Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Павлов, Целые функции, аналитическое продолжение
и дробные доли линейной функции, *Матем. заметки*, 1999,
том 66, выпуск 4, 540–550

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3987>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:48:37

УДК 517.5

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ДРОБНЫЕ ДОЛИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

А. И. Павлов

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА. Пусть целая функция $G(z)$ удовлетворяет условиям:

- 1) тейлоровские коэффициенты функции $G(z)$ неотрицательны;
- 2) для некоторых фиксированных $C > 0$ и $A > 0$ при $|z| > R_0$ выполнено

$$|G(z)| < \exp\left(C \frac{|z|}{\ln^A |z|}\right).$$

Пусть далее для некоторого фиксированного $\alpha > 0$ отклонение D_N последовательности $x_n = \{\alpha n\}$, $n = 1, 2, \dots$, при $N \rightarrow \infty$ имеет оценку $D_N = O(\ln^B N/N)$. Тогда если функция $G(z)$ не является тождественной постоянной и выполняется неравенство $B+1 < A$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} G([\alpha n])z^n$, сходящийся в круге $|z| < 1$, не может быть аналитически продолжен в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$.

Библиография: 8 названий.

Введение. В 1899 году Вигерт доказал [1] следующее утверждение. Пусть $G(z)$ – целая функция первого порядка минимального типа, т.е. для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует R_0 такое, что при $|z| > R_0$ выполняется неравенство $|G(z)| < \exp(\varepsilon|z|)$. Тогда если $G(z) \not\equiv 0$, то степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n)z^n$, сходящийся в круге $|z| < 1$, аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного z , кроме точки $z = 1$, которая для функции $f(z)$ является либо полюсом, либо существенно особой точкой.

В работе [2] автор построил класс пар (G, M) целых функций $G(z)$ и множеств M натуральных чисел таких, что степенной ряд $\sum_{m \in M} G(m)z^m$, сходящийся в круге $|z| < 1$, не может быть аналитически продолжен в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$. В частности, в работе [2] доказано следующее утверждение. Пусть целое $k \geq 2$ и $G(z)$ – целая трансцендентная функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) тейлоровские коэффициенты функции $G(z)$ неотрицательны;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00580.

- 2) функция $G(z)$ имеет порядок $\sigma < 1 - 1/k$ и нормальный тип, т.е. если $M(R) = \max_{|z|=R} |G(z)|$, то

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln M(R)}{R^\sigma} < \infty.$$

Тогда если M – множество всех натуральных чисел без k -х степеней, то степенной ряд $\sum_{m \in M} G(m)z^m$, сходящийся в круге $|z| < 1$, имеет окружность $|z| = 1$ своей границей аналитичности.

В 1921 году Гекке [3] доказал теорему: если α – действительное иррациональное число, то степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha n] z^n$, сходящийся в круге $|z| < 1$, не может быть продолжен аналитически в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$. Здесь и далее $[x]$ – целая часть действительного числа x , т.е. наибольшее среди тех целых m , для которых выполняется неравенство $m \leq x$.

В 1962 году Шварц [4] методом Гекке доказал аналогичное утверждение для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} P([\alpha n]) z^n$, где $P(z)$ – произвольный многочлен положительной степени.

В 1965 году американские математики Кэрролл и Кемпермен [5] доказали аналитическую непродолжаемость в область $|z| > 1$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} G([\alpha n]) z^n$, где α – действительное иррациональное число, а

$$G(z) = \sum_{\nu=1}^k C_\nu (\ln z)^{\rho_\nu} z^{\sigma_\nu} \exp(d_\nu z^{\tau_\nu}),$$

где $\rho_\nu, \sigma_\nu, d_\nu$ и τ_ν – действительные постоянные, $\tau_\nu < 1$, C_ν – любые комплексные числа.

Прежде чем формулировать основные результаты работы, напомним одно определение. Пусть $x_n, n = 1, 2, \dots$, – произвольная последовательность действительных чисел с условием $0 \leq x_n < 1$. Тогда если

$$V(\gamma, N) = \sum_{\substack{n \leq N \\ x_n < \gamma}} 1, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

то по определению *отклонением последовательности x_n* называется набор чисел

$$D_N = \sup_{0 \leq \gamma < 1} \left| \frac{V(\gamma, N)}{N} - \gamma \right|, \quad N \geq 1.$$

В работе будут доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА. Пусть целая функция $G(z)$ удовлетворяет условиям:

- 1) тейлоровские коэффициенты функции $G(z)$ неотрицательны;
- 2) существуют постоянные $C_0 > 0$ и $A > 0$ такие, что

$$|G(z)| < \exp \left(C_0 \frac{|z|}{\ln^A |z|} \right), \quad |z| > R_0.$$

Пусть далее фиксированное $\alpha \in (0, 1)$ и D_N – отклонение последовательности $x_n = \{\alpha n\}$, где $\{t\}$ – дробная часть числа t . Тогда если

$$D_N = O\left(\frac{\ln^B N}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где постоянная $B \geq 1$, причем $B + 1 < A$, и $G(z) \not\equiv C$, то степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} G([\alpha n])z^n$, сходящийся в круге $|z| < 1$, не может быть аналитически продолжен в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если положительное число α при разложении в цепную дробь имеет ограниченные неполные частные и целая функция $G(z)$ удовлетворяет условиям теоремы с постоянной $A > 2$, то имеет место утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если целая функция $G(z)$ удовлетворяет условиям теоремы с постоянной $A > 3$, то для почти всех $\alpha \in (0, 1)$ по мере Лебега выполняется утверждение теоремы.

Прежде чем приступить к доказательству сформулированных утверждений, сделаем два замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $G(z)$ – многочлен, то требование неотрицательности коэффициентов этого многочлена можно отбросить.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если α является рациональным числом $\alpha = a/q$, где целые a и q удовлетворяют условиям $1 \leq a \leq q - 1$ и $(a, q) = 1$, и $G(z)$ – произвольная целая функция первого порядка минимального типа, то, как нетрудно доказать, при условии $G(z) \not\equiv C$ степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G([\alpha n])z^n$, сходящийся в круге $|z| < 1$, может быть аналитически продолжен на всю комплексную плоскость, кроме точек $z_k = e^{2\pi i k/q}$, $k = 1, 2, \dots, q$, каждая из которых для функции $f(z)$ является изолированной особой точкой однозначного характера.

1. Леммы.

ЛЕММА 1. Если целая функция

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

удовлетворяет условию

$$|G(z)| < \exp\left(C \frac{|z|}{\ln^A |z|}\right),$$

где C и A – положительные постоянные, $|z| > R_0$, и если

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}},$$

то при

$$M(R) = \max_{|z|=R} \left| g\left(\frac{1}{z}\right) \right|$$

выполняется оценка $\ln \ln M(R) = O(R^{1/A})$, $R \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [6], что для любого $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ выполняется равенство

$$g(z) = \int_0^\infty G(te^{-i\varphi_0}) \exp(-zte^{-i\varphi_0} - i\varphi_0) dt.$$

Поэтому если $\varphi_0 = \arg z$ и $|z| = 1/R$, то

$$g\left(\frac{e^{i\varphi}}{R}\right) = \int_0^\infty G(te^{-i\varphi_0}) \exp\left(-\frac{t}{R} - i\varphi_0\right) dt,$$

или

$$M(R) = O\left(\int_0^\infty \exp\left(C\frac{t}{\ln^A t} - \frac{t}{R}\right) dt\right).$$

Пусть t_R определено так, что при $t \geq t_R$ выполняется неравенство

$$C\frac{t}{\ln^A t} - \frac{t}{R} < -\frac{t}{2R}.$$

Тогда

$$M(R) = O\left(\int_0^{t_R} \exp\left(\frac{Ct}{\ln^A t}\right) dt + \int_{t_R}^\infty \exp\left(-\frac{t}{2R}\right) dt\right) = O\left(t_R \exp\left(\frac{Ct_R}{\ln^A t_R}\right) + 2R\right).$$

Легко видеть, что $t_R = \exp((2CR)^{1/A})$. Значит, $\ln \ln M(R) = O(R^{1/A})$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2 (Коксма [7]). Пусть D_N – отклонение последовательности $\{\alpha n\}$, $n = 1, 2, \dots$, и $f(x)$ – комплекснозначная функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\sum_{n=1}^N f(\{\alpha n\}) - N \int_0^1 f(x) dx = O\left(ND_N \int_0^1 |f'(x)| dx\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 3. Пусть

$$S(R) = \int_{|t|=\rho} \frac{|1 - re^{\alpha t}|}{1 - re^{\alpha \operatorname{Re} t}} dt,$$

где

$$0 < r < 1, \quad \frac{1}{R} = \ln \frac{1}{r}, \quad \rho = \frac{1}{\alpha R} \left(1 - \frac{1}{T(R)}\right),$$

$T(R)$ – произвольная непрерывная возрастающая функция от R с условием

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T(R) = \infty.$$

Тогда

$$S(R) = O\left(\frac{\ln T(R)}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f_0(\varphi) = \frac{|1 - r \exp(\alpha \rho e^{i\varphi})|}{1 - r \exp(\alpha \rho \cos \varphi)}.$$

Тогда

$$f_0(\varphi) = \frac{|1 - \exp(\alpha \rho e^{i\varphi} - 1/R)|}{1 - \exp(\alpha \rho \cos \varphi - 1/R)}.$$

Ясно, что при $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1 - \exp\left(\alpha \rho e^{i\varphi} - \frac{1}{R}\right) &= 1 - \exp\left(\alpha \rho \cos \varphi - \frac{1}{R}\right) (\cos(\alpha \rho \sin \varphi) + i \sin(\alpha \rho \sin \varphi)) \\ &= 1 - \exp\left(\alpha \rho \cos \varphi - \frac{1}{R}\right) \left(1 + O\left(\frac{\sin^2 \varphi}{R^2}\right)\right) + O\left(\frac{|\sin \varphi|}{R}\right) \\ &= 1 - \exp\left(\alpha \rho \cos \varphi - \frac{1}{R}\right) + O\left(\frac{|\sin \varphi|}{R}\right). \end{aligned}$$

Если $x \rightarrow 0$, то $1 - e^{-x} = x + O(x^2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} 1 - \exp\left(\alpha \rho \cos \varphi - \frac{1}{R}\right) &= \frac{1}{R} - \alpha \rho \cos \varphi + O\left(\left(\frac{1}{R} - \alpha \rho \cos \varphi\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{R} \left(2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\cos \varphi}{T(R)}\right) + O\left(R^{-2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{T(R)}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_0 = \varphi_0(R) = (\ln T(R))^{-1/2}$. Тогда если $|\varphi| \leq \varphi_0$, то при $R \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= 1 + \frac{O(|\sin \varphi|)}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\cos \varphi}{T(R)} + O(R^{-1}(\sin^4 \frac{\varphi}{2} + (T(R))^{-2}))} \\ &= 1 + O\left(\frac{|\sin \varphi|}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + (T(R))^{-1}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_0(\varphi) d\varphi &= O\left(\varphi_0 + \int_0^{\varphi_0} \frac{\varphi T(R) d\varphi}{\varphi^2 T(R) + 1}\right) \\ &= O((\ln T(R))^{-1/2} + \ln(1 + \varphi_0^2 T(R))) = O(\ln T(R)), \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi$, то

$$f_0(\varphi) = 1 + O\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - (T(R))^{-1}}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - (T(R))^{-1}}\right) = O(\varphi_0^{-2}).$$

Поэтому

$$\int_{\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi} f_0(\varphi) d\varphi = O(\varphi_0^{-2}) = O(\ln T(R)), \quad R \rightarrow \infty.$$

Лемма 3 доказана, так как

$$S(R) = O\left(R^{-1} \int_0^{2\pi} f_0(\varphi) d\varphi\right).$$

ЛЕММА 4. Пусть

$$\psi(r, t) = \frac{g(t)(1 - e^{-t})}{(2\pi i m - t)(1 - r e^{\alpha t})},$$

где $g(t)$ — функция из леммы 1, целое $m \neq 0$ и

$$\rho = \frac{1}{\alpha R} \left(1 - \frac{1}{T(R)} \right) \quad R = \ln \frac{1}{r}, \quad T(R) = (\ln M(R))^C,$$

постоянная $C > 0$, $0 < r < 1$, $0 < \alpha < 1$,

$$M(R) = \max_{|t|=R} \left| g\left(\frac{1}{t}\right) \right|.$$

Тогда при $r \rightarrow 1$ выполняется равенство

$$I(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \psi(r, t) dt = \frac{1-r}{2\pi i \alpha^2 m} g\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r}\right) (1 + O(1-r)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$. Так как функция $\psi(r, t)$ в кольце $\rho < |t| < 1$ имеет только одну особую точку $t = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r}$, являющуюся простым полюсом, то по теореме Коши

$$I(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi(r, t) dt - \operatorname{res} \left(\psi(r, t), \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r} \right).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left(\psi(r, t), \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1 - \exp(-\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r})}{\alpha(2\pi i m - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r})} g\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r}\right) \\ &= -\frac{1-r}{2\pi i \alpha^2 m} g\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r}\right) (1 + O(1-r)). \end{aligned}$$

Покажем, что при $r \rightarrow 1$ выполняется равенство

$$\int_{\Gamma} \psi(r, t) dt = O(1).$$

Действительно, если $|t| = 1$, то при $r \rightarrow 1$ получим

$$\frac{(1 - e^{-t})g(t)}{2\pi i m - t} = O(1).$$

Далее, функция $1 - r e^{\alpha t}$ имеет нули в точках

$$t_k = \frac{1}{\alpha} \left(\ln \frac{1}{r} + 2k\pi i \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поэтому при $|t| = 1$ получим

$$\lim_{r \rightarrow 1} |1 - r e^{\alpha t}| > 0.$$

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5 [8]. Пусть функции $V(x)$ и $\mu(x)$ определены на интервале $(0, \infty)$, непрерывны, положительны, возрастают и

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\mu(x)} < \infty.$$

Тогда для любого фиксированного $h > 0$ множество

$$E_h = \left\{ x : V\left(x + \frac{1}{\mu(V(x))}\right) > h + V(x) \right\}$$

имеет конечную меру.

ЛЕММА 6. Если $f(z)$ — целая функция и

$$M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянная $C > 0$ и последовательность R_k , $k = 1, 2, \dots$, действительных чисел такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty$$

и выполняется неравенство

$$M\left(R_k + \frac{R_k}{(\ln M(R_k))^{1+\varepsilon}}\right) < CM(R_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\ln M(e^x) = V(x)$, то согласно лемме 5 для любых фиксированных $\beta > 1$ и $h > 0$ существуют действительные x_k такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty \quad \text{и} \quad V\left(x_k + \frac{1}{(V(x_k))^\beta}\right) < h + V(x_k).$$

Следовательно,

$$\ln M\left(\exp\left(x_k + \frac{1}{(\ln M(e^{x_k}))^\beta}\right)\right) < h + \ln M(e^{x_k}).$$

Пусть $R_k = e^{x_k}$ и $\beta = 1 + \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \ln M\left(R_k + \frac{R_k}{(\ln M(R_k))^{1+\varepsilon}}\right) &< \ln M\left(R_k \exp\left(\frac{1}{(\ln M(R_k))^{1+\varepsilon}}\right)\right) \\ &= \ln M\left(\exp\left(x_k + \frac{1}{(\ln M(e^{x_k}))^{1+\varepsilon}}\right)\right) < h + \ln M(R_k). \end{aligned}$$

Поэтому

$$M\left(R_k + \frac{R_k}{(\ln M(R_k))^{1+\varepsilon}}\right) < CM(R_k), \quad C = e^h.$$

Лемма 6 доказана.

2. Доказательства теоремы и следствий. Если

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}},$$

то, как известно [6], при любом фиксированном $\rho > 0$

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} g(t) e^{zt} dt.$$

Следовательно, если $|z| < 1$ и

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(\alpha n) z^n, \quad F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G([\alpha n]) z^n,$$

то при $F(z) = F_1(z) - F_2(z)$ выполняется равенство

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} g(t) \Phi(z, t) dt, \quad (2)$$

где

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-t\{\alpha n\}}) (ze^{\alpha t})^n.$$

Пусть ρ настолько мало, что $|ze^{\alpha t}| = |z|e^{\alpha \operatorname{Re} t} < 1$ и $z = re^{2\pi i \alpha m}$, где целое $m \neq 0$ фиксировано, $0 < r < 1$. Согласно теореме Вигерта существует целая функция $F_0(z)$ такая, что выполняется равенство

$$F_1(z) = F_0\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно обосновать, что при любом фиксированном целом $m \neq 0$ имеет место асимптотика

$$F(re^{2\pi i \alpha m}) \sim \frac{1-r}{2\pi i \alpha^2 m} g\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow 1. \quad (3)$$

Пусть для комплексного t и целого $N \geq 0$

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^N (1 - e^{-t\{\alpha n\}}) e^{2\pi i \alpha m n}. \quad (4)$$

Тогда

$$\Phi(re^{2\pi i \alpha m}) = (1 - re^{\alpha t}) \sum_{N=0}^{\infty} S_N(t) (re^{\alpha t})^N. \quad (5)$$

Далее, если $f(x, t) = (1 - e^{-tx})e^{2\pi imx}$, где $0 \leq x \leq 1$, то согласно лемме 2

$$\sum_{n=0}^N f(\{\alpha n\}, t) - N \int_0^1 f(x, t) dx = O\left(N D_N \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx\right).$$

Так как для любого целого $m \neq 0$ выполняется равенство

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \frac{1 - e^{-t}}{2\pi im - t}$$

и равномерно по $x \in [0, 1]$ при $|t| \leq \rho$ имеет место оценка $\partial f / \partial x = O(|t|)$, то согласно (4)

$$S_N(t) = N \frac{1 - e^{-t}}{2\pi im - t} + O(|t| N D_N).$$

Следовательно, пользуясь условием (1) теоремы, из (5) получим

$$\begin{aligned} \Phi(re^{2\pi i \alpha m}) &= \frac{(1 - re^{\alpha t})(1 - e^{-t})}{2\pi im - t} \sum_{N=1}^{\infty} N(re^{\alpha t})^N \\ &\quad + O\left(|t|(1 - re^{\alpha t}) \sum_{N=1}^{\infty} \ln^B N(re^{\alpha t})^N\right) \\ &= \frac{1 - e^{-t}}{(2\pi im - t)(1 - re^{\alpha t})} \\ &\quad + O\left(\frac{|1 - e^{-t}|}{|2\pi im - t|} + |t| \cdot |1 - re^{\alpha t}| \sum_{N=1}^{\infty} \ln^B N(r|e^{\alpha t}|)^N\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Легко видеть, что при фиксированном $B > 0$ и $r \rightarrow 1$

$$\sum_{N=1}^{\infty} \ln^B N(r|e^{\alpha t}|)^N = O\left(\frac{1}{1 - re^{\alpha \operatorname{Re} t}} \ln^B \frac{1}{1 - re^{\alpha \operatorname{Re} t}}\right). \quad (7)$$

Пусть

$$M(R) = \max_{|z|=R} \left| g\left(\frac{1}{z}\right) \right|, \quad \rho = \frac{1}{\alpha R} \left(1 - \frac{1}{\ln^C M(R)}\right), \quad \frac{1}{R} = \ln \frac{1}{r}, \quad 0 < r < 1,$$

где $C > 1$ и фиксировано. Тогда при $\rho = |t|$ получим

$$1 - re^{\alpha \operatorname{Re} t} \geq 1 - re^{\alpha \rho} = 1 - \exp(-(R \ln^C M(R))^{-1}) > \frac{1}{2} (R \ln^C M(R))^{-1}.$$

Значит,

$$\ln \frac{1}{1 - re^{\alpha \operatorname{Re} t}} = O(\ln \ln M(R)), \quad R \rightarrow \infty.$$

Следовательно, согласно (7)

$$\sum_{N=1}^{\infty} \ln^B N (re^{\alpha \operatorname{Re} t})^N = O\left(\frac{(\ln \ln M(R))^B}{1 - re^{\alpha \operatorname{Re} t}}\right). \quad (8)$$

Пользуясь (6) и (8), получим

$$\Phi(re^{2\pi i \alpha m}) = \frac{1 - e^{-t}}{(2\pi i m - t)(1 - re^{\alpha t})} + O\left(|t| + |t| \frac{|1 - re^{\alpha t}|}{1 - re^{\alpha \operatorname{Re} t}} (\ln \ln M(R))^B\right).$$

Подставляя полученное равенство в (2), согласно лемме 3 имеем

$$F(re^{2\pi i \alpha m}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{g(t)(1 - e^{-t})}{(2\pi i m - t)(1 - re^{\alpha t})} dt + O\left(\rho^2 M\left(\frac{1}{\rho}\right) (\ln \ln M(R))^{B+1}\right). \quad (9)$$

Согласно лемме 4 при $r \rightarrow 1$

$$I(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{g(t)(1 - e^{-t})}{(2\pi i m - t)(1 - re^{\alpha t})} dt \sim \frac{1 - r}{2\pi i \alpha^2 m} g\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r}\right). \quad (10)$$

Так как тейлоровские коэффициенты функции $g(z)$ неотрицательны, то

$$g\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r}\right) = M(\alpha R).$$

Таким образом, из (10) следует асимптотика

$$I(r) \sim \frac{1 - r}{2\pi i \alpha^2 m} M(\alpha R), \quad r \rightarrow 1. \quad (11)$$

Согласно выбору ρ имеем

$$M\left(\frac{1}{\rho}\right) = O\left(M\left(\alpha R + \frac{2\alpha R}{\ln^C M(R)}\right)\right).$$

Значит, согласно лемме 2 из (9) и (11) получим

$$F(re^{2\pi i \alpha m}) = (1 + o(1)) \frac{1 - r}{2\pi i \alpha^2 m} + O\left(R^{(B+1)/A-2} M\left(\alpha R + \frac{2\alpha R}{\ln^C M(R)}\right)\right). \quad (12)$$

Напомним, что при $r \rightarrow 1$ имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r} \sim \frac{1 - r}{\alpha}.$$

Согласно лемме 5 существует последовательность R_k , $k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty \quad \text{и} \quad M\left(\alpha R_k + \frac{2\alpha R_k}{\ln^C M(R_k)}\right) = O(M(\alpha R_k)), \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, пользуясь неравенством $B + 1 < A$ и равенством (12), получим

$$F(re^{2\pi i \alpha m}) = \frac{1 + o(1)}{2\pi i \alpha^2 m R_k} M(\alpha R_k) + O(R_k^{(B+1)/A-2} M(\alpha R_k)) \sim \frac{M(\alpha R_k)}{2\pi i \alpha^2 m R_k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Из условия $G(z) \notin C$ следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(\alpha R_k) = \infty.$$

Значит, равенство (3), а вместе с ним и теорема доказаны.

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что если положительное α при разложении в цепную дробь имеет ограниченные неполные частные, то отклонение D_N последовательности $x_n = \{\alpha n\}$, $n = 1, 2, \dots$, при $N \rightarrow \infty$ имеет оценку $D_N = O(\ln N/N)$. Аналогично, для доказательства следствия 2 достаточно заметить, что для почти всех $\alpha \in [0, 1]$ отклонение D_N указанной последовательности при $N \rightarrow \infty$ имеет оценку $D_N = O(\ln^{2+\varepsilon} N/N)$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wigert S. Sur les fonction entières // Oefversigt af K. Vet. Ak. Forh. 1900. V. 57. P. 1001–1011.
- [2] Павлов А. И. О некоторых классах степенных рядов, аналитически непродолжимых за свой круг сходимости // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 4. С. 119–136.
- [3] Hecke E. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1922. V. 1. P. 54–76.
- [4] Schwarz W. Irrationale Potenzreihen // Arch. Math. (Basel). 1962. V. 13. № 1–3. P. 228–240.
- [5] Caroll F. W., Kempermen J. H. Noncontinuable analytic functions // Duke Math. J. 1965. V. 32. P. 65–84.
- [6] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.
- [7] Koksma J. F. Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo 1 // Mathematika B (Zutphen). 1942–43. V. 11. P. 7–11.
- [8] Kovari T. A gap-theorem for entire function of infinite order // Michigan Math. J. 1965. V. 12. P. 133–140.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
03.12.98