Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Макин, О собственных значениях для некоторых классов положительных операторов, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 214–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:19:38

О собственных значениях для некоторых классов положительных операторов

Р. С. Макин

Для некоторых классов положительных операторов, обладающих группой ведущих собственных значений, проведена оценка спектральных зазоров. Такой анализ основан на переходе к ассоциированным операторам с использованием понятия фокусирующего оператора. Показано, как можно ослабить требования на рассматриваемый класс операторов, возникающих, в частности, в теории переноса.

Библиография: 30 названий.

1. Линейные положительные операторы обладают рядом замечательных спектральных свойств (см., например, [1]–[3]). В весьма общих условиях они имеют простое положительное собственное значение λ_0 , равное спектральному радиусу $r(\hat{A})$ линейного оператора $\hat{A}$, которое называют *ведущим собственным значением* (см. [4], [5]). В этих условиях отличные от λ_0 точки λ спектра $\sigma(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ лежат в круге

$$|\lambda| \leq q\lambda_0, \quad q < 1. \quad (1)$$

Минимальное q , при котором выполнено неравенство (1), называют *спектральным зазором* $q(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$. Величина спектрального зазора играет существенную роль при исследовании линейных и нелинейных (операторных) уравнений с положительными операторами. В последнем случае это напрямую связано с проверкой так называемого “условия конуса”, обеспечивающего существование инвариантных экспоненциально притягивающих гиперболических множеств – инерциальных многообразий (см., например, [6]–[8] и указанную там литературу).

Известны такие классы линейных операторов, для которых можно установить наличие не одного, а целой группы ведущих собственных значений. Одни из них образуют осцилляционные (частный случай знакорегулярных) операторы [9], для анализа всех собственных значений которых также применима теория конусов. Такой анализ основан на переходе к ассоциированным операторам в соответствующих кососимметрических тензорных произведениях пространств [9]–[12]. Близкая конструкция, но без оценок спектрального зазора, была использована в работе [13; теорема 1.9] при оценке хаусдорфовой (фрактальной) размерности минимального глобального аттрактора системы уравнений Навье–Стокса. Второй из таких классов образуют индефинитно положительные операторы в пространствах с индефинитной метрикой [14].

В настоящей работе рассматриваются вполне положительные (ТР) операторы (см. [9]–[11]), для которых мы с помощью специальных конструкций проводим последовательную оценку спектральных зазоров для собственных значений рассматриваемого класса операторов. При этом мы используем определение и результаты для фокусирующих операторов [15]–[18]. В заключение указаны возможные обобщения полученных результатов.

2. Пусть $K(x, y)$ – вещественное измеримое ядро, определенное на $\bar{\Delta} = [a, b]$, $-\infty \leq a, b \leq \infty$, замкнутом отрезке вещественной оси. Введем следующее определение для миноров этого ядра [10], [11]:

$$K \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{bmatrix} = \det \|K(x_i, y_j)\|_1^n; \quad a < x_1 < \dots < x_n < b, \quad y_1 < \dots < y_n. \quad (2)$$

Миноры ядра, рассматриваемые как функции, будем обозначать через

$$K_{[n]} \equiv K_{[n]}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Delta_n[a, b], \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Здесь через $\Delta_n J$, $J \subseteq \bar{\Delta}$, $|J| \geq n$, обозначено множество n -мерных точек $(x_1, \dots, x_n)$ таких, что $x_i \in J$, $i = 1, \dots, n$, $x_1 < \dots < x_n$; $|J| (\leq \infty)$ – количество элементов множества. Наряду с обозначением (2) для ядер будем употреблять аналогичное обозначение для системы функций:

$$f \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ k_1, \dots, k_n \end{pmatrix} = \det \|f_{k_i}(x_j)\|_1^n.$$

Ядро $K(x, y)$ будем называть *знакорегулярным* (SR) в $\bar{\Delta}$ [10], [11], если отличные от нуля определители (2) имеют при каждом n один и тот же знак, зависящий лишь от n . Знакорегулярному ядру $K = K(x, y)$ ($\in$ SR) сопоставим последовательность чисел $\varepsilon_i = \varepsilon_i(K)$, $i = 0, 1, \dots, n$, по следующему правилу: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_i = 0$, если все миноры i -го порядка равны нулю; $\varepsilon_i = 1$ ($\varepsilon_i = -1$), если среди миноров i -го порядка есть положительные (отрицательные). Если ядро K не вырождено, то все $\varepsilon_i(K)$, очевидно, отличны от нуля. В любом случае справедливы неравенства

$$\varepsilon_i K_{[i]}(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Delta_i[a, b] \equiv \Delta_i. \quad (3)$$

В случае, когда в (3) $\varepsilon_i(K) = 1$, $i = 0, 1, \dots$, ядро $K(x, y)$ называется *вполне положительным* (совокупность таких ядер обозначим ТР). Частным случаем знакорегулярных ядер являются осцилляционные ядра [9], [11].

Пусть банахово пространство E полуупорядочено конусом $\mathfrak{K}$ [2]. Элементы $u, v \in \mathfrak{K}$ называют *сравнимыми*, если при некоторых положительных t_1, t_2

$$t_1 u \leq v \leq t_2 u. \quad (4)$$

Для сравнимых элементов определена величина $\theta(u, v) = \beta \alpha^{-1}$, где α – максимальное из тех t_1 , β – минимальное из тех t_2 , для которых справедливы соотношения (4). Линейный положительный оператор $\hat{A}$ называют *фокусирующим* [17], если каждые ненулевые элементы $\hat{A}u$ и $\hat{A}v$, $u, v \in \mathfrak{K}$, сравнимы и если конечна величина

$$\chi(\hat{A}) = [\sup \theta(\hat{A}u, \hat{A}v) : \hat{A}u \neq 0, \hat{A}v \neq 0; u, v \in \mathfrak{K}]^{1/2},$$

которую назовем *постоянной фокусированной*. Постоянные фокусирования для фокусирующих матриц и интегральных операторов, а также для ряда прикладных спектральных задач можно найти в работах [18]–[23].

Рассмотрим интегральные уравнения

$$\varphi(x) = \lambda^{-1} \int_{\bar{\Delta}} dy K(x, y) \varphi(y) \equiv \lambda^{-1} \hat{A} \varphi, \quad x \in \bar{\Delta}, \quad (5)$$

$$\varphi(\bar{x}) = \mu^{-1} \int_{\Delta_n[a, b]} d\bar{y} K_{[n]}(\bar{x}, \bar{y}) \varphi(\bar{y}) \equiv \mu^{-1} \hat{A}_{[n]} \varphi(\bar{x}), \quad (6)$$

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b.$$

Пусть $\{\lambda_i\}_1^\infty$ – собственные значения оператора $\hat{A}$ (5), занумерованные с учетом кратностей (как корней знаменателя Фредгольма). Далее будет полезна

ЛЕММА 1 (И. Шур [11]). *Совокупность собственных значений оператора $\hat{A}_{[n]}$ (6) совпадает с совокупностью произведений*

$$\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n. \quad (7)$$

При этом кратность собственного значения μ совпадает с числом различных произведений (7), равных μ .

Если $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}$ – линейно-независимые собственные функции оператора $\hat{A}$ (5), отвечающие собственным значениям $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ соответственно, то

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ i_1, \dots, i_n \end{pmatrix}$$

есть собственная функция оператора $\hat{A}_{[n]}$ (6), отвечающая собственному значению $\mu = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}$.

С абстрактной точки зрения результат Шура характеризует спектр внешней степени линейного (квази) вполне непрерывного оператора.

Далее нам понадобятся следующие технические результаты [1], [24]–[26].

ЛЕММА 2. Пусть $K(x, y)$ – неотрицательное ядро, $K(x, y) \geq 0$ на $I_1 \times I_2$, где I_i , $i = 1, 2$, – любой из интервалов $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , или оператор $\hat{A}$ u_0 -положителен относительно конуса $\mathfrak{K}$ неотрицательных в гильбертовом пространстве $L_2(\Delta)$ функций с обычным определением скалярного произведения и нормы. Тогда для операторного уравнения (5) справедливы следующие утверждения.

(а) Спектральный радиус $r(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ $r(\hat{A}) = \gamma_0 > 0$.

(б) Значение γ_0 – простое положительное собственное значение, которому отвечает положительная на I_1 собственная функция; собственное инвариантное подпространство $\mathfrak{M}(\gamma_0)$ одномерно; γ_0 – простой полюс резольвенты $\hat{R}_\lambda(\hat{A}) = (\lambda \hat{I} - \hat{A})^{-1}$.

(с) Если λ – собственное значение оператора $\hat{A}$, $\lambda \neq \gamma_0$, то $|\lambda| < \gamma_0$.

(д) Последовательность $(\hat{A}/\gamma_0)^n$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к одномерному проекционному оператору на инвариантное подпространство

$$\mathfrak{M}(\gamma_0) = \{\varphi : (\hat{A} - \gamma_0 \hat{I})\varphi = 0\}.$$

Более того, пространство $L_2(\Delta)$ можно представить в виде прямой суммы $L_2(\Delta) = \mathfrak{M}(\gamma_0) \oplus \mathfrak{U}_0(\gamma_0)$ подпространств, где $\mathfrak{U}_0(\gamma_0)$ – инвариантное подпространство, на котором спектральный радиус оператора $\hat{A}$ меньше γ_0 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Утверждения леммы в соответствующей формулировке справедливы, если $K^{r_k}(x, y) > 0$ на $(I_1 \times I_2)$, или u_0 – некоторая положительная степень r_k оператора $\hat{A}$, $k = 1, 2, \dots$ ($< \infty$).

ЛЕММА 3. Пусть $K(x, y) \in \text{TP}$ на I_1 , или $\hat{A}$ – осцилляционный оператор. Тогда для операторного уравнения (6) справедливы следующие утверждения.

- (а) Спектральный радиус $r(\hat{A}_{[p]})$ оператора $\hat{A}_{[p]}$ $r(\hat{A}_{[p]}) = \gamma_0^{[p]} > 0$.
 (б) Значение $\gamma_0^{[p]}$ – простое положительное собственное значение, которому отвечает положительная на $\Delta_p[a, b]$ собственная функция

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ i_1, \dots, i_p \end{pmatrix};$$

собственное инвариантное подпространство $\mathfrak{M}(\gamma_0^{[p]})$ одномерно; $\gamma_0^{[p]}$ – простой полюс резольвенты $R_\mu(\hat{A}_{[p]}) = (\mu \hat{I}_{[p]} - \hat{A}_{[p]})^{-1}$.

- (с) Если μ – собственное значение оператора $\hat{A}_{[p]}$, $\mu \neq \gamma_0^{[p]}$, то $|\mu| < \gamma_0^{[p]}$.
 (д) Последовательность $(\hat{A}_{[p]}/\gamma_0^{[p]})^n$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к одномерному проекционному оператору на инвариантное подпространство

$$\mathfrak{M}(\gamma_0^{[p]}) = \left\{ \varphi \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ i_1, \dots, i_p \end{pmatrix} : (\hat{A}_{[p]} - \gamma_0^{[p]} \hat{I}_{[p]}) \varphi \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ i_1, \dots, i_p \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Более того, пространство $L_2(\Delta)$ можно представить в виде прямой суммы $L_2(\Delta_p) = \mathfrak{M}(\gamma_0^{[p]}) \oplus \mathfrak{U}(\gamma_0^{[p]})$ подпространств, где $\mathfrak{U}(\gamma_0^{[p]})$ – инвариантное подпространство, на котором спектральный радиус оператора $\hat{A}_{[p]}$ меньше $\gamma_0^{[p]}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Утверждения леммы в соответствующей формулировке справедливы, если для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует $r_k \geq 1$ такое, что $K^{r_k} \in \text{TP}$ на I_1 .

Пусть X, Y, Z – некоторые подмножества действительной оси. Если

$$C(x, y) = \int_Y dz A(x, z) B(z, y), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (8)$$

и интеграл в (8) сходится абсолютно, то (см. доказательство в [27])

$$C_{[p]}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\Delta_p[a, b]} d\bar{z} A_{[p]}(\bar{x}, \bar{z}) B_{[p]}(\bar{z}, \bar{y}), \quad \bar{x} \in \Delta_p[X], \quad \bar{y} \in \Delta_p[Z]. \quad (9)$$

Введем следующее определение [10], [12]: если $f_1, \dots, f_p$ – функции, каждая определенная на $\bar{\Delta}_1 \equiv \bar{\Delta} = [a, b]$, то определим их внешнее произведение $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p$ функцией, определенной на симплексе $\Delta_p[a, b]$ выражением

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p)(\bar{x}) = \det \|f_i(x_j)\|_{i,j=1}^p = f \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in \Delta_p[a, b]. \quad (10)$$

Ясно, что в (10) правая часть будет тождественно равна нулю всякий раз, когда любые две компоненты функций совпадают, скажем, $f_1 = f_2$ для некоторых i, j , $1 \leq i < j \leq p$. Пусть $X = Z = \overline{\Delta}$, Y – дискретный конечный ряд $\{1, \dots, p\}$,

$$A(x, z) = K(x, z), \quad B(z, y) = f_i(y), \quad C(x, y) = (\hat{A}f_i)(x),$$

тогда согласно (9) приходим к важному соотношению

$$\hat{A}f_1 \wedge \hat{A}f_2 \wedge \dots \wedge \hat{A}f_p = \hat{A}(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

или в абстрактной форме

$$\hat{A}^{\wedge p} \cdot f^{\wedge p} = (\hat{A}f)^{\wedge p};$$

здесь $(\hat{A}f)^{\wedge p}$ – внешняя степень оператора $\hat{A} \cdot f$.

Приведем еще один результат оценки спектрального зазора для фокусирующих операторов [18], [21].

ЛЕММА 4. Пусть конус $\mathfrak{K} \subset E$ воспроизводящий и нормальный. Пусть также спектральный радиус $r(\hat{A})$ является положительным собственным значением фокусирующего оператора $\hat{A}$. Тогда справедливо соотношение

$$q(\hat{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\chi(\hat{A}^n) - 1}{\chi(\hat{A}^n) + 1} \right]^{1/n}.$$

3. Перейдем к оценке спектральных зазоров для рассматриваемого класса операторов. Будем считать справедливыми следующие условия.

УСЛОВИЕ (A1). Оператор $\hat{A}$ принадлежит классу (квази) вполне непрерывных вполне положительных операторов ($\hat{A} \in \text{TP}$).

УСЛОВИЕ (A2). Оператор $\hat{A}$ u_0 -положителен относительно конуса $\mathfrak{K}$ неотрицательных в $L_2(\Delta)$ функций.

Отметим при этом, что мы не связываем условия (A1) и (A2) между собой. Между тем, для ряда прикладных краевых задач такая связь может быть установлена. Например, для эллиптического уравнения с граничными условиями Дирихле из неотрицательности функции Грина (условие (A1)) вытекает u_0 -положительность оператора $\hat{A}$ (условие (A2)) (см. [2; с. 275]). Другие, более сложные примеры из теории переноса излучения и вещества (газокинетическая теория) можно найти в работах [5], [8], [22], [23]. В этой связи укажем, что в условии (A1) класс рассматриваемых операторов включает в себя системы уравнений смешанного типа (например, интегродифференциальное уравнение переноса и дифференциальные уравнения параболического типа в частных производных) со сложной структурой спектра, включая его существенную часть (см., например, [5], [28]).

Изложение удобно построить поэтапно.

(i) Условие (A1) требует, в частности, чтобы $K(x, y) > 0$ на $I_1 \times I_2$. Согласно лемме 2 заключаем, что $\lambda_0 = r(\hat{A}) > 0$ есть простое собственное значение $\lambda_0 > |\lambda_i|$, $i = 1, 2, \dots$. Последние неравенства справедливы в том случае, если λ_i , $i = 1, 2, \dots$, существуют. Отвечающая λ_0 собственная функция $\varphi_0(x)$ является функцией строго одного знака на I_1 . Из п. (d) леммы 2 следует разложение

$$L_2(\Delta) = \mathfrak{M}(\lambda_0) \oplus \mathfrak{U}_0(\lambda_0); \quad (12)$$

здесь $\mathfrak{M}(\lambda_0)$ – инвариантное собственное подпространство, отвечающее λ_0 ; $\mathfrak{U}_0(\lambda_0)$ – инвариантное подпространство, на котором оператор $\hat{A}$ имеет спектральный радиус $|\lambda_1| < \lambda_0$. Очевидно, что если $\lambda_1 = 0$ или не существует, то $\hat{A}$ – квазинильпотентный на $\mathfrak{U}_0(\lambda_0)$ оператор. Далее мы покажем, что в действительности $|\lambda_1| > 0$.

В предположении $|\lambda_1| > 0$ из условия (A2) вытекает (см. [2; с. 47]), что

$$\hat{A}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_{u_0, \chi}, \quad (\theta \neq) u_0 \in \mathfrak{K}, \quad \chi(\hat{A}) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Из определения фокусирующего оператора, тождества $\hat{A}\varphi = \theta$, $\varphi \in \mathfrak{K}$, только при $\varphi = \theta$, которое вытекает из условия (A1) и леммы 4, следует, что

$$|\lambda_1| = q(\hat{A})\lambda_0, \quad q(\hat{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\chi(\hat{A}^n) - 1}{\chi(\hat{A}^n) + 1} \right]^{1/n}. \quad (13)$$

(ii) Перейдем к рассмотрению ассоциированного ядра $K_{[2]}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} \in \Delta_2$, $\bar{y} \in \Delta_2$, и отвечающего ему согласно (6) ассоциированного оператора $\hat{A}_{[2]}: L_2(\Delta_2) \rightarrow L_2(\Delta_2)$. Условия (A1), (A2) непосредственно обеспечивают (квази) вполне непрерывность оператора $\hat{A}_{[2]}$, что удовлетворяет требованиям леммы 3. В результате заключаем, что $\gamma_0^{[2]} = r(\hat{A}_{[2]}) > 0$ – простое собственное значение и не существует другого собственного значения оператора $\hat{A}_{[2]}$ с модулем $\gamma_0^{[2]}$. Более того, из п. (d) леммы 3 следует, что последовательность $(\hat{A}_{[2]}/\gamma_0^{[2]})^n$, $n \in \infty$, сходится к нетривиальному проекционному оператору на инвариантное подпространство $\mathfrak{M}(\gamma_0^{[2]})$, отвечающее собственному значению $\gamma_0^{[2]}$.

Покажем, что $\lambda_1 > 0$ и $\gamma_0^{[2]} = \lambda_0\lambda_1$. Предположим противное, т.е. пусть $\gamma_0^{[2]} > \lambda_0|\lambda_1|$. В соответствии с представлением (12) запишем

$$f_1 = a_1\varphi_0 + \psi_1, \quad f_2 = a_2\varphi_0 + \psi_2,$$

где $\psi_i \in \mathfrak{U}_0(\lambda_0)$, $i = 1, 2$. Полагая далее $\tilde{\gamma}_0^{[2]} = \gamma_0^{[2]}/\lambda_0 > |\lambda_1|$, находим с помощью выражения (10):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hat{A}_{[2]}}{\gamma_0^{[2]}} \right)^n (f_1 \wedge f_2) &= a_1 \left[\left(\frac{\hat{A}}{\lambda_0} \right)^n \varphi_0 \wedge \left(\frac{\hat{A}}{\tilde{\gamma}_0^{[2]}} \right)^n \psi_2 \right] + a_2 \left[\left(\frac{\hat{A}}{\tilde{\gamma}_0^{[2]}} \right)^n \psi_2 \wedge \left(\frac{\hat{A}}{\lambda_0} \right)^n \varphi_0 \right] \\ &\quad + \left(\frac{\hat{A}}{\lambda_0} \right)^n \psi_1 \wedge \left(\frac{\hat{A}}{\tilde{\gamma}_0^{[2]}} \right)^n \psi_2. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) последовательность $\hat{A}^n\varphi/\lambda_0$ сходится строго при любом φ ;

$$\left(\frac{\hat{A}}{\tilde{\gamma}_0^{[2]}} \right)^n \psi \rightarrow 0 \quad \forall \psi \in \mathfrak{U}_0(\lambda_0),$$

поскольку спектральный радиус оператора $\hat{A}$, связанного с $\mathfrak{U}_0(\lambda_0)$, есть $|\lambda_1| < \tilde{\gamma}_0^{[2]}$. Поэтому

$$\left(\frac{\hat{A}_{[2]}}{\gamma_0^{[2]}} \right)^n (f_1 \wedge f_2) \rightarrow 0 \quad \forall f_i \in L_2(I_1), \quad i = 1, 2.$$

Но линейная оболочка множества всех функций формы $f_1 \wedge f_2$ плотна в $L_2(\Delta_2)$. Отсюда немедленно следует, что предел операторной последовательности $(\hat{A}_{[2]}/\gamma_0^{[2]})^n$, $n \rightarrow \infty$, должен быть нулем, что противоречит утверждению, что $(\hat{A}_{[2]}/\gamma_0^{[2]})^n$ сходится к нетривиальному проекционному оператору (см. п. (d) леммы 3). Полученное противоречие свидетельствует о том, что $0 < \gamma_0^{[2]} \leq \lambda_0 |\lambda_1|$, так что $|\lambda_1| > 0$. Пусть $\varphi_1(x)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению λ_1 . Тогда из (11) сразу следует, что

$$\hat{A}_{[2]}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \lambda_0 \lambda_1 (\varphi_0 \wedge \varphi_1), \quad (15)$$

т.е. $\lambda_0 \lambda_1$ – собственное значение оператора $\hat{A}_{[2]}$, поскольку φ_1 и φ_2 – линейно независимые функции. Поэтому из п. (c) леммы 3 вытекает, что $\lambda_0 \lambda_1 = r(\hat{A}_{[2]}) = \gamma_0^{[2]}$, откуда $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_1 > |\lambda_i|$, $i = 2, 3, \dots$. Поскольку $\lambda_0 \lambda_1 = \gamma_0^{[2]} = r(\hat{A}_{[2]})$ и $\gamma_0^{[2]} = \lambda_0 \lambda_2$ – собственные значения оператора $\hat{A}_{[2]}$ с собственными функциями $\varphi_0 \wedge \varphi_1$ и $\varphi_0 \wedge \varphi_2$ соответственно, заключаем на основании п. (c) леммы 3, что $\lambda_0 \lambda_1 > |\lambda_0 \lambda_2|$ или $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Более того, обращаясь к п. (b) леммы 3, находим, что $\varphi_0 \wedge \varphi_1$ является функцией строго одного знака на $\Delta_2[a, b]$. Отсюда же следует, что $\lambda_0 \lambda_1$ – простое собственное значение оператора $\hat{A}_{[2]}$. Поэтому λ_1 – является собственным значением оператора $\hat{A}$ геометрической и алгебраической кратности единица. Действительно, пусть φ_1 и $\tilde{\varphi}_1$ – две собственные функции оператора $\hat{A}$, отвечающие собственному значению λ_1 . Тогда $\varphi_0 \wedge \varphi_1$ и $\varphi_0 \wedge \tilde{\varphi}_1$ – собственные функции оператора $\hat{A}_{[2]}$ для собственного значения $\lambda_0 \lambda_1 = \gamma_0^{[2]}$. Но инвариантное подпространство $\mathfrak{M}(\gamma_0^{[2]})$ одномерно и $\varphi_0 \wedge (\alpha \varphi_1 + \beta \tilde{\varphi}_1) \equiv 0$ для некоторых вещественных постоянных α и β . При этом собственные функции φ_0 и $\alpha \varphi_1 + \beta \tilde{\varphi}_1$ отвечают различным собственным значениям, λ_0 и λ_1 соответственно, и поэтому независимы, так что $\alpha \varphi_1 + \beta \tilde{\varphi}_1 \equiv 0$, т.е. геометрическая кратность λ_1 равна единице. Предположим теперь, что $(\hat{A} - \lambda_1 \hat{I})^2 \tilde{\varphi} = 0$. Поскольку $\dim \mathfrak{M}(\lambda_1) = 1$, то для некоторого действительного a $(\hat{A} \tilde{\varphi} - \lambda_1 \tilde{\varphi}) = a \varphi_1$. Для выражения $(\hat{A}_{[2]} - \gamma_0^{[2]} \hat{I}_{[2]})(\varphi_0 \wedge \tilde{\varphi})$ прямыми выкладками последовательно находим:

$$(\hat{A}_{[2]} - \gamma_0^{[2]} \hat{I}_{[2]})(\varphi_0 \wedge \tilde{\varphi}) = a \lambda_0 (\varphi_0 \wedge \varphi_1); \quad (16)$$

$$(\hat{A}_{[2]} - \gamma_0^{[2]} \hat{I}_{[2]})^2 (\varphi_0 \wedge \tilde{\varphi}) = 0. \quad (17)$$

Но алгебраическая кратность $\gamma_0^{[2]}$ оператора $\hat{A}_{[2]}$ равна единице. Соотношения (16) и (17) совместимы с этим фактом только при $a = 0$. Это говорит о том, что из $(\hat{A} - \lambda_1 \hat{I})^2 \tilde{\varphi} = 0$ вытекает $(\hat{A} - \lambda_1 \hat{I}) \tilde{\varphi} = 0$, что означает простую алгебраическую кратность λ_1 .

Теперь можно записать разложение (12) в следующем виде:

$$L_2(\Delta) = \mathfrak{M}(\lambda_0) \oplus \mathfrak{M}(\lambda_1) \oplus \mathfrak{U}(\lambda_1); \quad (18)$$

здесь $\mathfrak{M}(\lambda_i)$ – собственное инвариантное подпространство, отвечающее λ_i , $i = 0, 1$; каждое из них одномерно; $\mathfrak{U}(\lambda_1)$ – инвариантное подпространство, на котором оператор $\hat{A}$ имеет спектральный радиус $|\lambda_2| < \lambda_1$. Еще раз отметим, что если $\lambda_2 = 0$ или не существует, то $\hat{A}$ – квазинильпотентный на $\mathfrak{U}(\lambda_1)$ оператор. Далее мы покажем, что в наших условиях $|\lambda_2| > 0$.

Для дальнейших рассуждений отметим, что из условия (A1), в частности, следует неравенство (см. [2; с. 275])

$$\int_{\bar{\Delta}^*} dy K(x, y) \leq \int_{\bar{\Delta}} dy K(x, y), \quad x \in \Delta, \quad \bar{\Delta}^* \subset \bar{\Delta}.$$

В этом случае существует $\varepsilon = \varepsilon(\bar{\Delta}^*) > 0$ такое, что

$$\varepsilon \int_{\bar{\Delta}} dy K(x, y) \leq \int_{\bar{\Delta}^*} dy K(x, y), \quad x \in \bar{\Delta}. \quad (19)$$

Аналогичным образом из условия (A1) для компонент ассоциированного ядра $K_{[2]}(\bar{x}, \bar{y})$ следуют неравенства

$$\varepsilon_{[2]}^{ij} \int_{\bar{\Delta}} dy_j K(x_i, y_j) \leq \int_{\bar{\Delta}_0^{ij}} dy_j K(x_i, y_j) \leq \int_{\bar{\Delta}_0} dy_j K(x_i, y_j); \quad (20)$$

здесь

$$\bar{\Delta}_0 = \max_{i,j} \Delta_0^{ij}, \quad \varepsilon_{[2]}^{ij} = \varepsilon_{[2]}^{ij}(\bar{\Delta}_0^{ij}), \quad i, j = 1, 2.$$

Используя вид ядра $K_{[2]}(\bar{x}, \bar{y})$ и справедливость неравенств (20), нетрудно указать $\varepsilon_{[2]} = \varepsilon_{[2]}(\Delta_2) > 0$ такое, что справедливо неравенство, аналогичное (19):

$$\varepsilon_{[2]} \int_{\Delta_2} d\bar{y} K_{[2]}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \int_{\bar{\Delta}_2^0} d\bar{y} K_{[2]}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} \in \Delta_2. \quad (21)$$

Здесь

$$\varepsilon_{[2]} = \frac{|\varepsilon_{[2]}^1 - \varepsilon_{[2]}^2|}{\max_{k=1,2} \{\varepsilon_{[2]}^k\}}, \quad \varepsilon_{[2]}^1 = \varepsilon_{[2]}^{12} \varepsilon_{[2]}^{21}, \quad \varepsilon_{[2]}^2 = \varepsilon_{[2]}^{12} \varepsilon_{[2]}^{22}.$$

Из неравенства (21) сразу следует (см. [2; с. 247]), что

$$\alpha_2 u_0^{[2]}(\bar{x}) \leq \hat{A}_{[2]} f(\bar{x}) \leq \beta_2 u_0^{[2]}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Delta_2, \quad \alpha_2, \beta_2 > 0, \quad (22)$$

т.е. оператор $\hat{A}_{[2]} u_0^{[2]}$ -положителен относительно конуса $\mathfrak{K}^{[2]} (\ni f(\bar{x}))$ неотрицательных в $L_2(\Delta_2)$ функций. В предположении $|\lambda_2| > 0$ из неравенства (22) вытекает, что

$$\hat{A}_{[2]} \mathfrak{K}^{[2]} \subset \mathfrak{K}_{u_0^{[2]}, \chi_2}^{[2]}, \quad u_0^{[2]} \in \mathfrak{K}^{[2]}, \quad u_0^{[2]} \neq 0, \quad \chi_2 = \chi_2(\hat{A}_{[2]}) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Из определения фокусирующего оператора, леммы 4 и тождества $\hat{A}_{[2]} f = \theta$, $f \in \mathfrak{K}^{[2]}$, только при $f \equiv \theta$, которое следует из условия (A1), приходим к соотношению, аналогичному (13),

$$|\gamma_1^{[2]}| = q(\hat{A}_{[2]}) \gamma_0^{[2]}$$

или

$$|\lambda_2| = q(\hat{A}_{[2]}) \lambda_1, \quad q(\hat{A}_{[2]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\chi_2(\hat{A}_{[2]}^n - 1)}{\chi_2(\hat{A}_{[2]}^n + 1)} \right]^{1/n}. \quad (23)$$

(iii) Рассмотрим оператор $\hat{A}_{[3]}$, порождаемый ассоциированным ядром $K_{[3]}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} \in \Delta_3$, $\bar{y} \in \bar{\Delta}_3$, согласно уравнению (6). Очевидно, что оператор $\hat{A}_{[3]}: L_2(\Delta_3) \rightarrow$

$L_2(\Delta_3)$ (квази) вполне непрерывен и удовлетворяет условиям леммы 3. Поэтому $\gamma_0^{[3]} = r(\hat{A}_{[3]}) > 0$ – простое собственное значение оператора $\hat{A}_{[3]}$ и не существует другого собственного значения с модулем $\gamma_0^{[3]}$. Остальной спектр оператора $\hat{A}_{[3]}$ содержится в круге $|\lambda| < \gamma_0^{[3]}$. Из п. (d) леммы 3 следует, что последовательность

$$(\hat{A}_{[3]}/\gamma_0^{[3]})^n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (24)$$

сходится к ненулевому проекционному оператору на инвариантном подпространстве $\mathfrak{M}(\gamma_0^{[3]})$. Покажем, что $\lambda_2 > 0$ и $\gamma_0^{[3]} = \lambda_0 \lambda_1 |\lambda_2|$. Предположим противное, т.е. $\gamma_0^{[3]} > \lambda_0 \lambda_1 |\lambda_2|$ и $\tilde{\gamma}_0^{[3]} = \gamma_0^{[3]}/\lambda_0 \lambda_1$. Тогда $\tilde{\gamma}_0^{[3]} > |\lambda_2|$. Аналогично (14) найдем, что выражение

$$\left(\frac{\hat{A}_{[3]}}{\gamma_0^{[3]}}\right)^n (\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \psi) = \frac{\hat{A}^n \varphi_0}{\lambda_0^n} \wedge \frac{\hat{A}^n \varphi_1}{\lambda_1^n} \wedge \left(\frac{\hat{A}}{\tilde{\gamma}_0^{[3]}}\right)^n \psi$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ при $\psi \in \mathfrak{U}(\lambda_2)$. Подобным образом получим, что

$$\left(\frac{\hat{A}}{\gamma_0^{[3]}}\right)^n (\varphi_0 \wedge \psi_1 \wedge \psi_2), \quad \left(\frac{\hat{A}}{\gamma_0^{[3]}}\right)^n (\varphi_1 \wedge \psi_1 \wedge \psi_2), \quad \left(\frac{\hat{A}}{\gamma_0^{[3]}}\right)^n (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3),$$

$$\psi_i \in \mathfrak{U}(\lambda_2), \quad i = 1, 2, 3,$$

стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. С помощью разложения (18), аналогично тому, как ранее мы воспользовались представлением (12), находим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{A}_{[3]}/\gamma_0^{[3]})^n = 0$ в противоположность (24). Отсюда следует, что $\gamma_0^{[3]} \leq \lambda_0 \lambda_1 |\lambda_2|$, поэтому $|\lambda_2| > 0$. Таким образом, гарантировано существование нетривиальной собственной функции $\varphi_2(x)$, отвечающей λ_2 , так что справедливо равенство $\tilde{A}\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$. Обращаясь к выражению (11), видим, что $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$ – собственная функция оператора $\hat{A}_{[3]}$, отвечающая собственному значению $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2$. На основании леммы 3 заключаем, что $\gamma_0^{[3]} = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2$ (т.е. $\lambda_2 > 0$) и $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$ – единственная (с точностью до постоянной) собственная функция, отвечающая $\gamma_0^{[3]}$. Более того, $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$ – функция строго одного знака при любом $\bar{x} \in \Delta_3$. Доказательство неравенства $\lambda_2 > |\lambda_3|$ проводится аналогично доказательству неравенства $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Установление того, что $\dim \mathfrak{M}(\lambda_2) = 1$, аналогично доказательству равенства $\dim \mathfrak{M}(\lambda_1) = 1$. Чтобы показать, что λ_2 имеет алгебраическую кратность единица, предположим, что $(\hat{A} - \lambda_2 \hat{I})\tilde{\varphi} = 0$. Это дает $\hat{A}\tilde{\varphi} = \lambda_2 \tilde{\varphi} = a\varphi_2$ для некоторой вещественной постоянной a . Непосредственными выкладками находим

$$(\hat{A}_{[3]} - \gamma_0^{[3]} \hat{I}_{[3]})(\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \tilde{\varphi}) = a\lambda_0 \lambda_1 \varphi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2,$$

а это возможно лишь в случае $a = 0$. Таким образом, λ_2 – собственное значение алгебраической кратности единица.

Проводя аналогичные предыдущему рассуждения, из условия (A1) получаем цепочку неравенств

$$\varepsilon_{[3]}^{ij} \int_{\Delta} dy_{ij} K(x_i, y_j) \leq \int_{\Delta_0^{ij}} dy_j K(x_i, y_j) \leq \int_{\Delta_0} dy_j K(x_i, y_j);$$

здесь

$$\overline{\Delta}_0 = \max_{i,j} \Delta_0^{ij}, \quad \varepsilon_{[3]}^{ij} \equiv \varepsilon_{[3]}^{ij}(\overline{\Delta}_0^{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

откуда очевидным образом следует $u_0^{[3]}$ -положительность оператора $\hat{A}_{[3]}$ относительно конуса $\mathfrak{K}^{[3]}$ неотрицательных в $L_2(\Delta_3)$ функций. В предположении $|\lambda_3| > 0$ отсюда вытекает, что оператор $\hat{A}_{[3]}$ фокусирующий:

$$\hat{A}_{[3]}\mathfrak{K}^{[3]} \subset \mathfrak{K}_{u_0^{[3]}, \chi_3}^{[3]}, \quad (\theta \neq) u_0^{[3]} \in \mathfrak{K}^{[3]}.$$

Из определения фокусирующего оператора, леммы 4 и условия (A1), как и для оператора $\hat{A}_{[2]}$, следует, что (см. (13), (23))

$$|\gamma_1^{[3]}| = q(\hat{A}_{[3]})\gamma_0^{[3]} \quad \text{или} \quad |\lambda_3| = q(\hat{A}_{[3]})\lambda_2, \quad q(\hat{A}_{[3]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\chi_3(\hat{A}_{[3]}^n) - 1}{\chi_3(\hat{A}_{[3]}^n) + 1} \right)^{1/n}.$$

Дальнейший ход последовательной оценки спектральных зазоров осуществляется по индукции, что обеспечивается условиями (A1) и (A2).

Таким образом, можно сформулировать основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (квази) вполне непрерывный в $L_2(\Delta)$ оператор $\hat{A}$ удовлетворяет условиям (A1), (A2) и $q(\hat{A})$ – спектральный зазор оператора $\hat{A}$. Тогда для собственного значения λ_i оператора $\hat{A}$ справедлива оценка

$$|\lambda_i| = q(\hat{A}_{[i]})\lambda_{i-1}, \quad q(\hat{A}_{[i]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\chi_i(\hat{A}_{[i]}^n) - 1}{\chi_i(\hat{A}_{[i]}^n) + 1} \right)^{1/n}, \quad (25)$$

причем геометрическая и алгебраическая кратность λ_i , $i = 1, 2, \dots$, равна единице. Более того, в условиях теоремы справедливо разложение

$$L_2(\Delta) = \bigoplus_{i=0}^n \mathfrak{M}(\lambda_i) \oplus \mathfrak{U}(\lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (26)$$

здесь $\mathfrak{M}(\lambda_i)$ – инвариантное подпространство, отвечающее λ_i , $\dim \mathfrak{M}(\lambda_i) = 1$, $i = 0, 1, \dots$; $\mathfrak{U}(\lambda_n)$ – инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$, на котором он имеет спектральный радиус $|\lambda_{n+1}| < \lambda_n$.

4. Рассмотрим некоторые обобщения теоремы 1, значительно ослабив требования на оператор $\hat{A}$. Частично мы это уже сделали, потребовав не полной непрерывности оператора $\hat{A}$, а только квазивполне непрерывности (см. [3; с. 77]). По пути ослабления условий теоремы можно идти также, значительно расширяя достаточно узкий класс вполне положительных операторов до знакорегулярных (SR) [8] или даже до квазизнакорегулярных [29]. Подобные ситуации возникают в некоторых задачах теории переноса [30]. Подобное расширение теоремы 1 требует отдельного изложения и в рамках данной работы не рассматривается.

Дополнительно к условию (A2) потребуем, чтобы было выполнено

УСЛОВИЕ (A3). Оператор $\hat{A}$ (квази) вполне непрерывен и существует такой показатель степени r_k оператора $\hat{A}$, что $\hat{A}^{r_k} \in TP$ или порядка k , т.е. условие (3) выполняется только при $i \leq k$, $i, k = 1, 2, \dots$.

Заметим при этом, что в общем случае мы не связываем условие u_0 -положительности оператора $\hat{A}$ (условие (A2)) с условием (A3) – показателем r_k (см. комментарий к условиям (A1), (A2)).

Рассмотрим справедливость утверждений теоремы 1 при выполнении условий (A2), (A3). Очевидно, что нет необходимости повторять все этапы доказательства, достаточно рассмотреть завершающий этап (iii). Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_0^\infty$ – множество собственных значений оператора $\hat{A}$ (5), расположенных с учетом кратности в порядке убывания по абсолютной величине $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Пусть $\{\varphi_i(x)\}_0^\infty$ – отвечающее им множество собственных (присоединенных) функций. Пусть r_1 таково, что $k^{r_1}(x, y) > 0$ на $I_1 \times I_2$. Спектр оператора $\hat{A}^{r_1}$ состоит из множества $\{\lambda_i^{r_1}\}_0^\infty$, которому соответствует множество $\{\varphi_i(x)\}_0^\infty$. Из следствия 1 вытекает неравенство $\lambda_0^{r_1} > 0$ и $\lambda_0^{r_1}$ отвечает собственная функция $\varphi_0(x)$, положительная на I_1 . Более того, $\lambda_0^{r_1}$ превосходит по абсолютной величине любое другое собственное значение оператора λ^{r_1} . Из неравенства $\lambda_0^{r_1} > 0$ следует, что $r(\hat{A}) = |\lambda_0| > 0$. Согласно лемме 2 заключаем, что $|\lambda_0|$ – собственное значение оператора $\hat{A}$, которому отвечает ненулевая неотрицательная собственная функция $\varphi_0(x)$, $x \in \bar{\Delta}$. Но $\lambda_0^{r_1} = |\lambda_0|^{r_1} > 0$ – простое собственное значение оператора $\hat{A}^{r_1}$, поэтому $\lambda_0 = |\lambda_0|$ является простым значением оператора $\hat{A}$. Из свойства $K^{r_1}(x, y) > 0$ на $I_1 \times I_2$ заключаем, что λ_0 – простое собственное значение оператора $\hat{A}^+$, которому отвечает собственная функция ψ_0 строго одного знака. Очевидно также, что $\lambda_0 > |\lambda_i|$, $i = 1, 2, \dots$. Отсюда, следуя нашим предыдущим рассуждениям, приходим к следующему разложению:

$$L_2(\Delta) = \mathfrak{M}(\varphi_0) \oplus \mathfrak{E}(\varphi_0).$$

Здесь $\mathfrak{M}(\varphi_0)$ – инвариантное подпространство, отвечающее φ_0 ; на подпространстве $\mathfrak{E}(\varphi_0)$ выполняется оценка $r(\hat{A}) \leq |\lambda_1|$. Отметим, что поскольку из условия (A2) в общем случае вытекает существование целого n (> 0) такого, что оператор $\hat{A} u_0$ положителен, соотношение (13) остается в силе и для рассматриваемой ситуации (с учетом комментария к условиям (A1) и (A2) – при $n \geq r_1$).

Переходя к ассоциированному оператору $\hat{A}_{[2]}$, из условия (A3) находим, что

$$K_{[2]}^{r_2}(\bar{x}, \bar{y}) > 0, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Delta_2 \times \Delta_2;$$

из следствия 2 вытекает существование $|\lambda_1| > 0$ такого, что $\lambda_0^{r_2} \lambda_1^{r_2} > 0$ и $\lambda_0^{r_2} \lambda_1^{r_2}$ – спектральный радиус оператора $\hat{A}_{[2]}$. Отсюда немедленно следует, что $r(\hat{A}_{[2]}) > 0$, и поскольку $(\hat{A}_{[2]}) \geq 0$, из леммы 2 находим, что $\lambda_0 \lambda_1$ – собственное значение оператора $\hat{A}_{[2]}$, откуда $\lambda_1 = |\lambda_1| > 0$. Поскольку $\lambda_0^{r_2} \lambda_1^{r_2}$ имеет простую алгебраическую и геометрическую кратности, то же самое справедливо для $\lambda_0 \lambda_1$, и для λ_1 . Замечая, что множество собственных функций не изменяется при итерации оператора, т.е. $\hat{A}$, $\hat{A}^r$ имеют одно и то же множество собственных функций, и продолжая действовать по индукции вышеуказанным образом, приходим к результатам п. (iii), значит, основным выводам теоремы 1. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть (квази) вполне непрерывный в $L_2(\Delta)$ оператор $\hat{A}$ удовлетворяет условиям (A2), (A3) и $q(\hat{A})$ – спектральный зазор оператора $\hat{A}$. Тогда для собственного значения λ_i оператора $\hat{A}$ справедлива оценка типа (25), причем между целыми значениями n и r_k отсутствует прямая зависимость. Более того, в условиях теоремы справедливо разложение типа (26) с определенными выше инвариантными подпространствами.

СЛЕДСТВИЕ 3. Утверждения теоремы в соответствующих формулировках справедливы для класса операторов с (квази) знакорегулярными операторами.

ЗАМЕЧАНИЕ. В наших рассуждениях мы использовали понятие фокусирующего оператора для оценки спектрального зазора. Такой подход не является единственным, но он естественным образом вытекает из теории полуупорядоченных пространств в банаховых пространствах. В качестве другого возможного подхода можно привести вариационный метод, с помощью которого, например, были в явном виде сделаны двусторонние оценки собственных значений для одной задачи теории переноса ([8; гл. 6]). К сожалению, не для всех задач можно сформулировать вариационный принцип и провести соответствующие оценки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Г. Крейн, М. А. Рутман, “Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха”, *УМН*, **3**:1 (1948), 3–95.
- [2] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматгиз, М., 1962.
- [3] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутницкий, В. Я. Степенко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969.
- [4] М. А. Красносельский, А. В. Соболев, “О конусах конечного ранга”, *Докл. АН СССР*, **225**:6 (1975), 1256–1259.
- [5] С. Б. Шихов, *Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ*, Атомиздат, М., 1973.
- [6] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam, *Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **70**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [7] Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов, *Современные проблемы нелинейной динамики*, УРСС, М., 2002.
- [8] Р. С. Макин, *Математические задачи нелинейной теории переноса. Газокинетическая теория*, Изд-во УлГТУ, Дмитровград, 2006.
- [9] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.
- [10] S. Karlin, “The existence of eigenvalues for integral operators”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113**:1 (1964), 1–17.
- [11] А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов, “Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:3 (1976), 606–626.
- [12] В. И. Юдович, “Спектральные свойства эволюционного оператора параболического уравнения с одной пространственной переменной и его конечномерных аналогов”, *Заседания семинара им. И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики*, *УМН*, **32**:1 (1977), 230–232.
- [13] О. А. Ладыженская, “Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **163**, Наука, Л., 1987, 105–129.
- [14] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, “Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G -метрикой”, *УМН*, **26**:4 (1971), 43–92.
- [15] A. M. Ostrowski, “On positive matrices”, *Math. Ann.*, **150**:3 (1963), 276–284.
- [16] E. Hopf, “An inequality for positive linear integral operators”, *J. Math. Mech.*, **12**:5 (1963), 683–692.
- [17] E. Hopf, “Remarks on my paper ‘An inequality for positive integral operators’”, *J. Math. Mech.*, **12**:6 (1963), 889–892.
- [18] П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, Ю. В. Покорный, “Об одном классе линейных положительных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:4 (1971), 9–17.

- [19] А. В. Соболев, “К теории вполне положительных матриц”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:4 (1975), 830–836.
- [20] А. В. Соболев, “Квазивыпуклые конусы конечного ранга”, *УМН*, **32**:5 (1977), 197–198.
- [21] М. А. Красносельский, А. В. Соболев, “Спектральный зазор фокусирующего оператора”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:1 (1983), 73–74.
- [22] Р. С. Макин, “О спектре стационарного односкоростного уравнения переноса с линейной зависимостью индикатрисы рассеяния на углах”, *Дифференц. уравнения*, **21**:6 (1985), 1032–1036.
- [23] Р. С. Макин, “О спектре стационарного односкоростного уравнения переноса с крайевыми условиями типа отражения”, *Функц. анализ и его прил.*, **24**:2 (1990), 89–90.
- [24] G. Birkhoff, “Extension of Jentzsch’s theorem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85**:1 (1957), 219–227.
- [25] K. Yosida, S. Kakutani, “Operator-theoretical treatment of Markoff’s process and mean ergodic theorem”, *Ann. of Math.* (2), **42**:1 (1941), 188–228.
- [26] S. Karlin, “Positive operators”, *J. Math. Mech.*, **8** (1959), 907–937.
- [27] Г. Полиа, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. Ряды Интегральное исчисление. Теория функций*, Наука, М., 1978.
- [28] Р. С. Макин, “О гомоклинических траекториях эволюционных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **41**:4 (2005), 479–489.
- [29] Р. С. Макин, “Об одном классе линейных положительных операторов”, *Матем. заметки*, **43**:1 (1988), 71–81.
- [30] Р. С. Макин, “О спектре стационарного односкоростного уравнения переноса с изотропным рассеянием”, *Докл. АН СССР*, **274**:3 (1984), 536–540.

Р. С. Макин

Димитровградский институт технологии,
управления и дизайна

Ульяновского государственного технического университета,
г. Димитровград Ульяновской обл.

E-mail: rmak@vinf.ru

Поступило

20.12.2006