Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. С. Рыбникова, О бесконечных системах линейных автономных и неавтономных стохастических уравнений, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 890–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 11:26:01

УДК 519.216.73+517.983.53

О БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ И НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Т. С. Рыбникова

Изучается разрешимость автономных и неавтономных линейных стохастических дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Доказывается существование сильного непрерывного (непрерывного в среднем степени p) решения автономного уравнения с непрерывной (соответственно непрерывной в среднем степени p) правой частью. Получены условия единственности решения. Приведен пример, показывающий, что обыкновенное и стохастическое линейные неавтономные уравнения с одинаковым оператором в $\mathbb{R}^\infty$ не всегда разрешимы. Для неавтономных стохастических уравнений найдены условия существования и единственности.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В работе рассматриваются бесконечные системы линейных стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dX_n(t) = dW_n(t) + \sum_{k=1}^{m_n} a_{nk}(t)X_k(t)dt.$$

Такие системы появляются во многих приложениях. Их можно трактовать как линейные стохастические дифференциальные уравнения в пространстве $\mathbb{R}^\infty$ всех последовательностей. В настоящей работе исследуется вопрос существования сильных решений автономных и неавтономных линейных стохастических дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Нетривиальность задачи связана с тем, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ ненормируемо. В банаховых пространствах обыкновенное линейное дифференциальное уравнение и стохастическое линейное дифференциальное уравнение с непрерывной (соответственно непрерывной в среднем степени p) правой частью однозначно разрешимы. В ненормируемых локально выпуклых пространствах, даже в полных метрических пространствах ситуация иная (см. примеры в [1]): обыкновенное линейное дифференциальное уравнение и стохастическое линейное дифференциальное уравнение с непрерывным оператором не всегда разрешимы (см. также пример 4.6), с другой стороны, они могут иметь бесконечно много решений (см. пример 3.7).

К счастью, пространство $\mathbb{R}^\infty$ обладает особыми свойствами. Например, автономные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывным оператором разрешимы при любом начальном условии (см. [2]). Это же верно и для стохастических линейных автономных уравнений с непрерывной правой частью, что уже

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-99267 и № 01-01-00858, а также гранта DFG 436 RUS 113/343/0(R).

было анонсировано в [3] с наброском доказательства. Отметим, однако, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ в этом отношении необычно: существуют пространства Фреше, в которых не каждое обыкновенное или стохастическое линейное дифференциальное уравнение с непрерывным оператором разрешимо (см. примеры в [1]). В п. 3 статьи мы приводим детали доказательства разрешимости линейного автономного стохастического уравнения в $\mathbb{R}^\infty$, не включенные в короткую заметку [3].

Другие результаты работы касаются неавтономных систем и взаимосвязи между детерминированным и стохастическим уравнениями с одним и тем же оператором. Приведен пример неразрешимого линейного неавтономного стохастического дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^\infty$, получены условия существования и единственности решения для таких систем. Это обобщает результаты Герцога [4] для детерминированного случая.

2. Обозначения и терминология. Обозначим через $\mathbb{R}^\infty$ пространство всех действительных последовательностей, наделенное топологией покоординатной сходимости. Обозначим через $\mathbb{R}_0^\infty$ сопряженное к нему пространство, т.е. пространство всех финитных последовательностей. Пусть $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$. Обозначим через $C(E, F)$ пространство непрерывных отображений топологического пространства E в топологическое пространство F . Через $C[a; b]$ обозначим банахово пространство непрерывных вещественных функций на $[a; b]$ с нормой $\|f\|_C = \max_{t \in [a; b]} |f(t)|$. Для локально выпуклого пространства E через E^* обозначается его сопряженное, а через $\mathcal{L}(E)$ – пространство непрерывных линейных операторов в E . Минимум из двух действительных чисел a и b обозначим через $a \wedge b$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}_+$, на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в топологическом пространстве называется *непрерывным*, если почти все его траектории $\xi(\cdot, \omega)$ непрерывны. Отображение $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ называется *непрерывным*, если образ $A(t)x$ непрерывно зависит от t для любого x из $\mathbb{R}^\infty$.

Пусть $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ – неубывающее семейство σ -алгебр, т.е. *фильтрация* на Ω . Мы будем предполагать, что фильтрация $\mathcal{F}_t$ полна, т.е. $\mathcal{F}_0$ содержит все множества меры нуль. Напомним, что случайный процесс $\xi(\cdot): \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется $\mathcal{F}_t$ -*согласованным* (или *согласованным*), если при любом $t \in \mathbb{R}_+$ функция $\omega \rightarrow \xi(t, \omega)$ является $\mathcal{F}_t$ -измеримой. Случайный процесс $\xi(\cdot, \cdot) = (\xi_n(\cdot, \cdot))$, определенный на пространстве $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, со значениями в пространстве $\mathbb{R}^\infty$ называется *согласованным*, если все его координаты $\xi_n(\cdot, \cdot)$ согласованы. *Предсказуемой σ -алгеброй* $\mathcal{P}_\infty$ на $[0; +\infty) \times \Omega$ называется σ -алгебра, порожденная множествами вида

$$[s; t] \times F, \quad \text{где } 0 \leq s < t < \infty, \quad F \in \mathcal{F}_s. \quad (2.1)$$

Сужение $\mathcal{P}_\infty$ на $[0; T] \times \Omega$ обозначается через $\mathcal{P}_T$. Случайный процесс $\xi(\cdot, \cdot)$ на $[0; +\infty) \times \Omega$ (соответственно на $[0; T] \times \Omega$) со значениями в $\mathbb{R}^1$ называется *предсказуемым*, если он измерим относительно $\mathcal{P}_\infty$ (соответственно относительно $\mathcal{P}_T$). Случайный процесс $\xi(\cdot, \cdot)$ на $[0; +\infty) \times \Omega$ (соответственно на $[0; T] \times \Omega$) со значениями в $\mathbb{R}^\infty$ называется *предсказуемым*, если все его координаты предсказуемы.

Предсказуемые процессы согласованны. Согласованные непрерывные скалярные процессы являются предсказуемыми (см. [5, раздел 3.3]).

Наряду с непрерывными случайными процессами мы будем рассматривать процессы $\xi(\cdot) = (\xi_n(\cdot))_{n=1}^\infty$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^\infty$, которые являются непрерывными в среднем степени $p \geq 1$, т.е. $E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^p \rightarrow 0$ при $t \rightarrow s$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, отображение $[0; T] \rightarrow L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, которое переводит $t \mapsto \xi_n(t, \cdot)$, непрерывно при всех $n \in \mathbb{N}$. При обсуждении свойств в среднем степени p непрерывность,

гладкость, интеграл и производная случайной функции будут пониматься в смысле сходимости в $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Производная в среднем степени p случайного процесса определяется как предел в L^p величин $(\xi_{t+h} - \xi_t)/h$ при $h \rightarrow 0$, а интеграл – как предел интегральных сумм Римана, который существует для всех непрерывных в среднем степени $p \geq 1$ процессов. При этом если некоторая случайная функция $\zeta_t, t \in [a; b]$, измерима и непрерывна в среднем степени $p \geq 1$, то почти наверное $((L^p) \int_a^t \zeta_s ds)(\omega) = \int_a^t \zeta_s(\omega) ds$, где слева стоит интеграл в среднем, а справа – интеграл, определенный отдельно для каждой реализации (см. [6, п. 2.1.4]). Отсюда следует, что если $\zeta(\cdot)$ – согласованный непрерывный в среднем степени $p \geq 1$ процесс, то процесс $\int_0^t \zeta_s(\omega) ds$ также согласован. Легко видеть, что правая часть указанного равенства $\mathcal{F}_t$ -согласована, значит, то же верно и для левой части. Детали см. в [6, п. 2.1.4].

Пусть заданы $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\infty)$ и согласованный случайный процесс $\xi(\cdot)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принимающий значения в $\mathbb{R}^\infty$. Напомним, что оператор A принадлежит $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ тогда и только тогда, когда его матрица A содержит в каждой строке лишь конечное число ненулевых элементов. Предположим, что задано непрерывное отображение $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\xi(t) = (\xi(t, \omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+)$ – непрерывный (соответственно непрерывный в среднем степени p) согласованный случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^\infty$. Процесс $X(t) = (X(t, \omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+)$ со значениями в $\mathbb{R}^\infty$ называется *сильным решением уравнения*

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + f(t)dt + d\xi(t), \quad X(0, \omega) = X_0(\omega), \quad (2.2)$$

если он согласован и удовлетворяет для почти всех ω (соответственно в среднем степени p) интегральному уравнению

$$X(t, \omega) = X_0(\omega) + \int_0^t A(s)X(s, \omega)ds + \int_0^t f(s)ds + \xi(t, \omega) - \xi(0, \omega) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.3)$$

понимаемому по координатам.

В частности, необходимо, чтобы каждая из координат процесса $AX(s, \omega)$ (т.е. функции $\sum_{i=1}^\infty a_{ni}(s)X_i(s, \omega)$) была локально интегрируема по s при почти всех ω . Для непрерывных в среднем степени p процессов необходимо, чтобы $X_{0i}(\omega) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Уравнение (2.2) эквивалентно уравнению

$$dX(t) = AX(t)dt + d\zeta(t), \quad X(0, \omega) = X_0(\omega),$$

где $\zeta(t, \omega) = \int_0^t f(s)ds + \xi(t, \omega)$, однако в некоторых ситуациях удобно бывает использовать запись (2.2), например, когда процесс $\xi(\cdot, \cdot)$ винеровский.

Последовательность непрерывных случайных процессов $u_n(t, \omega)$ будем называть *сходящейся к процессу $u(t, \omega)$ по вероятности равномерно по $t \in [0; T]$* , если $P\{\omega : \|u_n(\cdot, \omega) - u(\cdot, \omega)\|_C > a\} \rightarrow 0$ для любого $a > 0$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. соответствующие $C[0; T]$ -значные случайные векторы сходятся по вероятности).

3. Автономные системы. Доказательства следующих двух лемм приведены в работе [3]. Лемма 3.2 обобщает результат [2], доказанный для детерминированного случая (т.е. для $\xi \equiv 0$). В случае стохастических уравнений возникает ряд технических трудностей, связанных с измеримостью решения.

ЛЕММА 3.1. (i) Для любого непрерывного согласованного скалярного случайного процесса $\xi(t, \omega): [0; T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ существует последовательность согласованных случайных процессов с гладкими траекториями $u_n(t, \omega)$, сходящаяся к ξ_t по вероятности равномерно по t из $[0; T]$, причем $u_n(0) \equiv \xi(0)$, $u_n^{(k)}(0) \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Для любого непрерывного в среднем степени p согласованного скалярного случайного процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in [0; T]$, существует последовательность гладких в среднем степени p согласованных случайных процессов $u_n(t, \omega)$, сходящаяся к ξ_t по вероятности равномерно по t из $[0; T]$, причем $u_n(0) \equiv \xi(0)$, $u_n^{(k)}(0) \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3.2. Уравнение, имеющее в координатной форме вид

$$dX_n(t) = X_{n+1}(t) dt + d\xi_n(t) + f_n(t) dt, \quad X(0) = \xi(0), \quad (3.1)$$

имеет сильное решение X для произвольных $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\infty)$ и $\mathcal{F}_t$ -согласованного непрерывного (соответственно непрерывного в среднем степени p) случайного процесса $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, причем X – непрерывный (соответственно непрерывный в среднем степени p) процесс.

Следующий результат хорошо известен и доказывается методом последовательных приближений. По поводу близких результатов см. [1, теорема 6.15], [7].

ЛЕММА 3.3. Пусть E — банахово пространство, заданы некоторые $A \in \mathcal{L}(E)$, $f \in C(\mathbb{R}_+, E)$ и $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — непрерывный (соответственно непрерывный в среднем степени p) согласованный случайный процесс со значениями в E . Тогда уравнение

$$dX(t) = AX(t) dt + f(t) dt + d\xi(t), \quad X(0) = \xi(0),$$

имеет единственное сильное решение X со значениями в E , причем решение X непрерывно (соответственно непрерывно в среднем степени p).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, которую можно усмотреть из рассуждений в работе [2]. Однако для приложения к стохастическому случаю необходима более детальная формулировка.

ЛЕММА 3.4. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$. Тогда найдется такой оператор $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_0^\infty)$ с $C^\top \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$, что $C^\top A(C^\top)^{-1}$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ B_{21} & A_2 & 0 & & \cdots & 0 \\ B_{31} & B_{32} & A_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где A_i являются либо бесконечномерными блоками вида

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

либо конечномерными блоками, а B_{ij} — блоки соответствующей размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан стандартный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, в $\mathbb{R}_0^{\infty}$. Построим новый базис $v_i = Ce_i$, $i \in \mathbb{N}$, подобрав оператор C так, чтобы композиция $C^T A (C^T)^{-1}$ имела бы форму (3.2). Процесс перехода к новому базису аналогичен описанному в [2]. Он состоит из одного или нескольких (возможно, счетного числа) шагов. Мы будем обозначать через v_i^n вектор, построенный под номером i на n -ом шаге. Одновременно мы будем строить матрицу A' . На n -м шаге мы строим блоки $A_n, B_{n,1}, \dots, B_{n,n-1}$. Мы будем использовать индукцию по номеру шага, при этом внутри каждого шага новые векторы будут выбираться также индуктивно.

Шаг 1. Положим $v_1^1 = e_1$. Если $A^T v_1^1 \in \text{Lin}\{v_1^1\}$, то $A_1 = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ – коэффициент такой, что $A^T v_1^1 = \alpha v_1^1$. Тогда $M_1 = \text{Lin}\{v_1^1\}$ и шаг завершен. В противном случае $A^T v_1^1 \notin \text{Lin}\{v_1^1\}$ и мы положим $v_2^1 = A^T v_1^1$. Напомним, что в каждой строке матрицы A содержится только конечное число ненулевых элементов. Следовательно, столбцы матрицы A^T имеют конечную длину и $v_2^1 \in \mathbb{R}_0^{\infty}$. В этом случае шаг продолжается.

Опишем индуктивно его продолжение. Пусть шаг не завершен, и мы уже построили векторы $v_i^1 \in \mathbb{R}_0^{\infty}$ для $i \leq j$. Обозначим $M = \text{Lin}(v_1^1, \dots, v_j^1)$.

Если $A^T v_j^1 \notin M$, то положим $v_{j+1}^1 = A^T v_j^1$. Вектор $v_j^1 \in \mathbb{R}_0^{\infty}$, столбцы матрицы A^T также имеют конечное число элементов, поэтому $v_{j+1}^1 \in \mathbb{R}_0^{\infty}$. Мы получили еще одну строку блока A_1 и матрицы A' : это строка номер j , в которой на $(j+1)$ -м месте стоит единица, остальные элементы – нули. В этом случае шаг продолжается, и мы снова приходим к ситуации, описанной в предыдущем абзаце.

Если же $A^T v_j^1 \in M$, то j -й строкой блока A_1 и матрицы A' станут коэффициенты разложения этого вектора по базису $(v_1^1, \dots, v_j^1)$, т.е. такие $(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, что $A^T v_j^1 = \sum_{i=1}^j \alpha_i v_i^1$. На этом шаг завершается.

Если $\text{Lin}\{v_i^1\} = \mathbb{R}_0^{\infty}$, то процесс выбора нового базиса $\mathbb{R}_0^{\infty}$ заканчивается. В противном случае мы переходим к выполнению нового шага.

Опишем шаг с номером n . По индуктивному предположению заданы подпространства $M_j = \text{Lin}\{v_i^j\}$ для $1 \leq j \leq n-1$, причем векторы v_i^j являются линейно независимыми и число векторов, определенных при каждом j (оно может оказаться и бесконечным), зависит от j . Обозначим $L_{n-1} = \text{Lin}\{M_1 \dots M_{n-1}\}$. По индуктивному предположению будем считать, что векторы $e_1, \dots, e_{n-1} \in L_{n-1}$ и блоки A_j и B_{ji} уже построены для $j \leq n-1$, $i < j$.

Шаг n . Положим v_1^n равным e_m , где $m = \min\{k: e_k \notin L_{n-1}\}$. Теперь будем строить векторы v_j^n индукцией по j . Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Предположим, что уже построены векторы $v_i^n \in \mathbb{R}_0^{\infty}$ при $i \leq j$ и задано подпространство $M_n = \text{Lin}\{v_i^n, i \leq j\}$.

Если $A^T v_j^n \notin M = \text{Lin}(L_{n-1} \cup \{v_1^n, \dots, v_j^n\})$, то определим следующий вектор как $v_{j+1}^n = A^T v_j^n$. По указанным выше причинам $v_{j+1}^n \in \mathbb{R}_0^{\infty}$. Таким образом, построена новая строка матрицы A_n . Это строка номер j , на $(j+1)$ -м месте которой стоит единица, остальные ее элементы – нули. Эта строка с остальными нулевыми элементами составит новую строку матрицы A' . Все элементы j -й строки блоков $B_{n,1}, \dots, B_{n,n-1}$ будут нулями. В этом случае шаг продолжается, и мы возвращаемся к альтернативе, появившейся в начале шага n .

Если же $A^T v_j^n \in M$, то следующей строкой матрицы A' будет вектор

$$(\beta_{11}, \dots, \beta_{ij}, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_j),$$

определенный равенством

$$A^T v_j^n = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_i \beta_{li} v_i^l + \sum_{i=1}^j \alpha_i v_i^n.$$

Отметим, что первая сумма – это проекция вектора $A^\top v_j^n$ на подпространство L_{n-1} , вторая сумма – это проекция того же вектора на $M_n = \text{Lin}(v_1^n, \dots, v_j^n)$. Тогда j -й строкой блока A_n станет $(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, в то время как j -й строкой $B_{n,k}$, $1 \leq k \leq n-1$, будет $(\beta_{k1}, \dots, \beta_{kl}, \dots)$, $l \in \{i, e_i \in M_k\}$. На этом шаг завершается.

Если $\text{Lin}\{M_1, \dots, M_n\} = \mathbb{R}_0^\infty$, то процесс выбора нового базиса $\mathbb{R}_0^\infty$ завершен. Если же это не так, то мы переходим к выполнению следующего шага.

Описанный выше процесс состоит из конечного или бесконечного числа шагов. На выходе мы имеем систему векторов $H = \{v_k^n\}$, которая является алгебраическим базисом в пространстве $\mathbb{R}_0^\infty$. Действительно, по построению множество H линейно независимо и его оболочка содержит все e_m , $m \in \mathbb{N}$. Матрица C , матрица перехода к новому базису, определена так, что композиция $C^\top A(C^\top)^{-1}$ имеет форму (3.2). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.5. *Уравнение*

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t)dt + d\xi(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3.3)$$

имеет сильное решение при любых $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$, $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\infty)$ и для любого $\mathcal{F}_t$ -согласованного непрерывного (соответственно непрерывного в среднем степени p) случайного процесса ξ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Причем процесс $X(t, \omega)$ непрерывный (соответственно непрерывный в среднем степени p).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$dY(t) = A'Y(t)dt + g(t)dt + d\zeta(t), \quad (3.4)$$

полученное из (3.3) линейным преобразованием координат с матрицей $C^\top$, построенной в лемме 3.4. В (3.4) матрица A' имеет форму (3.2). Процесс $\xi(\cdot)$ является $\mathcal{F}_t$ -согласованным и непрерывным (соответственно непрерывным в степени p), поэтому $\zeta(\cdot)$ также обладает этими свойствами.

Почему система (3.4) разрешима? Пусть A_i действуют в подпространствах M_i . Во-первых, сужение системы уравнений (3.4) на подпространство M_1 имеет вид

$$dY^1(t) = A_1Y^1(t)dt + g^1(t)dt + d\zeta^1(t), \quad (3.5)$$

где $g^1(t)$ и $\zeta^1(t)$ – это проекции $g(t)$ и $\zeta(t)$ соответственно на подпространство M_1 . Отметим, что система (3.5) либо является конечномерной, либо удовлетворяет условиям леммы 3.2. В обоих случаях система имеет сильное решение $Y^1(\cdot)$. Зная координаты Y_i^1 решения на подпространстве M_1 , мы можем подставить их в уравнение (3.4). Теперь в уравнении (3.4) элементы всех блоков B_{i1} , расположенных под A_1 , умножаются на уже известные функции Y_i^1 . Мы можем найти решение уравнения на подпространстве M_2 . В этом случае мы приходим к системе

$$dY^2(t) = A_2Y^2(t)dt + g^2(t)dt + d\zeta^2(t) + B_{21}Y^1(t)dt, \quad (3.6)$$

где $g^2(t)$ и $\zeta^2(t)$ – это сужение соответственно $g(t)$ и $\zeta(t)$ на подпространство M_2 . Система уравнений (3.6) разрешима по тем же причинам, что и система (3.5). Теперь, рассуждая по индукции, предположим, что нам известны сужения решения на подпространства $\{M_1, \dots, M_{n-1}\}$. Подставив уже известные нам координаты решения в уравнение (3.4), мы найдем координаты решения Y_i^n на M_n . Продолжая действовать таким образом, мы найдем координаты решения уравнения на всех M_n при таких n , что A_n определены. Наконец, мы найдем решение уравнения (3.3), применив обратное преобразование, полагая $x = (C^\top)^{-1}y$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. В предыдущем доказательстве использованы идеи работы [2] (где рассматриваются детерминированные системы с $\xi = 0$) и работы [8] (где рассматриваются системы, в которых ξ_n – независимые стандартные винеровские процессы). Основная сложность в стохастическом случае – получить согласованное решение. Легко видеть, что в общем случае уравнение (3.3) может иметь несогласованное решение и что согласованное решение (3.3) может быть не единственным.

Как уже отмечалось в [3], доказательство основной теоремы в [8] содержит пробел. Данное выше рассуждение не устраняет этот пробел, а следует по иному пути, позволяющему рассматривать более общие процессы. Тем самым, конечно, оказывается реабилитирован и результат из [8].

ПРИМЕР 3.7. Рассмотрим уравнение

$$x'_n(t) = x_{n+1}(t), \quad x_n(0) = z_n.$$

Легко видеть, что для каждого начального значения z уравнение имеет бесконечно много решений.

Действительно, по теореме Бореля существует функция φ класса C^∞ такая, что $\varphi^{(n)}(0) = z_n$ для всех n . Функция φ порождает решение

$$x_n(t) = \varphi^{(n)}(t), \quad x_n(0) = z_n.$$

Очевидно, что такая функция φ не единственна, их бесконечно много и, следовательно, уравнение имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим теперь уравнение (3.1). Прибавляя к решению уравнения (3.1), построенному в лемме 3.2, произвольное решение однородного уравнения с нулевым начальным условием, мы получаем новое решение уравнения (3.1). Однородное уравнение имеет бесконечно много решений, это верно и для уравнения (3.1).

Далее, пусть $W(\cdot, \cdot)$ – винеровский процесс на прямой и $x_n(t, \omega) = W(1, \omega) \cdot \varphi^{(n)}(t)$. Для того чтобы получить несогласованное решение (3.1), прибавим $x(t, \omega) = (x_n(t, \omega))_{n=1}^\infty$ к решению уравнения (3.1), построенному в лемме 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. В условиях теоремы предположим, что процесс $\xi(t)$ непрерывен. По условию теоремы процесс $\xi(t)$ согласован, следовательно, он предсказуем. Тогда решение $X(t)$ уравнения (3.3) также предсказуемо, поскольку процесс $X(t)$ является $\mathcal{F}_t$ -согласованным и непрерывным.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. (i) Из доказательства теоремы видно, что если процесс $\xi(t)$ гауссовский, то это же можно сказать и про построенное решение уравнения (3.4). Однако не каждое согласованное решение уравнения (3.4) будет гауссовским. Рассмотрим уравнение (3.1). Разность двух его решений с одинаковыми начальными условиями удовлетворяет (3.8) с нулевыми начальными условиями. Рассмотрим гладкую функцию $g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, которая равна нулю на отрезке $[0; 1/2]$ и равна единице на $[1, +\infty)$. Пусть $\varphi(t, \omega) = g(t) \operatorname{sign}(\xi(1/2, \omega))$. Тогда $x_n(t) = \varphi^{(n)}(t)$ – согласованное негауссовское решение уравнения (3.8). Складывая данное решение однородного уравнения с решением (3.1), построенным в лемме 3.2, получим сильное негауссовское решение уравнения (3.1).

(ii) Пусть процесс $\xi(t)$ в (3.4) имеет конечное математическое ожидание. Тогда если решение не единственно, найдутся сильные решения уравнения (3.4) с бесконечным

математическим ожиданием, поскольку уравнение (3.8) с нулевыми начальными условиями имеет согласованное решение с бесконечным математическим ожиданием. Им будет, например, решение (3.8), порожденное $\varphi(t, \omega) = g(t) \cdot \exp\{\xi(1/2, \omega)\}^2$, где функция $g(t)$ – такая же, как и в пункте (i), а $\xi(\cdot)$ – винеровский процесс на прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Следующие утверждения эквивалентны:

- (a) уравнение (3.3) однозначно разрешимо;
- (b) однородное уравнение $dX(t) = AX(t) dt$, $X(0) = 0$, однозначно разрешимо;
- (c) ряд

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

сходится в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

- (d) спектр $\sigma(A)$ не более чем счетен.

Утверждение (a) равносильно (b). Действительно, для любого ω разность двух решений уравнения (3.3) с одинаковыми начальными условиями удовлетворяет уравнению $dX(t) = AX(t) dt$ с нулевым начальным условием. Утверждения (b) и (c) эквивалентны (см. [1, пример 4.24]). Наконец, равносильность утверждений (c) и (d) доказана в работе [9].

4. Неавтономные системы. В данном пункте рассматриваются неавтономные системы линейных дифференциальных уравнений. Приводится пример, показывающий, что такие системы могут быть неразрешимы, в то время как автономные системы имеют решение при любом начальном значении.

ЛЕММА 4.1. Пусть $A(\cdot) = (a_{ij}(\cdot)): [a; b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ – непрерывное отображение. Тогда для любого номера строки i найдется номер $N(i)$, начиная с которого $a_{ij}(t) \equiv 0$ на $[a; b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Зафиксируем номер строки $k \in \mathbb{N}$. Пусть найдется бесконечная последовательность индексов $\{i_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что элементы

$$a_{ki_1}(\cdot), \dots, a_{ki_n}(\cdot), \dots$$

k -й строки матрицы $A(\cdot)$ не обращаются тождественно в нуль. Рассмотрим семейство функционалов $\{a_k(t)\}$ на $\mathbb{R}^\infty$, где $a_k(t) = (a_{k1}(t), \dots, a_{kn}(t), \dots)$, $t \in [a; b]$, $k \in \mathbb{N}$. Это семейство равномерно ограничено на каждом $x \in \mathbb{R}^\infty$, поскольку отображение $A(\cdot)$ непрерывно на $[a; b]$, т.е. отображение $(A(\cdot)x)_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}(\cdot)x_i$ непрерывно по $t \in [a; b]$ на каждом элементе $x \in \mathbb{R}^\infty$. Отсюда по теореме Банаха–Штейнгауза следует, что семейство $a_k(t)$ равномерно ограничено на каждом компактном множестве в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Однако это семейство функционалов не ограничено на множестве

$$x_{i_1} \in \left[\frac{-1}{\|a_{ki_1}\|_C}; \frac{1}{\|a_{ki_1}\|_C} \right], \quad \dots, \quad x_{i_n} \in \left[\frac{-n}{\|a_{ki_n}\|_C}; \frac{n}{\|a_{ki_n}\|_C} \right], \quad \dots$$

с нулевыми координатами x_j при $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}$, которое является компактом в $\mathbb{R}^\infty$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Поскольку обратное утверждение очевидно, мы получаем такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Отображение $A(t) = (a_{ij}(t)): [a; b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ является непрерывным тогда и только тогда, когда все функции $a_{ij}(\cdot)$ непрерывны и каждая строка содержит лишь конечное число элементов $a_{ij}(\cdot)$, не обращающихся тождественно в нуль на отрезке $[a; b]$.*

Пусть $Z(t)$ – матричнозначное отображение $[0; T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_0^\infty)$; для $y \in \mathbb{R}_0^\infty$ положим

$$U(Z, y) = \text{lin}(\{Z(t_1) \cdots Z(t_k)y : t_1, \dots, t_k \in [0; T], k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\})$$

– наименьшее инвариантное относительно $Z(t)$, $t \in [0; T]$, подпространство, содержащее y . Отображение Z называется *равномерно локально алгебраическим*, если $\dim U(Z, y) < \infty$ для всех $y \in \mathbb{R}_0^\infty$.

В работе [4] получен следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Пусть отображение $A(t): [0; T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ непрерывно, причем отображение $A^\top(t): [0; T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_0^\infty)$ является равномерно локально алгебраическим. Тогда уравнение*

$$y'(t) = -A^\top(t)y(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (4.1)$$

однозначно разрешимо на $[0; T]$ при любом начальном значении $(t_0, y_0) \in [0; T] \times \mathbb{R}_0^\infty$. При любом начальном условии найдется дифференцируемая равномерно локально алгебраическая матричнозначная функция $M(t): [0; T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_0^\infty)$ такая, что $M(t)$ обратима на $\mathcal{L}(\mathbb{R}_0^\infty)$ при всех $t \in [0; T]$ и $y(t) = M(t)y_0$, $t \in [0; T]$, является решением уравнения (4.1). Более того, уравнение

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.2)$$

однозначно разрешимо на $[0; T]$ при любом начальном значении $(t_0, x_0) \in [0; T] \times \mathbb{R}^\infty$ для всех $f \in C([0; T], \mathbb{R}^\infty)$. При любом начальном условии матричнозначная функция $\Lambda(t): [0; T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$, $\Lambda(t) = (M^{-1})^\top(t)$, дифференцируема и

$$x(t) = \Lambda(t)x_0 + \int_{t_0}^t \Lambda(t)\Lambda^{(-1)}(s)f(s)ds, \quad t \in [0; T],$$

является решением уравнения (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Отображение $x(t) = \Lambda(t)x_0$ является решением однородного уравнения $x'(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$, соответствующего уравнению (4.2).

Перенесем сформулированный выше результат на стохастические дифференциальные уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пусть отображение $A(t): [0; T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ непрерывно, причем отображение $A^\top(t): [0; T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_0^\infty)$ является равномерно локально алгебраическим. Тогда уравнение*

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + d\xi(t), \quad X(0) = X_0, \quad (4.3)$$

имеет единственное сильное решение X на отрезке $[0; T]$ для произвольного непрерывного (соответственно непрерывного в среднем степени p) согласованного случайного процесса $\xi(t)$, $t \in [0; T]$, со значениями в $\mathbb{R}^\infty$, причем решение X непрерывно (соответственно непрерывно в среднем степени p) и задается формулой

$$X(t, \omega) = \zeta(t, \omega) + \Lambda(t) \int_0^t \Lambda^{(-1)}(s)A(s)\zeta(s, \omega)ds, \quad t \in [0; T], \quad (4.4)$$

где $\zeta(t, \omega) = X_0(\omega) + \xi(t, \omega) - \xi(0, \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность сильного решения уравнения (4.3) вытекает из единственности решения однородного уравнения (4.2). Действительно, предположим, что $X_1(t, \omega)$ и $X_2(t, \omega)$ – два решения уравнения (4.3) с одинаковыми начальными условиями. Тогда $X_2(t, \omega) - X_1(t, \omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (4.2) с нулевым начальным условием. По теореме 4.3 делаем вывод, что $X_2(t, \omega) - X_1(t, \omega) = 0$, $t \in [0; T]$.

Формула (4.4) представляет из себя стандартное выражение для решения уравнения (4.3), и нам остается проверить, что правая часть равенства корректно определена и на самом деле задает решение. Здесь мы используем наши предположения об отображении $A(\cdot)$.

По теореме 4.3 матричнозначные отображения $\Lambda(\cdot)$ и $\Lambda^{(-1)}(\cdot)$ непрерывны, отображение $A(\cdot)$ непрерывно по предположению, следовательно, по лемме 4.1 интеграл в выражении (4.4) определен как в случае непрерывных процессов, так и в случае непрерывных в среднем степени p процессов. Из (4.4) следует, что процесс $X(t, \omega)$ – согласованный.

Докажем, что процесс $X(\cdot, \cdot)$, определенный равенством (4.4), является решением задачи (4.3). Для этого нам достаточно проверить, что

$$\zeta(t, \omega) + \Lambda(t) \int_0^t \Lambda^{(-1)}(s) A(s) \zeta(s, \omega) ds = \zeta(t, \omega) + \int_0^t A(s) X(s) ds. \quad (4.5)$$

Равенство верно для $t = 0$. Вычитая $\xi(t, \omega)$ из обеих частей равенства (4.5) и дифференцируя (что обосновано леммой 4.1), имеем

$$\Lambda'(t) \int_0^t \Lambda^{(-1)}(s) A(s) \zeta(s, \omega) ds + \Lambda(t) \Lambda^{(-1)}(t) A(t) \zeta(t, \omega) = A(t) X(t). \quad (4.6)$$

Поскольку $\Lambda'(t) = A(t) \Lambda(t)$ по построению, равенство (4.6) эквивалентно равенству

$$A(t) \left(\Lambda(t) \int_0^t \Lambda^{(-1)}(s) A(s) \zeta(s, \omega) ds + \zeta(t, \omega) \right) = A(t) X(t).$$

Последнее выражение верно по (4.4). Следовательно, (4.4) действительно решение уравнения (4.3). Теорема доказана.

Следующий пример является обобщением примера, построенного в работе [4] в случае детерминированных уравнений.

ПРИМЕР 4.6. Пусть задана последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty$ непрерывных функций на отрезке $[0; T]$ и винеровский процесс $W(\cdot, \cdot)$ на $[0, T] \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в $\mathbb{R}^1$. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$x_n(t) = x_{0n} + \int_0^t f_n(s) x_{n+1}(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.7)$$

и линейное стохастическое уравнение

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= x_{01} + \int_0^t f_1(s) \xi_2(s) ds + W(t), \\ \xi_n(t) &= x_{0n} + \int_0^t f_n(s) \xi_{n+1}(s) ds, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тогда при некотором выборе последовательности $(f_n)_{n=1}^\infty$ уравнения (4.7) и (4.8) оказываются неразрешимыми для некоторых начальных условий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала равномерно ограниченную последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных функций на $[0; T]$, принимающих неотрицательные значения и обладающих свойством $\max \operatorname{supp} f_n \leq \min \operatorname{supp} f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда уравнение (4.7) однозначно разрешимо на отрезке $[0; T]$ и решение имеет вид

$$x_n(t) = x_{0n} + \int_0^t f_n(s) ds \cdot x_{0n+1}, \quad t \in [0; T], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Полагая $\alpha_n = \int_0^T f_n(s) ds$, $k, n \in \mathbb{N}$, имеем

$$x(T) = Bx_0, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^{\infty}).$$

Теперь пусть задана возрастающая последовательность $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ точек из $[0; T]$ такая, что $t_1 = 0$ и $t_k < t_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$; пусть $t_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$, $t_{\infty} < T$. Рассмотрим равномерно ограниченную последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных функций на $[0; T]$, у которых $\max([t_k, t_{k+1}] \cap \operatorname{supp} f_n) \leq \min([t_k, t_{k+1}] \cap \operatorname{supp} f_{n+1})$, $n, k \in \mathbb{N}$. Положим $\alpha_{kn} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_n(s) ds$, $n, k \in \mathbb{N}$, и

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{k1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \alpha_{k2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{k3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^{\infty}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теперь задача (4.7) однозначно разрешима на отрезке $[0; t_{\infty})$ и

$$x(t_{k+1}) = B_k B_{k-1} \dots B_1 x_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что существуют начальные значения $x_0 \in \mathbb{R}^{\infty}$, при которых $x_{k1} = x_1(t_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Последовательность f_n , $n \in \mathbb{N}$, равномерно ограничена, поэтому $\alpha_{kn} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ при каждом n . Пусть $g(n) = (\alpha_{1,n-1} \alpha_{2,n-2} \dots \alpha_{n-1,1})^{(-1)}$. Тогда $g(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что все координаты $x_{0,n}$ начального значения неотрицательны и существует бесконечно много $i \in \mathbb{N}$ таких, что $x_{0,n_i} > g(n_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{n_i-1,1} &= x_{0,1} + \alpha_{1,1} x_{0,2} + \alpha_{2,1} (x_{0,2} + \alpha_{1,2} x_{0,3}) + \dots + \alpha_{n_i-1,1} (x_{0,2} + \dots \\ &\quad + \alpha_{n_i-2,2} \alpha_{n_i-3,3} \dots \alpha_{1,n_i-1} x_{0,n_i}) \\ &= x_{n_i-2,1} + \alpha_{n_i-1,1} (x_{0,2} + \dots + \alpha_{n_i-2,2} \alpha_{n_i-3,3} \dots \alpha_{1,n_i-1} x_{0,n_i}) \\ &> x_{n_i-2,1} + 1 \end{aligned}$$

и $x_1(t_{n_i}) \rightarrow \infty$. Следовательно, при таких начальных значениях уравнение (4.7) не имеет решения на отрезке $[0; t_{\infty} + \varepsilon]$ ни для какого $\varepsilon > 0$.

Пусть $x(t)$ – построенное выше решение уравнения (4.7) на $[0; t_{\infty})$ с начальным условием $x(0) = x_0$, для которого $x_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_{\infty}$. Пусть $\xi(t)$ – решение уравнения (4.8) на отрезке $[0; t_{\infty})$ с тем же начальным условием. Тогда $\xi(t)$ задается равенствами $\xi_n(t) = x_n(t)$ при $n \geq 2$ и $\xi_1(t) = x_1(t) + W(t)$. Траектории $\xi_1(\cdot, \omega)$ неограничены при $t \rightarrow t_{\infty}$. Поэтому решение уравнения (4.8) не может быть продолжено на отрезок $[0; t_{\infty} + \varepsilon]$ ни при каком положительном ε и данное уравнение не имеет решения на $[0; T]$ ни при каких начальных условиях.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Выше приведен пример неразрешимых обыкновенного линейного дифференциального уравнения и стохастического линейного дифференциального уравнения с одинаковыми операторами. Было бы интересно построить пример, когда одно из уравнений разрешимо, в то время как второе неразрешимо.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Полезно отметить, что все вышеприведенные результаты верны для пространства $\mathbb{R}^S$, где S – произвольное счетное множество. В этом легко убедиться, записав $s = \{s_n\}_{n=1}^\infty$ и используя изоморфизм $(y_n) = (x_{s_n})$ пространств $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^S$.

Автор благодарна профессору В. И. Богачеву за внимание к работе, а также А. Пирковскому и О. Пугачеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bogachev V. I. Deterministic and stochastic differential equations in infinite-dimensional spaces // Acta Appl. Math. 1995. V. 40. № 1. P. 25–93.
- [2] Шкарин С. А. Несколько результатов о разрешимости обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 9. С. 1183–1195.
- [3] Рыбникова Т. С. О разрешимости бесконечных систем линейных стохастических уравнений // Теория вероятностей и примен. 2000. Т. 45. № 3. С. 596–603.
- [4] Herzog G. On linear time-dependent row-finite systems of differential equations. Travaux mathématiques Fascicule VIII // Séminaire de mathématique de Luxembourg. 1996. P. 167–176.
- [5] Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [6] Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Физматлит, 1996.
- [7] Sussman H. An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on the sample point // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 296–298.
- [8] Медницкий Ю. В. О существовании сильных решений линейных стохастических дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^\infty$ // Теория вероятностей и примен. 1997. Т. 42. № 4. С. 826–831.
- [9] Lemmert R., Weckbach Ä. Charakterisierungen zeilenendlicher Matrizen mit abzählbaren Spektrum // Math. Z. 1984. V. 188. № 1. P. 119–129.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tatiana_ry@mtu-net.ru

Поступило
21.11.2001