Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Тажетдинов, Субнормальное строение двумерных линейных групп над полными кольцами, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 924–930

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:00:56

УДК 519.45

СУБНОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД ПОЛНЫМИ КОЛЬЦАМИ

С. Тажетдинов

Дается описание субнормальных подгрупп двумерных линейных групп над некоторыми (m, n) -полными кольцами. Примерами (m, n) -полных колец являются полулокальные кольца и кольца размерности 0; в частности, кольца, регулярные по Нейману, при условии, что каждое поле вычетов этих колец содержит более $m(n - 1)$ элементов.

Библиография: 7 названий.

Строка матрицы над кольцом R , элементы которой порождают как идеал все кольцо R , называется *унимодулярной*. Пусть $m \geq 1$ и $n \geq 2$ – целые числа. Согласно [1] коммутативное кольцо R называется (m, n) -полным, если для каждой $(m \times n)$ -матрицы A над R с унимодулярными строками существуют элемент $\varepsilon \in R$ (зависящий от A) и обратимые элементы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \in R$ такие, что

$$A[1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}]^t = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]^t,$$

где t означает транспонирование. Ясно, что (m, n) -полное кольцо является и (s, t) -полным при $s \leq m$ и $t \leq n$. Таким образом, любое (m, n) -полное кольцо является $(1, 2)$ -полным кольцом, т.е. кольцом стабильного ранга 1. Известно (см. [1]), что если каждое поле вычетов полулокального кольца и кольца размерности 0, в том числе кольца, регулярного по Нейману, содержит более $m(n - 1)$ элементов, то оно является (m, n) -полным кольцом.

Далее, напомним, что если существует ряд

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_{d-1} \trianglelefteq H_d = G$$

подгрупп группы G , где $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ означает, что H_{i-1} является нормальной подгруппой H_i , то H называется *субнормальной* подгруппой группы G . В этом случае пишут $H \triangleleft^d G$. Наименьшее такое d называется *субнормальной глубиной* H в G .

Пусть теперь R – $(1, 6)$ -полное, $(2, 4)$ -полное или $(3, 3)$ -полное кольцо. В настоящей работе дается описание субнормальных подгрупп двумерных линейных групп над кольцом R , являющееся значительным улучшением описания из [2]. Дается также улучшение аналогичного описания для случая примитивных колец, данного в работе [3].

Пусть I – идеал кольца R . Гомоморфизм колец $R \rightarrow R/I$ индуцирует сюръективный (см. [1]) гомоморфизм групп $\pi_I: \mathrm{GL}_2(R) \rightarrow \mathrm{GL}_2(R/I)$. Здесь $\mathrm{GL}_2(R/I)$ – единичная группа. Пусть

$$Z_I = (\text{center } \mathrm{GL}_2(R/I))\pi_I^{-1}, \quad K_I = \{\sigma \in \mathrm{SL}_2(R) / \sigma\pi_I = 1\}, \\ E_I = \mathrm{gr}(t_{12}(\alpha), t_{21}(\alpha) \mid \alpha \in I),$$

где t_{ij} – трансвекции. Заметим, что $Z_R = \mathrm{GL}_2(R)$, $Z_0 = \text{center } \mathrm{GL}_2(R)$, $K_R = \mathrm{SL}_2(R)$, $K_0 = \{1\}$. *Весом матрицы*

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

назовем идеал $J(h) = \mathrm{id}(a - d, b, c)$, а *вес подгруппы* H определим формулой

$$J(H) = \sum_{h \in H} J(h).$$

Группу обратимых элементов кольца R обозначим через R^* .

ЛЕММА 1. *Если подгруппа H группы $\mathrm{GL}_2(R)$ нормализуется подгруппой K_I , то $H \geq K_J$, где $J = 2^{15}J^2(H)I^7$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подвыражением i_n будем понимать произвольный элемент идеала I^n . Пусть

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

– матрица из H и $\alpha \in I$. По определению кольца R существует элемент $\varepsilon \in R$ такой, что все элементы ε , $1 + 2c\alpha\varepsilon$, $1 + c\alpha\varepsilon$, $1 + 2c\alpha\varepsilon + 2c^2\alpha^2\varepsilon^2$ принадлежат R^* . Если теперь $q = 1 + 2c\alpha\varepsilon$, $\nu = 4a\alpha\varepsilon(1 + c\alpha\varepsilon)$ и $d(q) = \mathrm{diag}(q^{-1}, q)$, то в H содержится матрица

$$[h, d(q)t_{12}(\nu), t_{12}(\nu)] = t_{12}(-2^5ca\alpha^2\varepsilon^2(1 + 2c\alpha\varepsilon + 2c^2\alpha^2\varepsilon^2)(1 + c\alpha\varepsilon)^2),$$

т.е.

$$t_{12}(2^5ca\alpha^2\varepsilon_1) \in H, \tag{1}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon^2(1 + 2c\alpha\varepsilon + 2c^2\alpha^2\varepsilon^2)(1 + c\alpha\varepsilon)^2 \in R^*$.

Рассмотрев теперь при тех же α и ε вместо h матрицу $t_{12}(\beta)ht_{12}^{-1}(\beta)$ для произвольно-го $\beta \in I$, вместо (1) получим $t_{12}(2^5c(a + \beta c)\alpha^2\varepsilon_1) \in H$, где $\varepsilon_1 \in R^*$ – тот же обратимый элемент, что и в (1). Вместе с (1) это дает $t_{12}(2^5c^2\alpha^2\beta\varepsilon_1) \in H$, и ввиду произвольности $\beta \in I$ имеем $t_{12}(2^5c^2\alpha^2i_1) \in H$. Отсюда, поскольку $\alpha \in I$ также был произвольным, получим

$$t_{12}(2^6c^2i_3) \in H. \tag{2}$$

Аналогично, заменяя в этих рассуждениях $c, a, d(q), t_{12}(\nu)$ соответственно на $b, d, d^{-1}(q), t_{21}(\nu)$, вместо (1) и (2) получим включения

$$t_{21}(2^5bd\alpha^2\varepsilon_2) \in H, \quad \varepsilon_2 \in R^*, \tag{3}$$

$$t_{21}(2^6b^2i_3) \in H. \tag{4}$$

Повторяя далее в точности ход рассуждений работы [2, с. 100–101], получаем также включения

$$t_{12}(2^{15}b^2i_7) \in H, \quad (5)$$

$$t_{21}(2^{15}c^2i_7) \in H. \quad (6)$$

Пусть теперь

$$h_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

– матрицы из H . Рассмотрев вместо h матрицу $h_1h_2 \in H$, вместо (4) имеем $t_{21}(2^6(a_1b_2 + b_1d_2)^2i_3) \in H$. Отсюда ввиду произвольности $h \in H$ при выводе включения (4) получаем

$$t_{21}(2^7a_1d_2b_1b_2i_3) \in H. \quad (7)$$

Из (4) и (7) следует включение $t_{21}(2^7b_1b_2\eta i_3) \in H$, где $\eta = \det h_1 \cdot \det h_2 \in R^*$, а потому и включение

$$t_{21}(2^7b_1b_2i_3) \in H. \quad (8)$$

Аналогично (с помощью (2)) получается включение

$$t_{12}(2^7c_1c_2i_3) \in H. \quad (9)$$

Далее, в силу (3) получим $t_{21}(2^5b_2d_2\alpha^2\varepsilon_3) \in H$, где $\varepsilon_3 \in R^*$. Пусть теперь $r = 2^5b_2d_2\alpha^2\varepsilon_3$. Тогда из (2) имеем

$$t_{12}(2^6r^2i_3) \in H. \quad (10)$$

Рассмотрев теперь вместо h матрицу $h_1t_{21}(r) \in H$, вместо (2) получим

$$t_{12}(2^6(c_1 + d_1r)^2i_3) \in H.$$

Отсюда ввиду (2) и (10) следует, что $t_{12}(2^7c_1d_1ri_3) \in H$, т.е. $t_{12}(2^{12}c_1d_1b_2d_2\alpha^2i_3) \in H$. Ввиду произвольности элемента $\alpha \in I$ отсюда имеем

$$t_{12}(2^{13}c_1b_2d_1d_2i_5) \in H. \quad (11)$$

Из (4), (8) и (11) теперь следует включение $t_{12}(2^{13}c_1b_2\eta i_5) \in H$, где $\eta = \det h_1 \cdot \det h_2 \in R^*$, а потому и включение

$$t_{12}(2^{13}c_1b_2i_5) \in H. \quad (12)$$

Аналогично, “транспонировав” рассуждение, получим

$$t_{12}(2^{13}b_1c_2i_5) \in H. \quad (13)$$

В силу симметрии из (12) и (13) получаем также включения

$$t_{12}(2^{13}b_1c_2i_5) \in H, \quad t_{21}(2^{13}c_1b_2i_5) \in H. \quad (14)$$

Рассмотрев теперь вместо h_1 матрицу $t_{21}^{-1}(\beta)h_1t_{21}(\beta)$, где $\beta \in I$, вместо (12) получим

$$t_{12}(2^{13}(c_1 + (d_1 - a_1)\beta - b_1\beta^2)b_2i_5) \in H. \quad (15)$$

Заменив здесь β на $-\beta$, имеем

$$t_{12}(2^{13}(c_1 - (d_1 - a_1)\beta - b_1\beta^2)b_2i_5) \in H. \quad (16)$$

Из (15) и (16) получим $t_{12}(2^{14}(d_1 - a_1)b_2\beta i_5) \in H$ или ввиду произвольности $\beta \in I$

$$t_{12}(2^{14}(d_1 - a_1)b_2i_6) \in H. \quad (17)$$

Ввиду (14) в этих рассуждениях трансвекции t_{12} можно заменить трансвекциями t_{21} . Поэтому

$$t_{21}(2^{14}(d_1 - a_1)b_2i_6) \in H. \quad (18)$$

В силу симметрии из (17) и (18) получаем также включения

$$t_{12}(2^{14}b_1(d_2 - a_2)i_6) \in H, \quad t_{21}(2^{14}b_1(d_2 - a_2)i_6) \in H. \quad (19)$$

“Транспонировав” теперь эти рассуждения, вместо (17) и (18) получим

$$t_{12}(2^{14}(d_1 - a_1)c_2i_6) \in H, \quad t_{21}(2^{14}(d_1 - a_1)c_2i_6) \in H, \quad (20)$$

а также в силу симметрии

$$t_{12}(2^{14}c_1(d_2 - a_2)i_6) \in H, \quad t_{21}(2^{14}c_1(d_2 - a_2)i_6) \in H. \quad (21)$$

Далее, из (12), (15) и (17) имеем $t_{12}(2^{14}b_1b_2\beta^2i_5) \in H$ или ввиду произвольности $\beta \in I$

$$t_{12}(2^{15}b_1b_2i_7) \in H. \quad (22)$$

Аналогично получается включение

$$t_{21}(2^{15}c_1c_2i_7) \in H. \quad (23)$$

Наконец, рассмотрев вместо h_1 матрицу $t_{21}^{-1}(\beta)h_1t_{21}(\beta)$, где $\beta \in I$, вместо (21) получим

$$\begin{aligned} t_{12}(2^{14}(c_1 + (d_1 - a_1)\beta - b_1\beta^2)(d_2 - a_2)i_6) &\in H, \\ t_{21}(2^{14}(c_1 + (d_1 - a_1)\beta - b_1\beta^2)(d_2 - a_2)i_6) &\in H. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (19), (21) и произвольности $\beta \in I$ имеем

$$t_{12}(2^{14}(d_1 - a_1)(d_2 - a_2)i_7) \in H, \quad t_{21}(2^{14}(d_1 - a_1)(d_2 - a_2)i_7) \in H. \quad (24)$$

Из (8), (9), (12)–(14) и (17)–(24) следует, что $H \geq E_{2^{15}J_1J_2I^7}$, где $J_1 = J(h_1)$ и $J_2 = J(h_2)$.

Ввиду произвольности матриц $h_1, h_2 \in H$ отсюда получаем включение $H \geq E_J$, где $J = 2^{15}J^2(H)I^7$. Далее, подгруппы $H^g, g \in \text{SL}_2(R)$, также нормализуются нормальной подгруппой K_I . Поскольку $J(H^g) = J(H)$, то только что доказанное включение дает $H^g \geq E_J$, где $J = 2^{15}J^2(H)I^7$. Отсюда $H \geq E_J^g$ для всех $g \in \text{SL}_2(R)$. Поэтому

$$H \geq E_J^{\text{SL}_2(R)} = K_J$$

ввиду [1, теорема III.2]. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если подгруппа H группы $\mathrm{GL}_2(R)$ нормализуется подгруппой $K_R = \mathrm{SL}_2(R)$, то $H \geq K_J$, где $J = 2^7 J(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы разобьем на два предложения. В них условие леммы предполагается выполненным без оговорок.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $t_{12}(\alpha) \in H$ или $t_{21}(\alpha) \in H$, то $H \geq E_J$, где $J = 4 \mathrm{id}(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$(e_{12}(1) + e_{21}(-1))t_{12}(\alpha)(e_{12}(1) + e_{21}(-1))^{-1} = t_{21}(-\alpha),$$

то достаточно рассмотреть случай $t_{12}(\alpha) \in H$. Пусть $r \in R$. По определению кольца R существует элемент $\varepsilon \in R$ такой, что элементы ε , $r + \varepsilon^2$ и $r - \varepsilon^2$ принадлежат R^* . Имеем

$$4r = \left(\frac{r + \varepsilon^2}{\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{r - \varepsilon^2}{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R^*$. Тогда H содержит матрицу

$$t_{12}(4r\alpha) = t_{12}(\varepsilon_1^2\alpha)t_{12}(-\varepsilon_2^2\alpha) = d^{-1}(\varepsilon_1)t_{12}(\alpha)d(\varepsilon_1)d^{-1}(\varepsilon_2)t_{12}(-\alpha)d(\varepsilon_2).$$

Ввиду произвольности элемента $r \in R$ и с учетом равенства в начале доказательства отсюда получим $H \geq E_J$, где $J = 4 \mathrm{id}(\alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеет место соотношение $H \geq K_J$, где $J = 2^7 J(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h – матрица из H указанного выше вида. Здесь можно считать, что $a \in R^*$. Действительно, если это не так, то, поскольку $\mathrm{id}(a, c) = R$, существует элемент $r \in R$ такой, что $a + rc \in R^*$, и мы перешли бы от h к матрице $t_{12}(r)ht_{12}^{-1}(r)$ из H , вес которой равен $J(h)$. Далее, положив $\alpha = 1$ в начале доказательства леммы 1, вместо (1) получим

$$t_{12}(2^5 c\varepsilon_4) \in H, \quad \varepsilon_4 \in R^*. \quad (25)$$

Аналогично, вместо (3) имеем

$$t_{21}(2^5 b\varepsilon_5) \in H, \quad \varepsilon_5 \in R^*. \quad (26)$$

В силу предложения 1 из (25) и (26) теперь получим

$$\begin{aligned} H &\geq E_J, \quad \text{где } J = 2^7 \mathrm{id}(c), \\ H &\geq E_J, \quad \text{где } J = 2^7 \mathrm{id}(b). \end{aligned} \quad (27)$$

Наконец, рассмотрев матрицу $t_{21}(1)ht_{21}^{-1}(1)$ с учетом (27), имеем

$$H \geq E_J, \quad \text{где } J = 2^7 \mathrm{id}(a - d). \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует, что $H \geq E_J$, где $J = 2^7 J(h)$. Ввиду произвольности $h \in H$ отсюда имеем $H \geq E_J$, где $J = 2^7 J(H)$. Поэтому $H \geq E_j^{\mathrm{SL}_2(R)} = K_J$. Предложение 2 доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – $(1, 6)$ -полное, $(2, 4)$ -полное или $(3, 3)$ -полное кольцо и $\mathrm{SL}_2(R) \leq G \leq \mathrm{GL}_2(R)$. Если $H \triangleleft^d G$, то

$$K_{J^{f(d)}} \leq H \leq Z_{J(H)},$$

где $J = 2^8 J(H)$ и $f(d) = (4 \cdot 7^{d-1} - 1)/3$, причем при $d = 1$ можно положить $J = 2^7 J(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ведется индукцией по субнормальной глубине d подгруппы H .

При $d = 1$ подгруппа H нормализуется подгруппой $K_R = \mathrm{SL}_2(R)$ и по лемме 2 $H \geq K_J$, где $J = 2^7 J(H)$.

Пусть теперь $d > 1$ и утверждение теоремы выполнено для всех подгрупп $M \triangleleft^{d-1} G$. Тогда $H \triangleleft M$ для некоторой такой подгруппы M и $K_w \leq M$, где $w = (2^8 J(M))^{f(d-1)}$. Таким образом, H нормализуется подгруппой K_w , а потому по лемме 1

$$H \geq K_{2^{15} J^2(H) w^7}.$$

Так как $J(H) \subseteq J(M)$, то

$$2^{15} J^2(H) w^7 \supseteq (2^8 J(H))^2 (2^8 J(H))^{7f(d-1)} = (2^8 J(H))^{7f(d-1)+2} = (2^8 J(H))^{f(d)},$$

поэтому $H \geq K_{J^{f(d)}}$, где $J = 2^8 J(H)$. Включение $H \leq Z_{J(H)}$ очевидно. Теорема доказана.

В работе [2] аналогичное описание было получено со значительно худшей функцией $f(d) = (7 \cdot 13^{d-1} - 1)/6$, причем в предположении обратимости элемента 2 в кольце R .

Пользуясь случаем, отметим теперь следующее усиление теоремы 1 из [3]:

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – $(1, 18)$ -полное, $(2, 10)$ -полное или $(3, 7)$ -полное кольцо и $\mathrm{SL}_2(R) \leq G \leq \mathrm{GL}_2(R)$. Если $H \triangleleft^d G$, то

$$K_{J^{f(d)}} \leq H \leq Z_{J(H)},$$

где $J = 2^{14} J(H)$ и $f(d) = (5^d - 1)/4$, причем при $d = 1$ можно положить $J = 2^7 J(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этой теоремы в лемме 1 работы [3] идеал I^6 достаточно заменить идеалом I^5 , а для этого достаточно заменить включения (13) и (14) работы [3] соответственно включениями

$$t_{21}(2^{14} ci_5) \in H, \quad t_{12}(2^{14} bi_5) \in H.$$

Действительно, из [3, с. 417] имеем $t_{21}(2^8 bi_3) \in H$ и $t_{21}(2^{14} cai_5) \in H$. Отсюда $t_{21}(2^{14}(a(a+d) - bc)ci_5) \in H$ или, поскольку $a(a+d) - bc = \det h \in R^*$, $t_{21}(2^{14} ci_5) \in H$. Аналогично доказывается и включение $t_{12}(2^{14} bi_5) \in H$. Теорема доказана с учетом работы [3].

Отметим, что в работе [3, теорема 2] аналогичное описание дано для случая локальных колец с той же функцией $f(d) = (5^d - 1)/4$.

Отметим также, что в работах [4]–[6] были получены описания субнормальных подгрупп общих линейных групп GL_n при $n \geq 3$ соответственно с функциями

$$f(d) = \frac{7^d - 1}{6}, \quad f(d) = \frac{6^d - 1}{5} \quad \text{и} \quad f(d) = \frac{5^d - 1}{4}.$$

Таким образом, в описаниях субнормальных подгрупп общих линейных групп GL_n , $n \geq 2$, наименьшей (а значит, и наилучшей) является пока функция $f(d) = (5^d - 1)/4$. Интересно отметить, что она же остается пока наименьшей и в случае бесконечномерных общих линейных групп [7]. С другой стороны, известно [5], что $f(d) \geq 2^d - 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] McDonald B. R. GL_2 of rings with many units // Comm. Algebra. 1980. V. 8. № 9. P. 869–888.
- [2] Тажетдинов С. Субнормальное строение двумерных линейных групп над 6-примитивными кольцами // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 99–105.
- [3] Тажетдинов С. Субнормальное строение двумерных линейных групп над кольцами, близкими к полям // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 4. С. 414–425.
- [4] Wilson J. S. The normal and subnormal structure of general linear groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1972. V. 71. № 2. P. 163–177.
- [5] Vaserstein L. N. The subnormal structure of general linear groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1986. V. 99. P. 425–431.
- [6] Vavilov N. A. A note on the subnormal structure of general linear groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1990. V. 107. P. 193–196.
- [7] Arrell D. G. The subnormal subgroup structure of the infinite general linear group // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1982. V. 25. P. 81–86.

Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

Поступило
27.07.2000