Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Семенов, Об условиях Гюгонио–Маслова для вихревых особых решений системы уравнений мелкой воды, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 902–913

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:54:25

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ ГЮГОНИО–МАСЛОВА ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Е. С. Семенов

Установлена справедливость уравнения Гамильтона–Якоби для “фазы” вихревых особых решений системы уравнений мелкой воды, соответствующего гидродинамической моде распространения возмущений. Также получена следующая поправка к условиям Коши–Римана, описывающих влияние сингулярной части решения на гладкий фон.

Библиография: 9 названий.

1. Введение

Известно, что решения линейных систем уравнений сохраняют любой тип особенностей (негладкости) начального условия, по крайней мере на некотором интервале времени (см., например, [1]). Для нелинейных систем это не так. В работе Маслова [2] были описаны возможные структуры негладких решений систем квазилинейных гиперболических уравнений. Была предложена следующая концепция: широкий класс квазилинейных гиперболических систем допускает лишь три типа особых решений, сохраняющих свою структуру на некотором интервале времени (“свойство структурной самоподобности”) и обладающих устойчивостью структуры относительно малых изменений начальных условий (“свойство структурной устойчивости”). К этим особым решениям относятся

- 1) ударные волны;
- 2) “бесконечно-узкие солитоны” и
- 3) решения с особенностями типа корня квадратного из квадратичной формы (имеющие структуру вихря).

К числу указанных гиперболических систем относится уравнения мелкой воды с переменной силой Кориолиса:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla, \eta \mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \omega T \mathbf{u} + \nabla \eta = 0. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 0100415.

Здесь $x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, функция $\eta(x, t)$ – высота превышения свободной поверхности в теории поверхностных волн или геопотенциал в атмосфере, $\mathbf{u}(x, t) = {}^t(\mathbf{u}_1(x, t), \mathbf{u}_2(x, t))$ – вектор скорости,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\nabla = {}^t(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $\omega(x, t) = \tilde{\omega} + \beta x_2$ – удвоенная частота Кориолиса “на β -плоскости”, $\tilde{\omega}, \beta$ – некоторые физические константы.

Система (1) используется в гидродинамике, физике плазмы и физике атмосферы, в частности, при описании движения (но не образования и гибели) мезомасштабных планетарных вихрей (тайфунов и циклонов) в качестве двумерного бездисперсионного невязкого приближения.

Мы будем рассматривать решения системы (1) с особенностями типа 3):

$$\eta = \rho(x, t) + \tilde{\rho}(x, t), \quad \mathbf{u} = u(x, t) + \tilde{u}(x, t). \quad (2)$$

Здесь “фон” $\rho, u = {}^t(v, w)$ – гладкие функции, $\tilde{\rho}, \tilde{u}$ – сингулярная часть решения

$$\tilde{u} = U(x, t)\sqrt{S(x, t)}, \quad \tilde{\rho} = R(x, t)\sqrt{S(x, t)}, \quad (3)$$

где “амплитуда” $U = {}^t(U_1, U_2)$, R – гладкие функции, “фаза” S – гладкая скалярная неотрицательная функция и для любого t равенство $S(x, t) = 0$ имеет место только в точке $x = X(t) = {}^t(X_1(t), X_2(t))$. Множество $\Gamma = \{x = X(t), t \in [0, T]\}$ определяет траекторию особого решения (2), (3) уравнения (1) на интервале $[0, T]$.

Условие структурной устойчивости решения влечет, что функции S, U, R должны наводиться в общем положении, т.е.

I) матрица

$$H(t) = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\Gamma} = \text{Hess } S|_{\Gamma}$$

вторых производных невырождена и, следовательно, положительна на траектории Γ ;

II) форма $(y, \text{Hess } S|_{\Gamma} y)$ не пропорциональна $y_1^2 + y_2^2$, или, что эквивалентно, собственные значения матрицы $\text{Hess } S|_{\Gamma}$ различны;

III) разложение U и R в ряд по $x - X(t)$ начинается с минимально возможных степеней.

В работе [3] было доказано, что в широком классе решений со слабыми точечными особенностями системы (1) только решения (2), (3) обладают свойствами структурной самоподобности и устойчивости, именно эти решения согласно предположению [2] могут описывать динамику упомянутых вихрей в атмосфере.

Тейлоровские коэффициенты функций, определяющих особые решения, в окрестности особенности с необходимостью удовлетворяют бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (цепочке Гюгонио–Маслова). Для ударных волн первое из уравнений есть известное условие Гюгонио. В результате некоторых нетривиальных вычислений, были получены [4] аналогичные условия (условия Гюгонио–Маслова) для “вихревых” особых решений системы (1) – условие вмороженности особенности в поле скоростей

$$\dot{X}(t) = u(X(t), t) \equiv \mathbf{u}(X(t), t) \quad (4)$$

и условия Коши–Римана для комплексной скорости $\mathbf{v} = v + iw$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad x = X(t). \quad (5)$$

Вопрос о высших поправках к условиям (5) остался открытым.

Нетрудно заметить, что существует неоднозначность в выборе функции $S(x, t)$ и амплитуды U, R : решение (2), (3) не изменится, если S домножить на любую гладкую положительную функцию $D(x, t)$, а амплитуду разделить на $\sqrt{D}$. Удачно выбранное нормировочное условие для S может существенно упростить вычисления.

Было доказано [4], что без уменьшения общности можно считать, что S удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби “в первом приближении”

$$S_t^{(2)} + (u^{(1)}, \nabla S^{(2)}) = 0. \quad (6)$$

Здесь $S^{(2)}$ – полином второй степени, а $u^{(1)}$ – полином первой степени в тейлоровском разложении S и u по x в окрестности $x = X(t)$. Там же было высказано соображение, что как с точки зрения метода ВКБ, так и с точки зрения упрощения вычислений, кажется естественным, что фаза S должна быть решением уравнения Гамильтона–Якоби $S_t + (u, \nabla S) = 0$ в любом приближении.

Примем следующие обозначения:

- 1) любой гладкой бесконечно дифференцируемой функции $G(x, t)$ мы можем сопоставить ряд Тейлора в окрестности траектории $X(t)$:

$$G(x, t) = G^{(0)} + G^{(1)} + G^{(2)} + \dots + G^{(k)} + O(|x - X(t)|^{k+1}), \quad (7)$$

где

$$G^{(k)}(x, t) = \sum_{m_1+m_2=k} G_{m_1 m_2}(t) (x_1 - X_1(t))^{m_1} (x_2 - X_2(t))^{m_2},$$

$$G_{m_1, m_2}(t) = \frac{1}{m_1! m_2!} \frac{\partial^{(m_1+m_2)} G}{\partial x^{m_1} \partial x^{m_2}}(X(t), t), \quad (8)$$

так что $G^{(k)}$ – однородный полином k -го порядка, а $G_{m_1 m_2}$ – коэффициенты Тейлора;

- 2) $dG/dt = \dot{G} = (\partial/\partial t + (u, \nabla))G(x, t)$ – полная производная G вдоль векторного поля фона u , или производная по времени, если G зависит только от t ;
- 3) для любого двумерного вектора Y мы пишем $Y_{\perp} = TY$;
- 4) верхним левым индексом “ t ” будем обозначать транспонирование матрицы;
- 5) обозначим

$$p(t) = \frac{\partial v}{\partial x_2} \equiv v_{01} \equiv w_{10}$$

(в силу условий (5)).

Результат статьи содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. *Без уменьшения общности можно считать, что функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби*

$$S_t + (u, \nabla S) = 0 \quad (9)$$

с любой степенью точности.

II. “Вторая поправка” к условиям Коши–Римана (5) налагает следующие условия на производные “фона” на траектории особенности:

$$(2H - \text{tr}(H)I) \begin{pmatrix} v_{20} + v_{02} - \frac{1}{10}(c\rho_{01} + \beta) \\ w_{20} + w_{02} + \frac{1}{10}c\rho_{10} \end{pmatrix} = \text{tr}(H) \begin{pmatrix} v_{20} - v_{02} - w_{11} \\ w_{02} - w_{20} - v_{11} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь $\text{tr}(H)$ – след матрицы H , I – единичная матрица, $c = (2p - \tilde{\omega} - \beta X_2)/\rho^{(0)}$ – константа.

Сравнивая решения (2), (3) с “нелинейными ВКБ или уиземовскими” решениями (ср. с [5]) или “искаженными” волнами Римана, формулу (9) можно интерпретировать следующим образом: особенность (вихрь) движется только по “гидродинамической моде”, не отдавая энергию в “акустические моды”, наличие которых обусловлено сжимаемостью.

Отметим, что сингулярность решения определяется фазой S , главный член которой полином второй степени по x – $X(t)$. Поэтому для асимптотического описания решений (2), (3) необходимо найти, по крайней мере, полиномы второй степени для u , ρ (через них выражаются и полиномы для U , R). Уравнения (10) связывают коэффициенты таких полиномов, поэтому их необходимо учесть при построении асимптотики.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть функции $S(x)$, $\tilde{S}(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, обладают следующими свойствами в некоторой окрестности точки $x = 0$:

- 1) $S(x)$, $\tilde{S}(x)$ – гладкие функции;
- 2) $S(x) > 0$, $\tilde{S}(x) > 0$, если $x \neq 0$;
- 3) $S(0) = \tilde{S}(0) = 0$;
- 4) матрица вторых производных при $x = 0$

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x=0} = \text{Hess } S|_{x=0}, \quad \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x=0} = \text{Hess } \tilde{S}|_{x=0}$$

невыврождена (u , следовательно, положительна);

- 5) квадратичные формы $S^{(2)}$, $\tilde{S}^{(2)}$ взаимнопросты.

Пусть имеет место следующее равенство:

$$\Phi S = \Psi \tilde{S}, \quad (11)$$

где $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ – гладкие функции. Тогда существует гладкая функция $\alpha(x)$ такая, что с точностью до функций равных нулю вместе со всеми своими производными в точке $x = 0$ выполнены равенства

$$\Phi = \alpha \tilde{S}, \quad \Psi = \alpha S. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 1 была доказана Жихаревым [6]. Для полноты изложения докажем это утверждение, но несколько другим способом. Функция $S(x)$ удовлетворяет условиям 1)–4) леммы 1. Поэтому в силу леммы Морса [7] существует гладкая замена координат $x = x(y, t)$ такая, что $S(x, y, t) = y^2$.

Перепишем теперь равенство (11) в виде

$$(\Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots)S^{(2)} = (\Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \dots)(\tilde{S}^{(2)} + \tilde{S}^{(3)} + \tilde{S}^{(4)} + \dots). \quad (13)$$

Здесь $G^{(k)}$ – однородный многочлен k -го порядка в разложении соответствующей функции в ряд Тейлора по y в точке $y = 0$, в морсовских координатах $S = S^{(2)} = y^2$. Приравняем однородные многочлены одинаковых порядков. Используя условия леммы, получим

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} = 0, \quad \Psi^{(0)} = 0, \quad \Phi^{(1)} = 0, \quad \Psi^{(1)} = 0, \quad \Phi^{(2)} = \alpha^{(0)}\tilde{S}^{(2)}, \quad \Psi^{(2)} = \alpha^{(0)}S^{(2)}, \\ \Phi^{(3)} = \alpha^{(0)}\tilde{S}^{(3)} + \alpha^{(1)}\tilde{S}^{(2)}, \quad \Psi^{(3)} = \alpha^{(1)}S^{(2)}, \end{aligned}$$

где $\alpha^{(0)}$ – некоторая постоянная, $\alpha^{(1)}$ – некоторый однородный по x многочлен первого порядка.

Далее доказательство проведем по индукции. Пусть имеют место формулы

$$\Phi^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha^{(i)}\tilde{S}^{(k-i)}, \quad \Psi^{(k)} = \alpha^{(k-2)}S^{(2)}, \quad (14)$$

верные для $k = 2, 3, \dots, n-1$. Здесь $\alpha^{(i)}$ – некоторый однородный по x полином порядка i . Докажем, что эти формулы имеют место при $k = n$. Для этого в (13) приравняем члены порядка $n+2$ с учетом выражений (13):

$$\Phi^{(n)}S^{(2)} = \Psi^{(n)}\tilde{S}^{(2)} + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha^{(i-2)}S^{(2)}\tilde{S}^{(n-i+2)}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$S^{(2)}\left(\Phi^{(n)} - \sum_{i=2}^{n-1} \alpha^{(i-2)}\tilde{S}^{(n-i+2)}\right) = \Psi^{(n)}\tilde{S}^{(2)}.$$

Откуда следует, что

$$\Phi^{(n)} - \sum_{i=2}^{n-1} \alpha^{(i-2)}\tilde{S}^{(n-i+2)} = \alpha^{(n-2)}\tilde{S}^{(2)}, \quad \Psi^{(n)} = \alpha^{(n-2)}S^{(2)},$$

где $\alpha^{(n-2)}$ – некоторый однородный многочлен порядка $n-2$.

Таким образом, формулы (14) имеют место при $k = n$. Это означает, что для рядов Тейлора функций $\Phi, \Psi, S, \tilde{S}$ и α имеет место равенство (12). Лемма доказана.

Следующая лемма была сформулирована и доказана в статье [3, лемма 3.2].

ЛЕММА 2. Пусть для некоторых гладких 2-мерных вектор-функций $w(x, t)$ и $\tilde{w}(x, t)$ выполнены равенства $\langle w, P \rangle = 0$ и $\langle \tilde{w}, P_{\perp} \rangle = 0$. Тогда существуют гладкие в окрестности точки $x = 0$ функции $g(x, t)$ и $\tilde{g}(x, t)$ такие, что $w = gP_{\perp}$ и $\tilde{w} = \tilde{g}P$. Если $w = w^{(k)} + O(|x|^{k+1})$, $w^{(k)} \neq 0$, то это же утверждение справедливо для $w^{(k)}$, $P^{(1)}$, при этом $g(x, t) \equiv g^{(k-1)}$ и $\tilde{g}(x, t) \equiv \tilde{g}^{(k-1)}$ – однородные полиномы по x степени $k-1$ с гладкими по t коэффициентами.

3. Уравнение Гамильтона–Якоби для “фазы” S

В силу негладкости решения вида (2), (3) уравнения для (u, ρ) и $(\tilde{u}, \tilde{\rho})$ распадаются на следующие две системы уравнений, справедливых с точностью до функций равных нулю со всеми своими производными¹ на траектории $X(t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u + \tilde{\rho} \tilde{u}) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u + \nabla \rho - \omega T u + (\tilde{u}, \nabla)\tilde{u} = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} u + \rho \tilde{u}) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (u, \nabla)\tilde{u} + (\tilde{u}, \nabla)u + \nabla \tilde{\rho} - \omega T \tilde{u} = 0. \quad (16)$$

Подставляя теперь формулы (3) в (16), проводя соответствующие дифференцирования и умножая правую часть на $2\sqrt{S}$, получим

$$\Lambda R + \rho(P, U) + 2Sf = 0, \quad (17)$$

$$\Lambda U + PR + 2SF = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= S_t + (u, P), \quad P = \nabla S, \quad P_\perp = TP, \\ f &= R_t + (\nabla, uR + \rho U), \quad F = U_t + (u, \nabla)U + (U, \nabla)u - \omega TU + \nabla R. \end{aligned} \quad (19)$$

Разложим функции u, ρ, U, R, S в ряды Тейлора (7), подставим в уравнения (17), (18) и вычислим коэффициенты при наименьших степенях $x - X(t)$. Имеем

$$(u^{(0)}, P^{(1)})R^{(0)} + \rho^{(0)}(U^{(0)}, P^{(1)}) = 0, \quad R^{(0)}P^{(1)} + (u^{(0)}, P^{(1)})U^{(0)} = 0.$$

Умножая первое уравнение на $(u^{(0)}, P^{(1)})$ и вычитая из него второе уравнение, умноженное скалярно на $\rho^{(0)}P^{(1)}$, получим

$$((u^{(0)}, P^{(1)})^2 - \rho^{(0)}(P^{(1)})^2)R^{(0)} = 0.$$

Так как $(P^{(1)})^2$ – квадратичная форма, $\rho^{(0)} \neq 0$, а $(u^{(0)}, P^{(1)})^2$ – квадрат линейной формы, то первый сомножитель в полученном равенстве не равен тождественно нулю; следовательно, $R^{(0)} = 0$. Тогда из первого уравнения немедленно следует, что $(U^{(0)}, P^{(1)}) = 0$, откуда, воспользовавшись леммой 2, получаем $U^{(0)} = 0$.

К сожалению, мы не можем привести здесь доказательство вмерзности особенности в поле скорости $(u^{(0)} = 0)$, его можно найти в работе [6] или (для аналогичных уравнений) в работе [3].

Пусть $u^{(0)} = 0$. Приравняем члены порядка $|x - X(t)|^2$ в уравнениях (17), (18) к нулю:

$$\rho^{(0)}(U^{(1)}, P^{(1)}) + 2S^{(2)}\rho^{(0)}(\nabla, U^{(1)}) = 0, \quad R^{(1)}P^{(1)} + 2S^{(2)}\nabla R^{(1)} = 0. \quad (20)$$

Умножим второе уравнение на $x - X(t)$. Воспользовавшись равенством Эйлера $(x - X(t), \nabla)R^{(1)} = R^{(1)}$ и $(x - X(t), P^{(1)}) = 2S^{(2)}$, получим

$$R^{(1)}S^{(2)} = 0,$$

¹В дальнейшем мы будем вести все расчеты с точностью до таких функций, так как конечная цель задачи – получение асимптотики особого решения в окрестности особенности.

откуда $R^{(1)} = 0$. Далее из второго уравнения следует, что

$$(U^{(1)} + (\nabla, U^{(1)})(x - X(t)), P^{(1)}) = 0.$$

Воспользовавшись леммой 2, получаем

$$U^{(1)} = -(\nabla, U^{(1)})(x - X(t)) + \varphi T P^{(1)},$$

где $\varphi(t)$ – гладкая функция времени. Применяя операцию div к этому выражению, приходим $(\nabla, U^{(1)}) = 0$. Следовательно,

$$U^{(1)} = \varphi P_{\perp}^{(1)}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Умножая уравнение (18) слева на $P_{\perp}$, получим

$$\Lambda(P_{\perp}, U) + 2S(F, P_{\perp}) = 0, \quad (22)$$

Нами было показано, что условия I)–III) влекут формулу (21). Пусть на интервале $t \in [0, T]$, $\varphi(t) \neq 0$ (ниже мы покажем, что $\varphi = \operatorname{const} \neq 0$). Функции $(U, P_{\perp})$, S удовлетворяют условиям леммы 1 (только не в точке $x = 0$, а в точке $x = X(t)$), и уравнение (22) имеет место. Следовательно, существует гладкая функция $\alpha(x, t)$, представимая в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x = X(t)$ с коэффициентами, гладко зависящими от t , такая, что $\Lambda = \alpha S$. Подставляя $\Lambda = S_t + (u, P)$, мы приходим к уравнению

$$S_t + (u, \nabla S) = \alpha S. \quad (23)$$

Пусть функция $D(x, t)$ гладкая и положительная. Мы можем написать $S = DS'$, где функция S' удовлетворяет тем же условиям, что и функция S . Тогда мы можем вынести функцию D из радикала в (3) и включить в амплитуду U и R , т.е. сделать замену переменных

$$S' = \frac{S}{D}, \quad U' = U\sqrt{D}, \quad R' = R\sqrt{D}.$$

Подставляя $S = DS'$ в (23), получим

$$D \left(\frac{\partial S'}{\partial t} + (u, \nabla S') \right) + S' \left(\frac{\partial D}{\partial t} + (u, \nabla D) - \alpha D \right) = 0. \quad (24)$$

Выберем функцию $D(x, t)$, так чтобы

$$D_t + (u, \nabla D) - \alpha D = 0. \quad (25)$$

Это уравнение легко решается методом характеристик:

$$D(x, t) = \exp \left(\int_0^t \alpha(X(x_0, \tau), \tau) d\tau \right) \Big|_{x_0 = X^{-1}(x, t)}. \quad (26)$$

Здесь $X(x_0, t)$ – решение уравнения $\dot{x} = u(x, t)$ с начальными условиями $x|_{t=0} = x_0$. Начальные условия для $D(x, t)$ мы выбрали так, чтобы не изменились начальные условия для S, U, R . Уравнение (24) было сведено к уравнению Гамильтона–Якоби (9) для

функции S' . Таким образом, без потери общности мы можем положить $\alpha(x, t) = 0$ и $\Lambda = 0$. Доказательство теоремы завершено.

Уравнению Гамильтона–Якоби (9) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u(x, t), \quad x|_{t=0} = x^0. \quad (27)$$

Также справедливо равенство (“сопряженное” к (27))

$$\frac{dP}{dt} = - \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) P. \quad (28)$$

Из “приближенного” уравнения Гамильтона–Якоби (6) и условий Коши–Римана не трудно увидеть [4], что матрица вторых производных S на траектории $X(t)$ может быть представлена в виде $H(t) = g(t)\Pi(t)H(0)\Pi^*(t)$, где $\Pi(t)$ – матрица поворота на угол $\theta(t)$, $g(t)$ – гладкая функция времени. Отсюда следует, что если в начальный момент $t = 0$ выполняется условие II), то оно имеет место и в любой другой момент времени.

Заметим, что, если принять нормировочное условие (9), существенно упрощаются уравнения для негладкой части решения (16) (в них можно положить $\Lambda = 0$) и связанные с ними вычисления. В частности, уравнение (9) значительно облегчит доказательство второй части теоремы 1.

4. Поправка к условиям Коши–Римана

4.1. Закон сохранения потенциального вихря. В статье [4] было показано, что условия Коши–Римана можно считать следствием сохранения вдоль траекторий векторного поля $\mathbf{u}$ потенциального вихря

$$\frac{\Omega}{\eta} \equiv \frac{\text{rot} \mathbf{z} \, \mathbf{u} + \omega}{\eta} = \frac{\mathbf{u}_{2x_1} - \mathbf{u}_{1x_2} + \omega}{\eta}$$

(инварианта Россби (или Эртеля)):

$$\frac{d}{dt} \frac{\Omega}{\eta} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \right) \left(\frac{\Omega}{\eta} \right) = 0. \quad (29)$$

Приведем для полноты изложения вывод условий (5) из закона сохранения потенциального вихря, но несколько в другой форме, чем в работе [4].

Разобьем Ω на гладкую и сингулярную части:

$$\Omega = u_{2x_1} - u_{1x_2} + \omega, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{u}_{2x_1} - \tilde{u}_{1x_2}.$$

Тогда закон сохранения разбивается на следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla) \right) \frac{\Omega\rho - \tilde{\Omega}\tilde{\rho}}{\rho^2 - \tilde{\rho}^2} + (\tilde{u}, \nabla) \frac{\tilde{\Omega}\rho - \Omega\tilde{\rho}}{\rho^2 - \tilde{\rho}^2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla) \right) \frac{\tilde{\Omega}\rho - \Omega\tilde{\rho}}{\rho^2 - \tilde{\rho}^2} + (\tilde{u}, \nabla) \frac{\Omega\rho - \tilde{\Omega}\tilde{\rho}}{\rho^2 - \tilde{\rho}^2} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Из уравнения (30) легко получить, что $c = (2p - \tilde{\omega} - \beta X_2)/\rho^{(0)}$ – константа.

Если в полученных уравнениях заменить $\tilde{u}$ и $\tilde{\rho}$ выражениями (3) и затем умножить уравнения на $-S^{3/2}$, уравнение (30) примет вид

$$\begin{aligned} S \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla) \right) \frac{\rho(U, TP) + 2S\rho(T\nabla, U) + 2\Omega SR}{\rho^2 - SR^2} \\ - \frac{1}{2} \frac{\rho(U, TP) + 2S\rho(T\nabla, U) + 2\Omega SR}{\rho^2 - SR^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + (u, \nabla S) \right) \\ - S^2(U, \nabla) \frac{2\Omega\rho + R(U, TP) + 2SR(T\nabla, U)}{\rho^2 - SR^2} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Приравняем к нулю самые старшие по $x - X(t)$ слагаемые в уравнении (31). Используя уравнение Гамильтона–Якоби для фазы S и учитывая, что $U^{(0)} = 0$ и $R^{(0)} = R^{(1)} = 0$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \right) \left(\frac{(U^{(1)}, TP^{(1)}) + 2S^{(2)}(T\nabla, U^{(1)})}{\rho^{(0)}} \right) = 0. \quad (32)$$

Подставим $U^{(1)}$ в форму (21), произведем дифференцирование, воспользовавшись уравнением (6) и (28), поделим результат на $\rho^{(0)}$. Получим

$$\begin{aligned} \left(\dot{\varphi} - \varphi \frac{\dot{\rho}^{(0)}}{\rho^{(0)}} \right) (P^{(1)})^2 - 2\varphi \left(P^{(1)}, \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} P^{(1)} \right) \\ + \left(\dot{\varphi} - \varphi \frac{\dot{\rho}^{(0)}}{\rho^{(0)}} \right) S^{(2)} \Delta^2 S^{(2)} - 2 \frac{\varphi}{\rho^{(0)}} S^{(2)} \Delta ((u^{(1)}, \nabla) S^{(2)}) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где Δ – оператор Лапласа. Заметим, что в силу системы (15) для функций $\rho^{(0)}$ и $u^{(1)}$ справедливо равенство $\dot{\rho}^{(0)} + \rho^{(0)} \operatorname{div} u^{(1)} = 0$. Выразим отсюда дробь $\dot{\rho}^{(0)}/\rho^{(0)}$ через $\operatorname{div} u^{(1)}$ в уравнении (33) и посредством вращения перейдем в систему координат, где матрица

$$H = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix},$$

диагональная, т.е. приравняем к нулю коэффициенты Тейлора при $(x_1 - X_1(t))^2$, $(x_2 - X_2(t))^2$ и $(x_1 - X_1(t))(x_2 - X_2(t))$ в правой части уравнения (33). Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} b_1(2b_1(\dot{\varphi} - \varphi v_{1,0} + \varphi w_{0,1}) + b_2(\dot{\varphi} + \varphi v_{1,0} - \varphi w_{0,1})) &= 0, \\ b_2(b_1(\dot{\varphi} - \varphi v_{1,0} + \varphi w_{0,1}) + 2b_2(\dot{\varphi} + \varphi v_{1,0} - \varphi w_{0,1})) &= 0, \\ 2\varphi b_1 b_2(v_{0,1} + w_{1,0}) &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

При условии $b_1 \neq b_2$ и $\varphi \neq 0$ (следствие условий I)–III) система имеет единственное решение $\varphi = \text{const}$ и $v_{0,1} = -w_{1,0}$, $v_{1,0} = w_{0,1}$ – условия Коши–Римана.

4.2. Вычисление поправки $U^{(2)}$. Рассмотрим уравнение (17). Собирая слагаемые порядка $|x - X(t)|^3$, получим

$$\rho^{(0)}(P^{(1)}, U^{(2)}) + (P^{(2)}, U^{(1)}) = -2S^{(2)}f^{(1)}.$$

Учитывая (21) и равенство $S^{(2)} = \frac{1}{2}(P^{(1)}, x - X(t))$, получим

$$(\rho^{(0)}(U^{(2)} - \rho^{(0)}\varphi_0(P_{\perp}^{(2)} + f^{(1)}(x - X(t)), P^{(1)})) = 0,$$

где $P_{\perp}^{(2)} = TP^{(2)} = T\nabla S^{(3)}$. Лемма 2 влечет

$$U^{(2)} = \varphi_0 P_{\perp}^{(2)} - \frac{1}{\rho^{(0)}} f^{(1)}(x - X(t)) + \varphi^{(1)}(x, t) P_{\perp}^{(1)}, \quad (35)$$

где $\varphi^{(1)}$ – некоторая линейная форма от $x - X(t)$. Из определения (19) функции f имеем

$$f^{(1)} = \operatorname{div}(\rho^{(0)} U^{(2)} + \rho^{(1)} U^{(1)}) = \rho^{(0)} \operatorname{div} U^{(2)} + (U^{(1)}, \nabla \rho^{(1)}).$$

Так как для любой линейной формы $\gamma(x, t)$ от $x - X(t)$ имеет место равенство

$$\operatorname{div}(\gamma(x, t)(x - X(t))) = 3\gamma(x, t),$$

то, взяв дивергенцию от обеих частей равенства (35), получим

$$\operatorname{div} U^{(2)} = \frac{\varphi_0}{4} \operatorname{div} P_{\perp}^{(2)} - \frac{3}{4\rho^{(0)}} (U^{(1)}, \nabla \rho^{(1)}) + \frac{1}{4} \nabla \varphi^{(1)} \cdot P_{\perp}^{(1)}.$$

Отсюда и из (35) следует формула

$$U^{(2)} = \varphi_0 P_{\perp}^{(2)} + \varphi^{(1)} P_{\perp}^{(1)} - \frac{1}{4\rho^{(0)}} ((\varphi\rho)^{(1)}, P_{\perp}^{(1)})(x - X(t)). \quad (36)$$

Здесь $\varphi = \varphi_0 + \varphi^{(1)}$. Легко проверить следующее соотношение:

$$(x - X(t))(\nabla(\varphi\rho)^{(1)}, P_{\perp}^{(1)}) = -2S^{(2)}T\nabla(\varphi\rho)^{(1)} + (\varphi\rho)^{(1)}P_{\perp}^{(1)}. \quad (37)$$

Подставляя это в (36), получим

$$U^{(2)} = \varphi_0 P_{\perp}^{(2)} + \varphi^{(1)} P_{\perp}^{(1)} + \frac{1}{2\rho^{(0)}} S^{(2)} T \nabla(\varphi\rho)^{(1)} - \frac{1}{4\rho^{(0)}} (\varphi\rho)^{(1)} P_{\perp}^{(1)}.$$

Вводя новую переменную

$$\varphi'^{(1)} = \frac{3}{4}\varphi^{(1)} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_0}{\rho^{(0)}}\rho^{(1)},$$

перепишем последнее выражение в виде

$$U^{(2)} = \varphi_0 P_{\perp}^{(2)} + \varphi'^{(1)} P_{\perp}^{(1)} + \frac{2}{3\rho^{(0)}} S^{(2)} T \nabla(\varphi'\rho)^{(1)}. \quad (38)$$

Здесь $\varphi'^{(0)} = \varphi^{(0)} = \varphi_0$. В дальнейшем для упрощения обозначений штрихи у новых переменных мы опускаем. Линейная форма $\varphi^{(1)}$ пока остается неизвестной.

4.3. Члены третьего порядка малости в законе сохранения потенциального вихря. Выпишем члены порядка $|x - X(t)|^3$ в уравнении (31) и поделим на $S^{(2)}$. Имеем

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{(U, P_{\perp}) + 2S(T\nabla, U)}{\rho} \right]^{(3)} - 2S^{(2)}(U^{(1)}, \nabla) \left[\frac{\Omega}{\rho} \right]^{(1)} = 0. \quad (39)$$

Подставим теперь выражения (21) и (38) в (39), произведем дифференцирование, воспользовавшись уравнениями (9) и (28), и умножим результат на $\rho^{(0)}/\varphi^{(0)}$; получим уравнение аналогичное (33):

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\dot{\varphi}^{(1)}}{\varphi_0} - \left[\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} - 2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right) P^{(1)}, P^{(1)} \right) \\ & + 2S^{(2)} \left(\left(\nabla \left(\left[\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} + \frac{\dot{\varphi}^{(1)}}{\varphi_0} \right), P^{(1)} \right) + \left(\frac{\dot{\varphi}^{(1)}}{\varphi_0} - \left[\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} \right) \Delta S^{(2)} \right. \\ & \left. + \left(\nabla \frac{\dot{\varphi}^{(1)}}{\varphi_0}, P^{(1)} \right) - \Delta(u^{(2)}, P^{(1)}) - \rho^{(0)}(P_{\perp}^{(1)}, \nabla) \left[\frac{\Omega}{\rho} \right]^{(1)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Разделим уравнение непрерывности системы (15) на ρ и соберем члены первого порядка малости по $|x - X(t)|$; получим

$$\left[\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} = -\operatorname{div} u^{(2)}.$$

Приравнивая теперь коэффициенты при различных степенях $x - X(t)$ к нулю в системе координат, где матрица H диагональна (аналогично тому, как мы это делали при выводе условий Коши–Римана), приходим к системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} & 6b_1(b_2(2v_{20} - w_{11} + \psi_{10}) + b_1(-2v_{02} - 8v_{20} + w_{11} + 4\psi_{10} + \pi_{01})) = 0, \\ & -2b_1(2b_1(v_{11} - 2w_{02} - \psi_{01}) + b_2(2v_{11} + 6w_{02} + 6w_{20} - 3\psi_{01} + \pi_{10})) = 0, \\ & -2b_2(-2b_2(2v_{20} - w_{11} + \psi_{10}) + b_1(6v_{02} + 6v_{20} + 2w_{11} - 3\psi_{10} - \pi_{01})) = 0, \\ & 6b_2(b_1(-v_{11} + 2w_{02} + \psi_{01}) + b_2(v_{11} - 8w_{02} - 2w_{20} + 4\psi_{01} - \pi_{10})) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь ψ_{10}, ψ_{01} – коэффициенты линейной формы $\dot{\varphi}^{(1)}/\varphi_0$, π_{10}, π_{01} – коэффициенты формы $\rho^{(0)}[\Omega/\rho]^{(1)}$. Исключая из этих уравнений ψ_{10} и ψ_{01} , приходим к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10}(b_1 - b_2)(8v_{02} + 10v_{20} + w_{11} - \pi_{01}) = (b_1 + b_2)(v_{20} - v_{02} - w_{11}), \\ & \frac{1}{10}(b_2 - b_1)(8w_{20} + 10w_{02} + v_{11} + \pi_{10}) = (b_1 + b_2)(w_{02} - w_{20} - v_{11}). \end{aligned} \quad (42)$$

Переписывая последнюю систему уравнений в исходной системе координат, получим уравнение

$$\frac{1}{10}(2H - \operatorname{tr}(H)I) \begin{pmatrix} 8v_{02} + 10v_{20} + w_{11} - \pi_{01} \\ 8w_{20} + 10w_{02} + v_{11} + \pi_{10} \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(H) \begin{pmatrix} v_{20} - v_{02} - w_{11} \\ w_{02} - w_{20} - v_{11} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Подставляя сюда $\pi_{10} = c\rho_{10} + 2w_{20} - v_{11}$ и $\pi_{01} = c\rho_{01} + w_{11} - 2v_{02} + \beta$, приходим к уравнению (10).

Перепишем уравнение (10) в другом, важном с точки зрения приложений виде [4], [8], [9]. Для этого введем новые переменные:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{|c|\rho^{(0)}}}, \quad Y = \mu^3 |c|^{-1} \left(2\mathbf{v}_{z\bar{z}} - \frac{\beta}{3} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad Z = \mu^3 |c|^{-1} \left(2\mathbf{v}_{zz} + \frac{\beta}{3} \right) \Big|_{\Gamma},$$

$$U = \mu^3 |c|^{-1} \mathbf{v}_{\bar{z}\bar{z}} \Big|_{\Gamma}, \quad W = 2\mu^3 |c|^{-1} \left(-ic\rho_{\bar{z}} - \mathbf{v}_{\bar{z}z} + \mathbf{v}_{z\bar{z}} + \frac{\beta}{2} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad \mathbf{v} = v + iw.$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Обозначим

$$J = Y + \frac{1}{10} i(Y + W - 2\bar{Z}) + \frac{11}{30} \frac{\beta \mu^3}{|c|}.$$

Тогда (10) переписывается в виде

$$(2H - \text{tr}(H)I) \begin{pmatrix} \text{Re } J \\ \text{Im } J \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{tr}(H) \begin{pmatrix} \text{Re } \bar{U} \\ \text{Im } \bar{U} \end{pmatrix}.$$

Отметим одно свойство уравнения (10). Если собственные значения матрицы H равны, то (10) переходит в

$$\begin{pmatrix} v_{20} - v_{02} - w_{11} \\ w_{02} - w_{20} - v_{11} \end{pmatrix} = 0,$$

или в новых переменных $U = 0$.

Автор выражает благодарность С. Ю. Доброхотову за постановку задачи и полезные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Trev F. Propagation of singularities and semi-global existence theorems for (pseudo-) differential operators of principal type // Ann. Math. 1978. V. 108. P. 569–609.
- [2] Маслов В. П. Три алгебры, отвечающие негладким решениям систем квазилинейных гиперболических уравнений // УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252–253.
- [3] Dobrokhotov S. Yu., Pankrashkin K. V., Semenov E. S. Proof of Maslov's conjecture about the structure of weak-point singular solutions of the shallow water equations // Russian J. Math. Phys. 2001. V. 8. № 1. P. 25–54.
- [4] Dobrokhotov S. Yu. Hugoniót–Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations. I // Russian J. Math. Phys. 1999. V. 6. № 2. P. 137–173.
- [5] Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. Wiley Interscience, 1974.
- [6] Жихарев В. Н. О необходимых условиях существования и единственности типа решения со слабой распространяющейся особенностью, сосредоточенной в точке, для уравнений гидродинамики в случае двух пространственных переменных. Деп. ВИНТИ № В86–8148. М.: ВИНТИ, 1986.
- [7] Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
- [8] Dobrokhotov S. Yu. Hugoniót–Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations. II // Russian J. Math. Phys. 1999. V. 6. № 3. P. 282–313.
- [9] Доброхотов С. Ю. Об эффектах интегрируемости укороченных цепочек Гюгонио–Маслова для траекторий мезомасштабных вихрей на мелкой воде // ТМФ. 2000. Т. 125. № 3. С. 491–518.