Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Довбуш, Критерий полиномиальности для целых функций многих комплексных переменных, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 500–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:16:22

УДК 517.55

КРИТЕРИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

П. В. Довбуш

Доказан “радиальный” критерий полиномиальности для целых функций многих комплексных переменных.

Библиография: 3 названия.

Функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, голоморфная во всем n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, называется *целой функцией*.

Если целая функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, имеет однородное разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z),$$

в котором P_k есть однородные многочлены в $\mathbb{C}^n$ степени k , то радиальная производная $\mathcal{R}f$ определяется по формуле

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(z).$$

В дальнейшем через l_ξ будем обозначать комплексную прямую в $\mathbb{C}^n$, проходящую через нуль и фиксированную точку $\xi \in S$, где S – единичная сфера в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле.

Радиальная производная $\mathcal{R}f$ связана с производной сужения функции f на комплексную прямую $l_\xi(\lambda) = \{z = \lambda\xi, \lambda \in \mathbb{C}, \xi \in S\}$ следующим соотношением:

$$\mathcal{R}f(l_\xi(\lambda)) = \lambda f'(l_\xi(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \xi \in S, \quad (1)$$

где штрих означает производную по λ .

Имеет место

ТЕОРЕМА. *Целая функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, является многочленом тогда и только тогда, когда для любой комплексной прямой $l \subseteq \mathbb{C}^n$, проходящей через начало координат,*

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{R}f(l(\lambda))|}{1 + |f(l(\lambda))|^2} < \infty. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия (2) проверяется непосредственно, поэтому покажем его достаточность.

Сначала рассмотрим случай $n = 1$.

Если целая функция f не является тождественной постоянной, то возможны два случая: либо у функции f в бесконечности имеется полюс, либо – существенная особенность.

Предположим, что имеет место второй случай. Тогда у функции $g(z) = f(1/z)$ в нуле будет существенная особенность. Из условий (1) и (2) следует, что в проколотом единичном круге $U_* = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$ выполняется неравенство

$$\frac{|z| \cdot |g'(z)|}{1 + |g(z)|^2} < O(1). \quad (3)$$

Введем в рассмотрение семейство функций $\mathcal{F} = \{g_k(z)\}$, где функции $g_k(z) = g(z/2^k)$, $k = 1, 2, \dots$, определены и голоморфны в U_* .

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{|g'_k(z)|}{1 + |g_k(z)|^2} = \frac{1}{|z|} \frac{(|z|/2^k) |g'(z/2^k)|}{1 + |g(z/2^k)|^2}$$

для всех $z \in U_*$.

Из этого равенства, неравенства (3) и критерия Марти (см., например, [1, с. 238]) заключаем, что $\mathcal{F}$ – нормальное в U_* семейство. Получили противоречие с теоремой Монтеля (см. [2, с. 71]), согласно которой семейство $\mathcal{F}$ нормальным в U_* быть не может, так как функция g в нуле имеет существенную особенность. Следовательно, целая функция f в бесконечности имеет полюс и, значит, является многочленом.

Рассмотрим теперь случай $n > 1$.

Из условия (2) и сказанного выше следует, что сужение f на любую комплексную прямую l_ξ является многочленом. Если $f(0) = 0$, то найдется комплексная прямая l_ζ такая, что многочлен $f(l_\zeta(\lambda))$ тождественно равен 0, и тогда его степень не определена. Чтобы этого не произошло в случае, когда $f(0) = 0$, вместо функции f рассмотрим функцию $f - 1$. Функция $f - 1$ также удовлетворяет условию (2), это следует из определения радиальной производной и элементарных неравенств

$$\frac{1}{3} < \frac{1 + |f - 1|^2}{1 + |f|^2} < 3.$$

(Правое неравенство следует из того, что $1 + |f - 1|^2 \leq 1 + |f|^2 + 2|f| + 1 < 3(1 + |f|^2)$, а левое получается из правого заменой f на $1 - f$.) Поэтому с самого начала можем считать, что $f(0) \neq 0$.

Положим $E_m = \{\xi \in S : f(l_\xi(\lambda)) \text{ – многочлен степени не выше } m\}$, $m = 1, 2, \dots$.

Покажем, что множества E_m замкнуты в S . Пусть $\{\xi_k\}$ – последовательность точек из E_m , сходящаяся к точке $\xi \in S$. Многочлены $f(l_{\xi_k}(\lambda))$ имеют степени не выше m и равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$ сходятся к функции $f(l_\xi(\lambda))$. Отсюда и из теоремы Вейерштрасса (см., например, [3, с. 34]) следует, что $f(l_\xi(\lambda))$ является

многочленом степени не выше m ; следовательно, по определению множества E_m точка $\xi \in E_m$ и, значит, множество E_m замкнуто в S .

Очевидно, что

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Но по теореме Бэра S нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, поэтому для некоторого N множество E_N содержит непустое открытое множество $S_1 \subset S$. Поэтому найдется некоторый круговой конус K , на котором f есть многочлен степени не выше N . Отсюда и из теоремы единственности в $\mathbb{C}^n$ заключаем, что f является многочленом в $\mathbb{C}^n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.
- [2] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [3] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 2. М.: Наука, 1976.

Институт математики АН Молдовы, г. Кишинев
E-mail: 15dovb@matem.moldova.su

Поступило
05.01.97