Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Шноль, Об одной экстремальной задаче про вероятностные распределения, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 6, 937–945

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 09:31:09

УДК 519.24

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПРО ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Э.Э. Шноль

Заданная плотность распределения вероятностей модифицируется посредством умножения на все положительные функции с фиксированным отношением верхней и нижней грани. Произведения нормируются так, чтобы получить модифицированные плотности вероятностей. Изучаются значения дисперсии в полученном классе вероятностных распределений. Показано, что верхняя грань дисперсии достигается для кусочно-постоянной модифицирующей функции, имеющей вид “прямоугольной ямы”. Аналогичное утверждение справедливо для минимума дисперсии. Показано, что в этом классе есть единственное распределение с максимальной дисперсией.

Библиография: 0 названий.

1. Постановка задачи. Следующий вопрос возник при рассмотрении простейших математических моделей генетики популяций (и был предложен автору генетиком А. С. Кондрашовым).

Пусть задано распределение вероятностей, имеющее плотность $p_0(x)$. Образует новую плотность $p(x)$, умножив $p_0(x)$ на положительную функцию $w(x)$ (с последующей нормировкой). Вопрос: насколько сильно может при этом измениться дисперсия? Главное ограничение (делающее вопрос содержательным) – “размах” $w(x)$ конечен, т.е.

$$\sup w(x) \leq K \inf w(x). \quad (1.1)$$

Естественно, предполагается, что исходное распределение $p_0(x)$ имеет (конечные) среднее значение и дисперсию. В дальнейшем мы будем считать, что среднее значение равно нулю, а дисперсия – единице.

Обозначим через $I_k[w]$ следующие функционалы:

$$I_k[w] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^k w(s) p_0(s) ds, \quad k = 0, 1, 2. \quad (1.2)$$

Модифицированная плотность определяется по формуле $p(x) = w(x)p_0(x)/I_0[w]$.

ЗАДАЧА. При заданной непрерывной плотности вероятностей $p_0(x)$ и заданной постоянной K ($K > 1$) указать положительные (измеримые) функции $w(x)$, на которых достигается верхняя и нижняя грань дисперсии распределения $p(x)$ – функционала $D[w]$ – при ограничении (1.1). Здесь

$$D[w] = \frac{I_2[w]}{I_0[w]} - (M[w])^2, \quad M[w] = \frac{I_1[w]}{I_0[w]}. \quad (1.3)$$

Ответ представляется интуитивно ясным. Чтобы получить максимальную дисперсию, нужно в наибольшей степени (насколько позволяет ограничение (1.1)) увеличить вероятности “далеких” значений x . А чтобы получить наименьшую дисперсию, наоборот, уменьшить вероятности “далеких” значений x . Точная формулировка и доказательство соответствующей теоремы составляет предмет этой заметки.

2. Ступенчатые функции. Функционалы (1.3) не меняются при умножении $w(x)$ на константу. Вместо (1.1) будем использовать следующие ограничения (первое – для поиска максимума D , второе – для минимума):

$$1 + \gamma \leq w(x) \leq 1, \quad -1 < \gamma < 0, \quad K = (1 + \gamma)^{-1}, \quad (2.1)$$

$$1 \leq w(x) \leq 1 + \gamma, \quad \gamma > 0, \quad K = 1 + \gamma. \quad (2.2)$$

Следующие кусочно-постоянные функции будем называть *ступенчатыми*:

$$\begin{aligned} w(x) &= 1 && \text{при } x \leq a \text{ и } x \geq b, \\ w(x) &= 1 + \gamma && \text{при } a < x < b. \end{aligned} \quad (2.3)$$

На семействе (2.3) функционалы I_k , M и D превращаются в функции двух переменных. В частности (см. (1.2)),

$$I_k(a, b) = 1 + \gamma \int_a^b x^k p_0(x) dx, \quad k = 0, 2, \quad (2.4a)$$

$$I_1(a, b) = \gamma \int_a^b x p_0(x) dx. \quad (2.4b)$$

При $a \rightarrow -\infty$ или $b \rightarrow +\infty$ все эти функции стремятся к пределам – непрерывным функциям одной переменной. Точнее, естественная область определения функций $I_k(a, b)$, $M(a, b)$ и $D(a, b)$ (в которой они непрерывны) – полуплоскость $a \leq b$, пополненная прямыми $a = -\infty$ и $b = +\infty$ (Это компактное множество можно представлять себе в виде треугольника, положив, например, $\tilde{a} = \varphi(a)$, $\tilde{b} = \varphi(b)$, $\varphi(s) = s/(1 + s^2)^{1/2}$.)

3. Формулировка основного результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $p_0(x) > 0$ непрерывна при всех x . Тогда

- 1) верхняя грань функционала $D[w]$ на множестве (измеримых) функций $w(x)$, удовлетворяющих неравенствам (2.1), достигается на ступенчатой функции вида (2.3) с конечными a и b ; экстремальная ступенчатая функция единственна;
- 2) нижняя грань функционала $D[w]$ на множестве функций $w(x)$, удовлетворяющих неравенству (2.2), достигается на ступенчатой функции вида (2.3) с конечными a и b .

Сформулированная теорема сводит экстремальную задачу для функционала $D[w]$ к нахождению экстремумов функции $D(a, b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ступенчатая функция, доставляющая нижнюю грань $D[w]$, не обязательно единственна.

4. Экстремумы функции $D(a, b)$. Убедимся сначала, что, используя для модификации плотности ступенчатые функции с $\gamma < 0$, можно увеличить дисперсию: $\sup D(a, b) > 1$.

По определению для ступенчатой функции $w(x)$ имеем

$$\begin{aligned} p(x) &= N(1 + \gamma)p_0(x) && \text{при } a < x < b, \\ p(x) &= Np_0(x) && \text{при } x < a \text{ и } x > b, \end{aligned} \quad N = \frac{1}{I_0[w]}.$$

При $a < b < \infty$ (и $\gamma < 0$) выполнены неравенства $1 + \gamma < I_0[w] < 1$, и потому $N > 1$, а $N(1 + \gamma) < 1$. Таким образом, при отрицательном γ $p(x)$ меньше $p_0(x)$ в интервале (a, b) и больше $p_0(x)$ вне этого интервала. Выберем теперь a и b так, чтобы при переходе от $p_0(x)$ к $p(x)$ среднее не менялось. По предположению среднее значение распределения $p_0(x)$ равно нулю. Поэтому для всякого $a < 0$ существует $b > 0$ такое, что

$$\int_a^b xp_0(x) dx = 0.$$

Выбрав такие a и b , мы получим $M(a, b) = 0$ (при любом γ). Поскольку среднее не изменилось, а вероятности более далеких от среднего значений увеличились, то ясно, что дисперсия распределения $p(x)$ больше исходной. Проверим это утверждение выкладкой. В силу сказанного выше о знаке $p(x) - p_0(x)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - a)(x - b)[p(x) - p_0(x)] dx > 0.$$

Поскольку средние значения распределений p и p_0 равны нулю, получим $D(a, b) > 1$ ($a < 0$ можно выбрать произвольно).

Вполне аналогично при $\gamma > 0$ можно получить $D(a, b) < 1$. Выпишем производные функции D (см. (1.3) и (2.4); аргументы у функций $D(a, b)$ и $I_k(a, b)$ опущены):

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= -\frac{\gamma p_0(a)}{I_0^2} \left\{ a^2 I_0 - I_2 - 2 \frac{I_1}{I_0} (a I_0 - I_1) \right\}, \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \frac{\gamma p_0(b)}{I_0^2} \left\{ b^2 I_0 - I_2 - 2 \frac{I_1}{I_0} (b I_0 - I_1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пусть сначала $\gamma < 0$. При фиксированном b и $a \ll -1$ производная по a положительна, поскольку первое слагаемое в скобке мажорирует остальные: максимум $D(a, b)$ на каждой прямой $b = \bar{b}$ (включая $\bar{b} = \infty$) достигается при конечном a . Аналогично, максимум $D(a, b)$ на каждой прямой $a = \bar{a}$ достигается при конечном b . Так как $D(b, b) \equiv 1$, то $\sup D(a, b)$ достигается во внутренней точке. Приравняв к нулю частные производные (4.1), получим (поскольку $p_0(a)$ и $p_0(b)$ отличны от нуля) уравнения, связывающие a и b в экстремальной точке со значениями I_k в этой точке:

$$\frac{I_1(a_*, b_*)}{I_0(a_*, b_*)} = \frac{1}{2}(a_* + b_*), \quad \frac{I_2(a_*, b_*)}{I_0(a_*, b_*)} = \frac{1}{2}(a_*^2 + b_*^2). \quad (4.2)$$

Повторяя рассуждения, получим для $\gamma > 0$: нижняя грань $D(a, b)$ достигается во внутренней точке (a_*, b_*) и при этом выполнены соотношения (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Среднее значение и дисперсия, отвечающие экстремальной ступенчатой функции, такие же, как у дискретной случайной величины, принимающей значения a_* и b_* с вероятностью $1/2$.

5. Доказательство первого утверждения теоремы 1. Пусть $w_*(x)$ – ступенчатая функция с $\gamma < 0$, для которой выполнены соотношения (4.2), а $w(x)$ – произвольная функция, для которой выполнены неравенства (2.1). Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (w_*(x) - w(x))(x - a_*)(x - b_*)p_0(x) dx. \quad (5.1)$$

Этот интеграл неотрицателен, поскольку подынтегральная функция везде неотрицательна. Он обращается в нуль, только если $w_*(x) \equiv w(x)$ (почти всюду). Обозначив $I_{k*} = I_k[w_*]$ и $I_k = I_k[w]$, запишем

$$I_{2*} - I_2 - (a_* + b_*)(I_{1*} - I_1) + a_*b_*(I_{0*} - I_0) \geq 0.$$

Выразив $a_* + b_*$ и a_*b_* из (4.2) и поделив на I_0 , получим

$$-\frac{I_2}{I_0} + 2\frac{I_{1*}}{I_{0*}}\frac{I_1}{I_0} - 2\left(\frac{I_{1*}}{I_{0*}}\right)^2 + \frac{I_{2*}}{I_{0*}} \geq 0$$

или (см. (1.3))

$$D[w_*] \geq D[w] + (M[w_*] - M[w])^2. \quad (5.2)$$

Равенство здесь возможно лишь при $w_*(x) \equiv w(x)$ (почти всюду).

СЛЕДСТВИЕ. *Имеется только одна ступенчатая функция, на которой достигается верхняя грань функционала $D[w]$.*

Действительно, во всяком локальном максимуме функции $D(a, b)$ выполняются соотношения (4.2). При двух максимумах получились бы противоречивые неравенства $D[w_*^{(1)}] > D[w_*^{(2)}]$ и $D[w_*^{(2)}] > D[w_*^{(1)}]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если распределение $p_0(x)$ симметрично (т.е. $p_0(-x) = p_0(x)$), то экстремальная ступенчатая функция тоже симметрична. Если же $p_0(x)$ не симметрично, то, вообще говоря, для получения максимальной дисперсии нужно изменить среднее значение.

6. Вспомогательная задача. Перейдем к более трудному вопросу о минимуме дисперсии. Рассмотрим функции (2.3) при $\gamma > 0$. Пусть при $a = a_*$, $b = b_*$ достигается минимум $D(a, b)$, и пусть $w_*(x)$ – соответствующая ступенчатая функция. Рассмотрим произвольную функцию $w(x)$, удовлетворяющую неравенствам (2.2). Подынтегральное выражение в (5.1) теперь неположительно, и вместо (5.2) мы получим

$$D[w_*] \leq D[w] + (M[w_*] - M[w])^2. \quad (6.1)$$

В отличие от задачи на максимум, (6.1) доставляет нужное неравенство лишь при $M[w] = M[w_*]$. Однако формула (6.1) подсказывает, что полезно рассмотреть следующую вспомогательную задачу.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА. Найти функции $w(x)$, удовлетворяющие неравенству (2.2), на которых достигается нижняя грань функционала $D[w]$ при заданном среднем значении $M[w] = m$.

Предварительно рассмотрим функционал $M[w]$ на ступенчатых функциях (2.3).

7. Экстремумы $M(a, b)$. Напишем соотношения (опустив аргументы у M и I_k)

$$\frac{\partial M}{\partial a} = -\frac{\gamma p_0(a)}{I_0^2}(aI_0 - I_1), \quad \frac{\partial M}{\partial b} = \frac{\gamma p_0(b)}{I_0^2}(bI_0 - I_1).$$

Из этих формул видно, что функция $M(a, b)$ не имеет критических точек при конечных a и b , $a < b$. Далее, на всякой прямой $a = \bar{a}$ (включая $\bar{a} = -\infty$) производная $\partial M/\partial b$ может обратиться в нуль только один раз, так как функция $h(b) = bI_0(\bar{a}, b) - I_1(\bar{a}, b)$ монотонно возрастает: $h'(b) = I_0(\bar{a}, b) > 0$. Если $\gamma > 0$, то минимальное значение m_- функции $M(a, b)$ достигается при $a = -\infty$, $b = b_-$. В силу монотонности $h(b)$ значение b_- определено однозначно. Аналогично, максимальное значение m_+ достигается при $a = a_+$, $b = +\infty$.

ЛЕММА 1. Пусть $\gamma > 0$ и $m_- < m < 0$. Тогда множество уровня $E_m = \{M(a, b) = m\}$ есть гладкая кривая, имеющая две горизонтальные асимптоты $b = b_1$ и $b = b_2$. При этом $b_1 < m < b_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение множества E_m есть $I_1(a, b) = mI_0(a, b)$. Выписав его явно (см. (2.4)), получим при $m < 0$

$$\int_a^b x p_0(x) dx < m \int_a^b p_0(x) dx.$$

Отсюда $a < m$ для всех точек E_m . В окрестности любой точки E_m с конечными a и b это множество есть дуга гладкой кривой (поскольку $dM(a, b) \neq 0$). Дифференцируя уравнение E_m , получим

$$a'(b) = \frac{p_0(b)(m - b)}{p_0(a)(m - a)}. \quad (7.1)$$

Пусть $b < m$ в некоторой точке $(a_0, b_0) \in E_m$. Тогда в этой точке $a'(b) > 0$. При движении по кривой E_m в сторону увеличения b производная $a'(b)$ должна сменить знак (иначе, $a(b)$ будет расти и превзойдет значение m). Ветвь E_m , расположенная при $b > m$, уходит неограниченно влево. На ней b , продолжая возрастать, стремится к конечному пределу b_2 (в противном случае $M(a, b)$ при $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$ на этой ветви стремилось бы к нулю). Аналогично, на нижней ветви, левее точки (a_0, b_0) , b стремится к $b_1 < m$. Описанная картина, конечно, не зависит от выбора “начальной” точки (a_0, b_0) . Поскольку на каждой прямой $a = \bar{a}$ может быть не более двух точек, в которых $M(a, b) = m$, то других связанных компонент в множестве E_m нет.

ДОБАВЛЕНИЕ. Вполне аналогично устроено множество уровня E_m при $m > 0$: E_m есть гладкая кривая с вертикальными асимптотами $a = a_1$ и $a = a_2$; при этом $a_1 < m < a_2$. На особом положении находится множество E_0 , задаваемое уравнением $I_1(a, b) = 0$ (см. (2.4b)). Оно состоит из прямой $a = b$ и кривой, выходящей из точки $(0, 0)$, при движении по которой (влево) $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$.

8. ЛЕММА 2. На всем семействе функций (2.2) функционал $M[w]$ меняется в тех же пределах, что на ступенчатых функциях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть минимум $M(a, b)$ достигается при $a = -\infty$, $b = b_-$. Приравняв нулю производную $M(-\infty, b)$ (см. начало п. 7), получим $m_- = b_-$. Пусть $w_-(x)$ – ступенчатая функция, отвечающая $a = -\infty$ и $b = b_-$, а $w(x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая неравенствам (2.2) и отличная от $w_-(x)$ на множестве положительной меры. При сделанном выборе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (w_-(x) - w(x))(x - b_-)p_0(x) dx < 0,$$

откуда, обозначив $I_{k-} = I_k[w_-]$ и $I_k = I_k[w]$, имеем

$$I_{1-} - I_1 - b_-(I_{0-} - I_0) < 0.$$

Подставив сюда $b_- = m_- = I_{1-}/I_{0-}$ и поделив на I_0 , получим $M[w] > M[w_-] = m_-$.

Аналогично доказывается, что $M[w] \leq m_+$ для любой $w(x)$. Равенство возможно лишь при совпадении $w(x)$ со ступенчатой функцией $w_+(x)$ (почти всюду).

9. Условные экстремумы $D(a, b)$. Пусть снова $\gamma > 0$. Фиксируем значение $m < 0$ ($m > m_-$) и рассмотрим функцию $I_2(a, b)/I_0(a, b)$ на линии E_m . Положим $\psi(b) = I_2(a(b), b)/I_0(a(b), b)$. Используя лемму 1, легко проверить (см. формулы (2.4) и (7.1)), что при $a \ll -1$ производная ψ отрицательна на нижней ветви кривой E_m и положительна на верхней, так что при $a \rightarrow -\infty$ функция $\psi(b)$ возрастает. Поэтому нижняя грань на E_m функции I_2/I_0 (тем самым, и функции D) достигается во внутренней точке – при конечных a и b . В точке минимума $\psi'(b_*) = 0$. Это условие сводится к равенству

$$I_{2*} - (a_* + b_*)I_{1*} + a_*b_*I_{0*} = 0, \quad (9.1)$$

здесь $I_{k*} = I_k(a_*, b_*)$. Случаи $m > 0$ ($m < m_+$) и $m = 0$ разбираются аналогично. Равенство (9.1) для экстремальных точек $D(a, b)$ на кривой E_m остается в силе.

10. Об условном экстремуме функционала $D[w]$. Рассмотрим совокупность функций $w(x)$, удовлетворяющих неравенствам (2.2).

Фиксируем число t из области значений функционала $M[w]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p_0(x) > 0$ при всех x . Тогда нижняя грань функционала $D[w]$ на множестве функций $w(x)$, для которых $M[w] = t$, достигается на ступенчатой функции вида (2.3) с $\gamma > 0$. Экстремальная функция определена однозначно.

ДОБАВЛЕНИЕ. Для экстремальной ступенчатой функции $a = -\infty$ при $t = m_-$, $b = +\infty$ при $t = m_+$; для остальных допустимых t значения a и b конечны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $t = m_-$ ограничению $M[w] = t$ в силу леммы 2 удовлетворяет только (единственная) ступенчатая функция, и утверждение теоремы становится тривиальным. То же верно при $t = m_+$. Пусть теперь $m_- < t < m_+$ и минимум функции $D(a, b)$ при условии $M(a, b) = t$ достигается в точке (a_*, b_*) . Пусть $w_*(x)$ – соответствующая ступенчатая функция, а $w(x)$ – произвольная функция семейства (2.2), для которой $M[w] = t$. Рассмотрим снова интеграл (5.1); он неположителен. Раскрывая скобки, получим, используя обозначения п. 5 и равенство (9.1),

$$-I_2 + (a_* + b_*)I_1 - a_*b_*I_0 \leq 0.$$

Пodelим это неравенство на I_0 , а равенство (9.1) на I_{0*} и сложим. Поскольку $I_1/I_0 = I_{1*}/I_{0*}$ ($= t$), получим $I_{2*}/I_{0*} - I_2/I_0 \leq 0$ или $D[w_*] \leq D[w]$. Знак равенства возможен, только если $w_*(x) = w(x)$ почти всюду.

СЛЕДСТВИЕ. Нижняя грань функционала $D[w]$ на всем семействе функций (2.2) та же, что на подмножестве ступенчатых функций, она совпадает с минимумом функции $D(a, b)$.

(Напомним, что этот минимум достигается при конечных a и b ; см. п. 4.)

Таким образом, второе утверждение теоремы 1 есть следствие теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ступенчатых функций, доставляющих минимум $D[w]$ (на всем семействе функций (2.2)), может быть несколько. Простейший пример строится так. Пусть функция $p_0(x)$ четная и ее график состоит из двух узких высоких пиков. Если γ достаточно велико, то наименьшая дисперсия распределения $p(x)$ получится при $w(x)$ равной $1 + \gamma$ на одном из пиков и 1 в остальных точках. Здесь, стало быть, есть две экстремальные ступенчатые функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Задача о максимуме $D[w]$ при заданном значении $M[w]$ приводит к аналогичному ответу: максимум достигается на ступенчатой функции.

11. Произвольное исходное распределение. Если $p_0(x)$ где-то обращается в нуль, то основные утверждения теоремы 1 остаются в силе: верхняя и нижняя грани дисперсии модифицированной плотности $p(x)$ (см. п. 1) достигаются и притом на ступенчатых функциях $w(x)$. В этом легче всего убедиться предельным переходом от положительных $p_0(x)$, который мы сейчас наметим для максимума D . Что касается утверждения о единственности экстремальной $w(x)$ для верхней грани D , то оно, конечно, перестает быть верным в буквальном смысле: значения $w(x)$ там, где $p_0(x)$ равно нулю, могут быть произвольными. Однако легко доказать, используя простые соображения выпуклости (приведенные ниже), что если в рассматриваемом классе распределение $p(x)$ с максимальной дисперсией существует, то оно единственно.

Итак, пусть задана произвольная непрерывная плотность $p_0(x) \geq 0$. Пусть $q(x)$ – непрерывная положительная плотность (с конечным средним значением и дисперсией). Положим

$$p_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon)p_0(x) + \varepsilon q(x).$$

Обозначим через $I_{k\varepsilon}$ функционалы I_k , отвечающие распределению $p_\varepsilon(x)$ (см. (1.2)), и рассмотрим класс функций $w(x)$, определяемый неравенствами (2.1). При $\varepsilon \rightarrow 0$ $I_{k\varepsilon}[w] \rightarrow I_{k0}[w]$ равномерно на всем этом классе. Поскольку (при любой $p(x)$) $I_0[w] \geq 1 + \gamma$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ функционалы $D_\varepsilon[w]$ равномерно стремятся к $D_0[w]$ и $\sup D_\varepsilon \rightarrow \sup D_0$. При каждом $\varepsilon > 0$ справедлива теорема 1: существует ступенчатая функция $w_{*\varepsilon}(x)$, на которой достигается верхняя грань D_ε . Выберем последовательность значений ε_j , стремящуюся к нулю, пусть a_j и b_j определяют соответствующие ступенчатые функции $w_{*j}(x)$. Очевидно, $D_0[w_{*j}] \rightarrow \sup D_0$ при $j \rightarrow \infty$. Выберем подмножество индексов j так, чтобы a_j и b_j стремились к пределам a и b (допуская, что $a = -\infty$ или $b = +\infty$). Для ступенчатой функции $w_*(x)$, отвечающей этим a и b , $D_0[w_*] = \sup D_0$.

12. Единственность распределения $p(x)$ с максимальной дисперсией. Дисперсия D , взятая с обратным знаком, в ее зависимости от плотности вероятностного распределения есть выпуклый функционал:

$$D\langle p \rangle \geq \frac{1}{2}(D\langle p_1 \rangle + D\langle p_2 \rangle) \quad \text{при } p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2). \quad (12.1)$$

Поэтому соображения выпуклости (не использованные явно до сих пор) полезны в нашей задаче. Рассмотрим совокупность W всех функций $w(x)$, удовлетворяющих неравенствам (2.1); W – выпуклое множество. Фиксируем функцию $p_0(x)$ (не предполагая более, что она везде положительна) и рассмотрим модифицированные распределения $p(x)$ при всех $w(x) \in W$. Совокупность P функций $p(x)$ – тоже выпуклое множество. Мы изучаем отображение W в P , задаваемое формулой $p(x) = w(x)p_0(x)/I_0[w]$. При этом отображении отрезок, соединяющий два элемента W , переходит в отрезок, соединяющий образы. Более точно, если

$$w = \alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (12.2)$$

то $p = \beta p_1 + (1 - \beta)p_2$, где

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha I_{01}}{\alpha I_{01} + (1 - \alpha)I_{02}}, \quad I_{0k} = I_0[w_k]. \quad (12.3)$$

Крайние точки множества W (не представимые в виде (12.2)) – функции $w(x)$, принимающие (почти всюду) только два значения: 1 и $1 + \gamma$. Пусть S – множество тех x , при которых $p_0(x) > 0$. Крайние точки в множестве P – функции $p(x)$, для которых $w(x)$ принимает только (те же) два значения на множестве S . Для краткости назовем *внутренними* все элементы P , не являющиеся крайними.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. По заданному $p(x)$ значения $w(x)$ на S , вообще говоря, не восстанавливаются однозначно – умножение w на константу не сказывается на p . Но если $w(x)$ принимает на S (почти всюду) только значения 1 и $1 + \gamma$, то эта неопределенность исчезает.

ЛЕММА 3. Пусть функция $w(x)$, удовлетворяющая неравенствам (2.1), принимает промежуточные значения (из интервала $1 + \gamma < w < 1$) на подмножестве S_1 множества S , имеющем положительную меру. Тогда на w не может достигаться верхняя грань функционала $D[w]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при некотором $c > 0$ на множестве S_2 положительной меры ($S_2 \subset S_1$) выполнены неравенства $1 + \gamma + c \leq w(x) \leq 1 - c$. Рассмотрим ограниченные функции $\tau(x)$, равные нулю вне S_2 . Положим $w_\varepsilon(x) = w(x) + \varepsilon\tau(x)$. Тогда $D[w_\varepsilon] = D[w] + \varepsilon L[\tau] + O(\varepsilon^2)$, где

$$L[\tau] = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\tau(x)p_0(x)dx, \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Здесь при заданной функции $w(x)$ A, B и C фиксированы ($A = 1/I_0[w] > 0$). Выберем теперь $\tau(x)$ так, чтобы было $L[\tau] \neq 0$. Например, можно положить $\tau(x) \equiv 1$ на той части множества S_2 , где многочлен $Q(x)$ сохраняет знак, и равной нулю в остальных точках. При малых ε функции $w_\varepsilon(x)$ удовлетворяют неравенствам (2.1) и $D[w_\varepsilon] > D[w]$ при $\text{sign}(\varepsilon L[\tau]) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. На функциях w , удовлетворяющих предположениям леммы 3, не может также достигаться нижняя грань функционала D .

ЛЕММА 4. Верхняя грань дисперсии на множестве P не может достигаться во внутренней точке P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = \beta p_1 + (1 - \beta)p_2$ при $0 < \beta < 1$ и $p_1 \neq p_2$. Пусть $p_k(x) = w_k(x)p_0(x)/I_0[w_k]$. Функции $p(x)$ можно сопоставить $w(x)$, где w задается формулой (12.2) (при этом α находится из (12.3)). Если одна из функций w_k принимает промежуточные значения на множестве положительной меры, то этим свойством будет обладать и w , что противоречит лемме 3. Если же функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ принимают лишь крайние значения, то они различаются на множестве $S_1 \subset S$, имеющем положительную меру; иначе $p_1(x)$ и $p_2(x)$ совпадали бы почти всюду. На S_1 функция $w(x)$ принимает промежуточные значения. По лемме 3 на w не может достигаться верхняя грань $D[w]$, т.е. дисперсия $D\langle p \rangle$ не максимальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В классе P может существовать не более одной функции, на которой достигается верхняя грань функционала $D\langle p \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что значение $\bar{D} = \sup D\langle p \rangle$ достигается на функциях $p_1(x)$ и $p_2(x)$, различающихся на множестве положительной меры. Пусть им соответствуют $w_1(x)$ и $w_2(x)$ (принимающие лишь два значения в силу леммы 3). Положим $2p(x) = p_1(x) + p_2(x)$. Для p можно выбрать w по формуле (12.2). Следовательно, $w(x)$ принимает промежуточные значения на множестве положительной меры (где не совпадают w_1 и w_2). По лемме 4 $D[w] = D\langle p \rangle$ не может быть максимальным, но в силу формулы (12.1) $D\langle p \rangle = \bar{D}$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

13. Приложение. Следующий комментарий сообщен автору А. С. Кондрашовым (упомянутым в начале статьи):

ПРОБЛЕМА. Со времен Дарвина видообразование, т.е. процесс распада одной популяции на две, является центральным объектом рассмотрения в эволюционной биологии. Для изучения видообразования полезно знать, какая из возможных функций отбора данной интенсивности оказывает наиболее сильное разрывающее воздействие на популяцию.

Этот вопрос приводит к математической задаче, сформулированной в п. 1 (точнее к ее первой части – вопросу о максимуме дисперсии).

Смысл всех величин в исходной, содержательной задаче таков:

- x – значение некоторого количественного признака;
- $p_0(x)$ – распределение этого признака среди особей выбранной популяции (численность ее предполагается достаточно большой, чтобы имело смысл рассматривать непрерывные распределения);
- $w(x)$ – “функция отбора”, характеризующая выживаемость особей с данным значением выбранного признака (предполагается, что только от него выживаемость и зависит!);
- $p(x)$ – распределение того же признака после действия отбора.

Постоянная K характеризует интенсивность отбора.