторов $U(t)$ ($0 < t \leq \delta$) для некоторого $\delta > 0$ равномерно ограничено в $W_2^s(Q)$. Тогда, выбирая $f_\varepsilon \in W_2^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$ такой, что $\|f_\varepsilon - f\|_{s,2,Q} < \varepsilon$, имеем

$$\begin{aligned} \|u(t) - f\|_{s,2,Q} &= \|U(t)f - U(t)f_\varepsilon + U(t)f_\varepsilon - f_\varepsilon + f_\varepsilon - f\|_{s,2,Q} \\ &\leq \|U(t)\|_{s,2} \|f - f_\varepsilon\|_{s,2,Q} + \|U(t)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{s,2,Q} + \|f - f_\varepsilon\|_{s,2,Q}, \end{aligned}$$

где $0 < t \leq \delta$. В силу того, что $\lim_{t \rightarrow 0} U(t)f_\varepsilon = f_\varepsilon$, получаем при достаточно малых $t > 0$, что

$$\|u(t) - f\|_{s,2,Q} < \varepsilon.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда система корневых функций оператора $\mathcal{A}_{s,2}$ полна в $W_2^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$ в топологии $W_2^{2m+s}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 система корневых функций оператора $\mathcal{A}_{s,2}$ плотна в $W_2^{2m+s}(Q)$ в топологии $W_2^s(Q)$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A}_{s,2}^{-1}$ существует и отображает ограниченным образом $W_2^s(Q)$ в $W_2^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$. Тогда для произвольного $f \in W_2^{2m+s}(Q, \{b_\mu\}_1^m)$ вектор $g = \mathcal{A}_{s,2}f \in W_2^s(Q)$. В силу полноты системы корневых функций оператора $\mathcal{A}_{s,2}$ найдется последовательность $\{\psi_k\}$ конечных сумм корневых функций такая, что $\psi_k \rightarrow g$. Тогда

$$\mathcal{A}_{s,2}^{-1}\psi_k \rightarrow \mathcal{A}_{s,2}^{-1}g = f \quad (k \rightarrow \infty)$$

в топологии $W_2^{2m+s}(Q)$. Остается только заметить, что корневые функции инвариантны относительно $\mathcal{A}_{s,2}^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположим, что локальная задача (5), (6) эллиптична с параметром на каком-нибудь луче и выполнено условие III при некоторых p_1 и p_2 . Тогда, рассуждая аналогично работе [12, с. 131–132], нетрудно получить, что операторы $\mathcal{A}_{s,p}$ при $p_1 \leq p \leq p_2$, $0 \leq s \leq 2m$ имеют одинаковые корневые функции. Таким образом, рассматривая системы корневых функций операторов $\mathcal{A}_{s,p}$, мы рассматриваем одну и ту же систему функций. Обозначим ее как $\mathcal{H}_{p_1 p_2}$. Очевидно также, что операторы $\mathcal{A}_{s,p}$ имеют одинаковые собственные значения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда система функций $\mathcal{H}_{p_1 p_2}$ полна в $W_p^s(Q)$ и в $W_p^{2m+s}(Q, \{B_\mu\}_1^m)$ в топологии $W_p^{2m+s}(Q)$ при $p_1 \leq p \leq p_2$, $0 \leq s < m_\mu + 1/p$, $\mu = 1, \dots, m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда локальная задача (5), (6), порожденная нелокальной задачей (1), (2), эллиптична с параметром на любом луче $\arg \lambda = \theta \neq 0$, утверждения о суммируемости и базисности по Абелю могут быть усилены следующим образом: вместо порядка $\alpha = \beta_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, можно взять любое $\alpha > \beta_0$. Кроме этого, для таких задач можно получить первый член асимптотики собственных значений. В силу замечания 1 полученная асимптотика собственных значений будет выполняться для всех операторов $\mathcal{A}_{s,p}$, где $p_1 \leq p \leq p_2$, $0 \leq s \leq 2m$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие III при некоторых p_1, p_2 и на любом луче $\arg \lambda = \theta \neq 0$ локальная задача (5), (6) эллиптична с параметром. Тогда для функции распределения модулей собственных значений операторов $\mathcal{A}_{s,p} - N(|\lambda|)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$N(|\lambda|) \sim \omega(\mathcal{A}, Q) |\lambda|^{n/(2m)} \quad (\lambda \rightarrow +\infty),$$

где

$$\omega(\mathcal{A}, Q) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^n : A^0(x, \xi) \leq 1\}} d\xi dx,$$

$$p_1 \leq p \leq p_2, 0 \leq s \leq 2m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы и леммы 2 при $s = 0$ на любом луче $\arg \lambda = \theta \neq 0$ выполнена оценка

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}_{0,2})\|_{0,2} = O(|\lambda|^{-1}).$$

Применяя теорему 1 [14], получаем доказываемое утверждение для оператора $\mathcal{A}_{0,2}$. В силу замечания 1 результат остается верным и для всех операторов $\mathcal{A}_{s,p}$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для оператора Лапласа в двумерном единичном круге K

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= -\Delta v(x) = f(x) \quad (x \in K), \\ Bv &= v\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) - v(1, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Вводя операторы $\mathcal{A}_{s,p}$ и применяя теорему 2, получаем, что система корневых функций $\mathcal{A}_{s,p}$ полна в $W_p^s(Q)$ и в $W_p^{2+s}(Q, B)$ в топологии $W_p^{2+s}(Q)$ при $p > 1$, $0 \leq s < 1/p$. В силу теоремы 3 для собственных значений оператора $\mathcal{A}_{s,p}$ верна асимптотическая формула

$$N(r) \sim \frac{1}{4}r \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград: Типография М. П. Фроловой, 1917.
- [2] Krall A. M. The development of general differential and general boundary systems // Rocky Mountain J. Math. 1972. V. 5. P. 493–542.
- [3] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.
- [4] Шкалик А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
- [5] Скубачевский А. Л. Нелокальные эллиптические задачи с параметром // Матем. сб. 1983. Т. 121. № 6. С. 201–210.
- [6] Browder F. Asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for nonlocal elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. 1965. V. 87. № 1. P. 175–195.
- [7] Моисеев Е. И. О спектральных характеристиках одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 864–872.
- [8] Моисеев Е. И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2082–2093.
- [9] Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Тр. ММО. 1962. Т. 11. С. 3–35.
- [10] Ковалева О. А., Скубачевский А. Л. Нелокальные эллиптические задачи в пространствах Соболева $W_p^1(Q)$ // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 4. С. 449–451.
- [11] Agranovich M., Denk R., Faierman M. Weakly Smooth Nonselfadjoint Spectral Elliptic Boundary Problems. Advances in Partial Differential Equations (Math. Topics, 14). Berlin: Akademie Verlag, 1997.
- [12] Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147.
- [13] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [14] Бойматов К. Х., Костюченко А. Г. Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем дифференциальных операторов в ограниченных областях // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1678–1693.

Московский государственный авиационный институт

Поступило

28.03.2001

Исправленный вариант

14.01.2002