Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пчелинцев, Многообразия разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над полем характеристики 3, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 556–566

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:37:50

УДК 512.554.5

МНОГООБРАЗИЯ РАЗРЕШИМЫХ ИНДЕКСА 2 АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 3

С. В. Пчелинцев

Изучаются подмногообразия многообразия Alt_2 разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над произвольным полем характеристики 3. На языке тождеств выделены основные типы таких многообразий и установлены включения между ними. Основным результатом является

ТЕОРЕМА. *Топологический ранг многообразия Alt_2 разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над произвольным полем характеристики 3 равен 5.*

Библиография: 6 названий.

Целью данной заметки является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Топологический ранг многообразия Alt_2 разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над произвольным полем характеристики 3 равен 5.*

Известно [1], что многообразие Alt_2 над полем характеристики, отличной от 2 и 3, имеет два ненильпотентных подмногообразия. Отсюда, в частности, вытекает, что топологический ранг многообразия Alt_2 равен 2. Анализ доказательств показывает, что эти результаты справедливы и в случае поля характеристики 2.

Напомним, что из теоремы Ю. А. Медведева [2] о шпехтовости многообразия алгебр, удовлетворяющих двучленному тождеству, вытекает шпехтовость многообразий разрешимых индекса 2 алгебр, близких к ассоциативным, в частности, многообразия Alt_2 . Строение решетки подмногообразий многообразия Alt_2 над полем характеристики 0, в котором разрешимо уравнение $t^2 + t + 1 = 0$, описано А. В. Ильяковым [3].

Данная работа состоит из трех параграфов. В § 1 приведены основные определения и доказаны предварительные результаты. В § 2 выделены основные типы подмногообразий в Alt_2 и доказана оценка сверху для топологического ранга. Последний § 3 посвящен построению необходимых примеров, существование которых дает оценку снизу для топологического ранга.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00785.

§ 1. Предварительные результаты

1. Пространство полилинейных многочленов. Термин “алгебра” будет означать в дальнейшем, если не оговорено противное, разрешимую индекса 2 альтернативную алгебру над произвольным полем Φ характеристики 3.

Заметим, что поскольку в разрешимой индекса 2 альтернативной алгебре всякий одноклен, имеющий по некоторой переменной степень не меньшую 3, нулевой, то любое многообразие разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр определяется однородными тождествами степени не выше 2 по каждой переменной и, следовательно, является однородным [4]. Поскольку характеристика поля равна 3, то всякое многообразие разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр может быть задано некоторой системой полилинейных тождеств (многочленов); причем будем считать, не оговаривая этого специально, что каждое тождество степени n зависит от переменных из множества $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Пусть M – произвольное многообразие разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр; $A = F_M[X]$ – свободная M -алгебра с множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ свободных порождающих.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. *Правильными словами* алгебры A от переменных из множества X_n ($n \geq 4$) называются полилинейные одночлены:

- а) $(x_1 x_j)R(k_1) \cdots R(k_{n-2}), k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-2}$;
- б) $(x_j x_1)R(k_1) \cdots R(k_{n-2}), k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-2}$;
- в) $(x_2 x_3)R(1) \cdots R(n)$;

где $R(k)$ – оператор правого умножения на элемент x_k .

Регулярным словом алгебры A от переменных из X_n называется слово

- г) $(x_3(x_1 x_2))R(4) \cdots R(n)$.

ЛЕММА 1 [1]. *Пространство $P_n(A)$ полилинейных одночленов над X_n линейно порождается правильными и регулярными словами алгебры A .*

Введем вспомогательные функции, кососимметрические по y, z :

$$\{x, y, z\} = (x \circ y)z - (x \circ z)y - (x, y, z), \quad [x, y, z] = [x, y]z - [x, z]y,$$

где $x \circ y = xy + yx$ и $[x, y] = xy - yx$ – йорданово произведение и коммутатор соответственно.

Нам потребуется некоторая модификация системы правильных и регулярных слов, которая также порождает пространство $P_n(A)$.

ЛЕММА 2. *Пространство $P_n(A)$ ($n \geq 4$) линейно порождается элементами вида, которые в дальнейшем называются базисными словами:*

- 1) $(x_1 \circ x_i)\rho_i, i \geq 4$;
- 2) $[x_1, x_i]\rho_i, i \geq 4$;
- 3) $(x_1 \circ x_2)\rho_2$;
- 4) $[x_1, x_2]\rho_2$;
- 5) $\{x_1, x_2, x_3\}\eta$;
- 6) $[x_1, x_2, x_3]\eta$;
- 7) $(x_1, x_2, x_3)\eta$;
- 8) $[x_1, [x_2, x_3]]\eta$;

где $\rho_i = R(2) \cdots R^\wedge(i) \cdots R(n)$ – операторное слово, в котором отсутствует оператор $R(i)$, $\eta = R(4)R(5) \cdots R(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения йорданова произведения и коммутатора над полем характеристики 3 вытекает равенство $xy = 2x \circ y + 2[x, y]$, следовательно, правильные слова типа а) и б) при $j \neq 3$ представимы в виде линейной комбинации слов типа 1) и 2). Обозначим через V пространство, порожденное элементами типа 3)–8) над X_4 ; а для многочленов x, y над X_3 будем писать $x \equiv y$, если $(x - y)R(4) \in V$.

Ясно, что

$$(x_2x_1)x_3 \equiv (x_1x_2)x_3 \equiv 0. \quad (1)$$

Из определения функций $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $[x_1, x_2, x_3]$ имеем

$$(x_1 \circ x_3)x_2 = (x_1 \circ x_2)x_3 - \{x_1, x_2, x_3\} - (x_1, x_2, x_3), \quad [x_1, x_3]x_2 = [x_1, x_2]x_3 - [x_1, x_2, x_3],$$

т.е.

$$(x_3x_1)x_2 \equiv (x_1x_3)x_2 \equiv 0. \quad (2)$$

Таким образом, из сравнений (1), (2) и замечания, сделанного в самом начале доказательства, вытекает, что все правильные слова типа а) и б) представимы в виде линейной комбинации базисных слов. Значит, в силу леммы 1 достаточно проверить, что справедливы сравнения $v := (x_2x_3)x_1 \equiv 0$, $w := x_3(x_1x_2) \equiv 0$.

Применяя сравнения (1), (2) и кососимметричность ассоциатора по всем переменным, получаем

$$w = x_3(x_1x_2) = (x_3x_1)x_2 - (x_3, x_1, x_2) = (x_3x_1)x_2 - (x_1, x_2, x_3) \equiv 0;$$

аналогично,

$$x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3 - (x_1, x_2, x_3) \equiv 0, \quad (3)$$

$$x_1(x_3x_2) = (x_1x_3)x_2 - (x_1, x_3, x_2) \equiv 0. \quad (4)$$

Итак, осталось проверить, что $v \equiv 0$. Ввиду (3) имеем

$$\begin{aligned} v &= (x_2x_3)x_1 = [x_2x_3, x_1] + x_1(x_2x_3) \equiv [x_2x_3, x_1] \\ &= 2[[x_2, x_3], x_1] + 2[x_2 \circ x_3, x_1] \equiv 2[x_2 \circ x_3, x_1], \end{aligned}$$

т.е.

$$v \equiv 2[x_2 \circ x_3, x_1]. \quad (5)$$

Поскольку в разрешимой индекса 2 альтернативной алгебре справедливо тождество

$$\{(x_2 \circ x_3)x_1 + (x_3 \circ x_1)x_2 + (x_1 \circ x_2)x_3\}x_4 = 0, \quad (6)$$

получаем ввиду (3), (4), (6), (1), (2)

$$[x_2 \circ x_3, x_1] = (x_2 \circ x_3)x_1 - x_1(x_2 \circ x_3) \equiv (x_2 \circ x_3)x_1 \equiv -(x_3 \circ x_1)x_2 - (x_1 \circ x_2)x_3 \equiv 0.$$

Сопоставляя последнее сравнение с (5), получаем $v \equiv 0$.

2. Свойства функций $\{x, y, z\}, [x, y, z]$.

ЛЕММА 3. В алгебре A справедливы соотношения:

- а) $\{x, x, y\} \in \text{Ann } A$;
- б) $[x, x, y] = [x^2, y] - [x, [x, y]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем на основании (6)

$$\begin{aligned}\{x, x, y\}z &= \{(x \circ x)y - (x \circ y)x\}z = \{-2(x \circ y)x - (x \circ y)x\}z = \{-3(x \circ y)x\}z = 0, \\ [x, x, y] &= [x, x]y - [x, y]x = 2[x, y]x = [x, y] \circ x + [[x, y], x] = [x^2, y] + [[x, y], x].\end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Пусть $w \in A^2$. Тогда в алгебре A справедливы равенства:

- а) $[[w, y], z] = 0$;
- б) $\{w, y, z\} = [w, y]z$;
- в) $[w, y, z] = 2[w, y]z$;
- г) $\{x, y, w\} = [x, y, w] = [w, x]y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу тождеств альтернативности и центрального тождества Муфанг $(ab)(ca) = a(bc)a$ верно равенство $wT(x)T(x) = 0$, в частности, функция $wT(x)T(y)$ кососимметрическая по переменным x и y . Тогда, используя это свойство, последовательно получаем:

- а)
$$\begin{aligned}[[w, x], y] &= (wx - xw)y - y(wx - xw) \equiv (wx)y + (yw)x - y(wx) + y(xw) \\ &\equiv (w, x, y) + (y, w, x) - (y, x, w) = 3(w, x, y) = 0,\end{aligned}$$
- б)
$$\begin{aligned}\{w, y, z\} &= (w \circ y)z - (w \circ z)y - (w, y, z) = 2(w \circ y)z - (w, y, z) \\ &= (2wy + 2yw - wy)z = (wy - yw)z = [w, y]z,\end{aligned}$$
- в)
$$[w, y, z] = [w, y]z - [w, z]y = 2[w, y]z,$$
- г)
$$\begin{aligned}\{x, y, w\} &= (x \circ y)w - (x \circ w)y - (x, y, w) = 2(w \circ x)y - (w, x, y) \\ &= (2wx + 2xw - wx)y = (wx - xw)y = [w, x]y, \\ [x, y, w] &= [x, y]w - [x, w]y = -[x, w]y = [w, x]y.\end{aligned}$$

§ 2. Оценка топологического ранга сверху**1. Основные тождества разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр.**

В дальнейших рассмотрениях принципиальную роль играют следующие тождества и определяемые ими многообразия, обозначение которых указано в скобках:

- а) тождество центральной коммутативности степени n

$$(\mathbf{ZC}_n) \quad [[x_2, x_3], x_1]R(4)R(5) \cdots R(n);$$

- б) тождество центральной антикоммутативности степени n

$$(\mathbf{ZA}_n) \quad [x_1 \circ x_2, x_3]R(4)R(5) \cdots R(n);$$

- в) тождество коммутативности степени n

$$(\mathbf{Com}_n) \quad [x_1, x_2]R(3)R(4) \cdots R(n);$$

- г) тождество антикоммутативности степени n

$$(\mathbf{AC}_n) \quad (x_1 \circ x_2)R(3)R(4) \cdots R(n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку антикоммутативная альтернативная алгебра нильпотентна, йорданово произведение в тождествах $(\mathbf{ZA}_n)$, $(\mathbf{AC}_n)$ можно заменить на обычное произведение, увеличив, если необходимо, число n .

Для произвольных элементов $a, b \in A^2$ будем писать

$$a \equiv b, \quad \text{если } (\exists n)(\forall t_1, \dots, t_{2n} \in X) \quad (a - b)R(t_1) \cdots R(t_{2n}) = 0.$$

Поскольку оператор $R(s)R(t)$ является центральным элементом в алгебре A^* умножений, действующих на идеале A^2 , то введенное отношение эквивалентности сохраняется при умножении обеих частей сравнения на произвольный элемент.

В дальнейшем нам потребуются следующие два тождества, выполняющиеся в произвольной альтернативной алгебре характеристики 3 (см., например, [4]):

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b, \quad (7)$$

$$(a \circ b) \circ c - (a \circ c) \circ b = [a, [b, c]] + 2(a, b, c). \quad (8)$$

ЛЕММА 5. Пусть алгебра A ненильпотентна и для любых $a, x \in A$, $w \in A^2$ справедливо сравнение

$$\alpha[x \circ w, a] + \beta(x \circ w)a \equiv 0. \quad (9)$$

Тогда $\beta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия вытекает $\alpha[[x \circ w, a], b] + \beta[(x \circ w)a, b] \equiv 0$. Отсюда в силу леммы 4 имеем $\beta[(x \circ w)a, b] \equiv 0$, значит согласно тождеству (7) $\beta[x \circ w, b]a \equiv 0$, или $\beta[x \circ w, b] \equiv 0$. Умножая сравнение (9) на β и учитывая $\beta[x \circ w, a] \equiv 0$, имеем сравнение $\beta^2(x \circ w)a \equiv 0$. Так как в силу тождества (8) сравнение $x \circ w \equiv 0$ влечет нильпотентность алгебры A , то $\beta = 0$.

ЛЕММА 6. Пусть свободная M -алгебра A удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i \geq 4} (\alpha_i x_1 \circ x_i + \beta_i [x_1, x_i]) \rho_i + f = 0, \quad (*)$$

где f – линейная комбинация базисных слов типа 3)–8) из леммы 2. Тогда

- а) если алгебра A ненильпотентна, то $\alpha_i = 0$;
- б) если алгебра A не является центрально антикоммутативной, то $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что хотя бы один из скаляров α_p, β_p отличен от 0 (при фиксированном p). Подставим $x_p = w \in A^2$ в тождество (*). Тогда в силу тождества разрешимости индекса 2 получим

$$\alpha_p(w \circ x) \equiv \beta_p[w, x]. \quad (10)$$

Утверждение а) следует из леммы 5.

Если же алгебра A не является центрально антикоммутативной, то она ненильпотентна, $\alpha_p = 0$. Но тогда из (10) следует $\beta_p = 0$.

2. Базис свободной разрешимой индекса 2 альтернативной алгебры. Напомним, что *базисными словами алгебры A типа 1)–8)* мы называем порождающую совокупность линейного пространства $P_n(A)$, указанную в лемме 2.

ЛЕММА 7. *Базисные слова свободной алгебры $A = F_M[X]$ степени $n \geq 4$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда многообразие M центрально коммутативно, т.е. $M \subseteq \mathbf{ZC} = \bigcup \mathbf{ZC}_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что базисные слова алгебры A степени $n \geq 4$ линейно зависимы и алгебра A не является центрально коммутативной. Тогда в алгебре A справедливо тождество $(*)$, которое в силу леммы 6 принимает вид

$$\alpha(x_1 \circ x_2)x_3 + \beta[x_1, x_2]x_3 + \gamma\{x_1, x_2, x_3\} + \delta[x_1, x_2, x_3] + \lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu[x_1, [x_2, x_3]] \equiv 0, \quad (**)$$

причем хотя бы один из скаляров в этом сравнении отличен от 0.

Полагая $x_3 = [[a, b], c]$, на основании леммы 4 получим $\lambda(x_1, x_2, [[a, b], c]) \equiv 0$, откуда $\lambda[[a, b], c] \equiv 0$. Поскольку алгебра A не является центрально коммутативной, то $\lambda = 0$. Следовательно, алгебра A удовлетворяет тождеству

$$\alpha(x_1 \circ x_2)x_3 + \beta[x_1, x_2]x_3 + \gamma\{x_1, x_2, x_3\} + \delta[x_1, x_2, x_3] + \mu[x_1, [x_2, x_3]] \equiv 0. \quad (11)$$

Полагая $x_3 = w \in A^2$ в тождестве (11), получим ввиду леммы 4 $(\gamma + \delta)[w, x_1]x_2 \equiv 0$, откуда $\gamma + \delta \equiv 0$. Тем самым, тождество (11) принимает вид

$$\alpha(x_1 \circ x_2)x_3 + \beta[x_1, x_2]x_3 + \gamma(\{x_1, x_2, x_3\} - [x_1, x_2, x_3]) + \mu[x_1, [x_2, x_3]] \equiv 0.$$

Пусть $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = y$. Тогда в силу леммы 3 имеем

$$2\alpha x^2 y - \gamma([x^2, y] - [x, [x, y]]) + \mu[x, [x, y]] \equiv 0.$$

Линеаризуем последнее тождество подстановкой $x \mapsto w$ и воспользуемся леммой 4:

$$2\alpha(x \circ w)y - \gamma[x \circ w, y] \equiv 0.$$

Отсюда в силу леммы 5 $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, а из (11) вытекает $\mu = 0$, поскольку было доказано, что все остальные скаляры в (11) нулевые.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из примера 1 (см. § 3 ниже) следует, что система базисных слов свободной разрешимой индекса 2 альтернативной алгебры образует аддитивный базис пространства полилинейных многочленов степени, не меньшей 4.

3. Заключительную часть этого параграфа посвятим получению оценок топологического ранга сверху.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливы неравенства:*

- 1) $r_t(\text{Alt}_2) \leq r_t(\mathbf{ZC}) + 1$;
- 2) $r_t(\mathbf{ZC}) \leq r_t(\mathbf{ZA}) + 1$, где $\mathbf{ZA} = \bigcup \mathbf{ZA}_i$;
- 3) $r_t(\mathbf{ZA}) \leq r_t(\mathbf{Com}) + 1$, где $\mathbf{Com} = \bigcup \mathbf{Com}_i$;
- 4) $r_t(\mathbf{Com}) \leq r_t(\mathbf{AC}) + 1$, где $\mathbf{AC} = \bigcup \mathbf{AC}_i$.

1) Лемма 7 может быть переформулирована на топологическом языке. Для этого напомним основные понятия [1], связанные с введением топологии на решетке $\wp(M)$ подмногообразий шпехтова многообразия M .

Пусть V – конечнобазированное многообразие, $V \subsetneq W$. *Размерностью* $\dim_W V$ многообразия V относительно W называется наименьшее число n , обладающее свойством: существует конечная система тождеств $f_1, \dots, f_s$, выделяющая V из W , т.е. $\langle f_1, \dots, f_s \rangle^T + T(W) = T(V)$, такая, что ни одно из тождеств этой системы не выполняется в W и $n = \max\{\deg f_1, \dots, \deg f_s\}$. Под *размерностью* $\dim V$ многообразия V понимается размерность V относительно многообразия всех алгебр.

Пусть M – шпехтово многообразие; $\Omega \subset \wp(M)$. Множество Ω называется *конечномерным*, если размерности всех многообразий из множества Ω ограничены в совокупности.

Для любого W из $\wp(M)$ введем множества

$$\mathring{U}_n(W) = \{V \subset W \mid \dim_W V \geq n\}, \quad U_n(W) = \mathring{U}_n(W) \cup \{W\}.$$

Считая систему множеств $\Sigma = \{U_n(W) \mid W \in \wp(M), n \in \mathbb{N}\}$ базой окрестностей, наделяем $\wp(M)$ некоторой топологией; пусть Ω является топологическим подпространством пространства $\wp(M)$. Поскольку M шпехтово, любая убывающая цепочка многообразий $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ из Ω стабилизируется, следовательно, всякий минимальный элемент множества Ω является изолированной точкой в пространстве Ω . Обозначая через Ω' множество предельных точек пространства Ω , имеем $\Omega' \subsetneq \Omega$. *Топологическим рангом* $r_t(\Omega)$ пространства Ω называется число r такое, что $\Omega^{(r-1)} \neq \emptyset$ и $\Omega^{(r)} = \emptyset$. *Топологическим рангом* $r_t(M)$ многообразия M называется топологический ранг пространства $\wp(M)$, т.е. $r_t(M) = r_t(\wp(M))$.

ЛЕММА 8 [1]. Пусть $F \subseteq E \subseteq \wp(M)$ и для любого многообразия $N \in E$ существует натуральное число n такое, что $\mathring{U}_n(N) \subseteq F$. Тогда $r_t(E) \leq r_t(F) + 1$.

Таким образом, из леммы 7 вытекает неравенство 1).

2) В силу леммы 8 для доказательства неравенства 2) достаточно понять, что если в свободной центрально коммутативной алгебре A выполнено нетривиальное тождество

$$\sum_{i \geq 4} (\alpha_i x_1 \circ x_i + \beta_i [x_1, x_i]) \rho_i + f = 0,$$

где f – линейная комбинация базисных слов типа 3)–7); то алгебра A центрально антикоммутативна. Предположим от противного, что алгебра A не является центрально антикоммутативной. Тогда по лемме 6 все скаляры α_i, β_i нулевые, и тождество принимает вид

$$\alpha(x_1 \circ x_2)x_3 + \beta[x_1, x_2]x_3 + \gamma\{x_1, x_2, x_3\} + \delta[x_1, x_2, x_3] + \lambda(x_1, x_2, x_3) \equiv 0, \quad (12)$$

причем хотя бы один из скаляров отличен от 0.

Рассуждаем аналогично доказательству леммы 7. Полагая $x_3 = [a, b]$, на основании леммы 4 получим $\lambda(x_1, x_2, [a, b]) \equiv 0$, т.е. $\lambda[a, b] \equiv 0$. Поскольку алгебра A не является

центрально антикоммутативной, то $\lambda = 0$. Следовательно, алгебра A удовлетворяет тождеству

$$\alpha(x_1 \circ x_2)x_3 + \beta[x_1, x_2]x_3 + \gamma\{x_1, x_2, x_3\} + \delta[x_1, x_2, x_3] \equiv 0. \quad (13)$$

Полагая $x_3 = w \in A^2$ в тождестве (13), получим ввиду леммы 4 $(\gamma + \delta)[w, x_1] \equiv 0$, откуда $\gamma + \delta \equiv 0$, а тождество (13) принимает вид

$$\alpha(x_1 \circ x_2)x_3 + \beta[x_1, x_2]x_3 + \gamma(\{x_1, x_2, x_3\} - [x_1, x_2, x_3]) \equiv 0.$$

Пусть $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = y$. Тогда в силу леммы 3 и центральной коммутативности алгебры A имеем $2\alpha x^2y - \gamma[x^2, y] \equiv 0$. Линеаризуем последнее тождество подстановкой $x \mapsto w$: $2\alpha(x \circ w)y - \gamma[x \circ w, y] \equiv 0$. Отсюда в силу леммы 5 $\alpha = 0$, $\gamma = 0$. Но тогда из (13) вытекает, что $\beta = 0$, т.е. все скаляры в сравнении (12) нулевые. Полученное противоречие завершает доказательство.

3) Приступим к обоснованию неравенства 3).

ЛЕММА 9. Пусть A – свободная центрально антикоммутативная алгебра степени n_0 . Тогда пространство $P_n(A)$ ($n \geq n_0 + 1$) линейно порождается базисными словами типа 1), 3), 4) и 7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что базисные слова степени, большей n_0 , линейно выражаются через указанные базисные слова типа 1)–4), 7). Обозначим через V линейное подпространство в $P_n(A)$, порожденное базисными словами указанных типов. Будем писать $x \equiv y$, если $(x - y)\rho \in V$, где ρ – произвольное R -слово длины $n - 3$. Заметим, что тождество центральной антикоммутативности степени n_0 влечет тождество центральной коммутативности степени $n_0 + 1$.

Докажем сначала сравнения

$$\{x_1, x_2, x_3\} \equiv [x_1, x_2, x_3] \equiv [x_1, [x_2, x_3]] \equiv 0.$$

Заметим, что тождество центральной антикоммутативности степени n_0 влечет тождество центральной коммутативности степени $n_0 + 1$, значит справедливо сравнение $[x_1, [x_2, x_3]] \equiv 0$. Далее, поскольку верно равенство $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = 2(x_1 \circ x_2)x_3$, из тождества (8) имеем $(x_1 \circ x_2)x_3 - (x_1 \circ x_2)x_3 \equiv (x_1, x_2, x_3)$, т.е. $\{x_1, x_2, x_3\} \equiv 0$. Наконец, в силу тождества (7) и центральной антикоммутативности

$$[x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_2]x_3 - [x_1, x_3]x_2 = 2[x_1, x_2]x_3 \equiv 0.$$

Для завершения доказательства леммы осталось понять, что слова типа 2) линейно выражаются через слова типа 4). В силу тождества (7) имеем

$$[x_1, x_i]x_2 = [x_1, x_i x_2] - x_i[x_1, x_2] = [x_1, x_2 x_i] - [x_i, [x_1, x_2]] - [x_1, x_2]x_i,$$

откуда в силу центральной антикоммутативности и вытекает требуемое.

Теперь мы можем перейти именно к доказательству неравенства 3). Для этого в силу лемм 8 и 9 достаточно понять, что если в свободной центрально антикоммутативной алгебре A выполнено нетривиальное тождество степени $\geq n_0$

$$\sum_{i \geq 4} \alpha_i(x_1 \circ x_i)\rho_i + \beta(x_1 \circ x_2)\rho_2 + \gamma[x_1, x_2]\rho_2 + \delta(x_1, x_2, x_3)\eta = 0,$$

то алгебра A коммутативна некоторой степени.

Предположим от противного, что алгебра A не является коммутативной. Подставляя $x_i = w \in A^2$ ($i \geq 4$), получим $\alpha_i = 0$, иначе алгебра A была бы нильпотентна. Тогда в алгебре A выполнено тождество

$$\beta(x_1 \circ x_2)\rho_2 + \gamma[x_1, x_2]\rho_2 + \delta(x_1, x_2, x_3)\eta = 0, \quad (14)$$

причем хотя бы один из скаляров отличен от 0. Полагая $x_3 = w \in A^2$ в тождестве (14), получим $\delta = 0$, и тождество (14) принимает вид $\beta(x_1 \circ x_2)\rho_2 + \gamma[x_1, x_2]\rho_2 = 0$. Полагая здесь $x_2 = [a, b]$, получаем $\beta = 0$, тогда и $\gamma = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство неравенства 3).

4) Пусть A – свободная коммутативная алгебра степени n_0 . Тогда пространство $P_n(A)$ ($n \geq n_0$) линейно порождается базисными словами типа 1), 3), 7). Значит, для доказательства неравенства 4) достаточно понять, что если в алгебре A выполнено нетривиальное тождество степени $\geq n_0$

$$\sum_{i \geq 4} \alpha_i(x_1 \circ x_i)\rho_i + \beta(x_1 \circ x_2)\rho_2 + \gamma(x_1, x_2, x_3)\eta = 0,$$

то алгебра A нильпотентна.

Предположим от противного, что алгебра A ненильпотентна. Подставляя $x_i = w \in A^2$ ($i \geq 4$), получим $\alpha_i = 0$. Следовательно, в алгебре A выполнено тождество

$$\beta(x_1 \circ x_2)\rho_2 + \gamma(x_1, x_2, x_3)\eta = 0,$$

причем хотя бы один из скаляров отличен от 0. Полагая $x_3 = w \in A^2$ и используя коммутативность, получим $\gamma = 0$. Тогда $\beta(x_1 \circ x_2)\rho_2 = 0$, откуда $\beta = 0$. Полученное противоречие завершает обоснование неравенства 4).

Итак, топологический ранг многообразия Alt_2 разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над полем характеристики 3 не превосходит 5 (см. неравенства 1)–4)).

§ 3. Оценка топологического ранга снизу

Для получения оценки топологического ранга снизу приведем четыре примера. Все необходимые разрешимые индекса 2 альтернативные алгебры над полем Φ характеристики 3 строятся в виде грассмановых оболочек подходящих супералгебр. Проверку альтернативности соответствующих супералгебр мы опускаем.

ПРИМЕР 1. Пусть $A = A_0 + A_1$ – супералгебра с базисом a_0, b_0, x, a_1, b_1 : $A_0 = \Phi a_0 + \Phi b_0$, $A_1 = \Phi x + \Phi a_1 + \Phi b_1$, и следующей таблицей умножения:

	x	a_0	b_0	a_1	b_1
x	a_0	b_1	$-a_1$	b_0	$-a_0$
a_0	a_1	0	0	0	0
b_0	$a_1 + b_1$	0	0	0	0
a_1	a_0	0	0	0	0
b_1	$b_0 - a_0$	0	0	0	0

Заметим, что грассманова оболочка $G(A)$ построенной супералгебры является алгеброй Г.В. Дорофеева [5]. Алгебра $G(A)$ не является центрально коммутативной, поскольку $[[x, x]_s, x]_s = 2[a_0, x]_s = 2(a_1 - b_1)$, где $[a, b]_s$ – суперкоммутатор,

$$(a_1 - b_1)x \cdot x = (a_0 - (b_0 - a_0))x = -(a_0 + b_0)x = -(a_1 + (a_1 + b_1)) = a_1 - b_1.$$

ПРИМЕР 2 [6]. Пусть $A = A_0 + A_1$ – супералгебра с базисом a_0, b_0, x, a_1, b_1 : $A_0 = \Phi a_0 + \Phi b_0$, $A_1 = \Phi x + \Phi a_1 + \Phi b_1$, и следующей таблицей умножения:

	x	a_0	b_0	a_1	b_1
x	0	b_1	$a_1 + b_1$	$a_0 - b_0$	$-a_0$
a_0	a_1	0	0	0	0
b_0	$-b_1$	0	0	0	0
a_1	a_0	0	0	0	0
b_1	$-b_0$	0	0	0	0

Проверим, что супералгебра A удовлетворяет тождеству $[[a, b]_s, c]_s = 0$. Как следует из таблицы умножения, любой ненулевой суперкоммутатор базисных элементов с точностью до знака совпадает с одним из элементов: $a_0 + b_0, a_1 - b_1$. Далее,

$$\begin{aligned} [a_0 + b_0, x]_s &= [a_0, x]_s + [b_0, x]_s = (a_1 - b_1) + (-b_1 - (a_1 + b_1)) = -3b_1 = 0, \\ [a_1 - b_1, x]_s &= [a_1, x]_s - [b_1, x]_s = (a_0 + (a_0 - b_0)) - (-b_0 - a_0) = 3a_0 = 0, \\ [a_0 + b_0, c]_s &= [a_1 - b_1, c]_s = 0 \quad \text{для } c = a_0, b_0, a_1, b_1. \end{aligned}$$

Поскольку $(a_0x) \cdot x = a_1x = a_0$, $[a_0, x]_s = a_1 - b_1$, $(a_1 - b_1)x \cdot x = (a_0 + b_0)x = a_1 - b_1$, то грассманова оболочка супералгебры A является центрально коммутативной степени 3, но не является центрально антикоммутативной никакой степени.

ПРИМЕР 3. Пусть $A = A_0 + A_1$ – супералгебра с базисом a_0, x, a_1 : $A_0 = \Phi a_0$, $A_1 = \Phi x + \Phi a_1$, и следующей таблицей умножения:

	x	a_0	a_1
x	a_0	a_1	$-a_0$
a_0	a_1	0	0
a_1	a_0	0	0

Заметим, что $A^2 = \Phi a_0 + \Phi a_1$, $[a_0, x]_s = [a_1, x]_s = 0$. Кроме того, $[x, x]_s = 2a_0$, $(a_0x) \cdot x = a_1x = a_0$, следовательно, грассманова оболочка супералгебры A является центрально антикоммутативной степени 3, но не удовлетворяет тождеству коммутативности никакой степени.

ПРИМЕР 4 [6]. Пусть $A = A_0 + A_1$ – супералгебра с базисом a_0, x, a_1 : $A_0 = \Phi a_0$, $A_1 = \Phi x + \Phi a_1$, и следующей таблицей умножения:

	x	a_0	a_1
x	0	a_1	$-a_0$
a_0	a_1	0	0
a_1	a_0	0	0

Заметим, что алгебра A суперкоммутативна, но ненильпотентна: $(a_0 x) \cdot x = a_1 x = a_0$, следовательно, грассманова оболочка супералгебры A является обычной коммутативной, но ненильпотентной алгеброй.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пчелинцев С. В. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр // Матем. сб. 1981. Т. 115. С. 179–203.
- [2] Медведев Ю. А. Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством // Алгебра и логика. 1978. Т. 17. № 6. С. 705–726.
- [3] Ильяков А. В. Решетка подмногообразий многообразия двухступенчато разрешимых альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 2. С. 170–177.
- [4] Жевлаков К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
- [5] Дорофеев Г. В. Пример разрешимого, но не нильпотентного альтернативного кольца // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 147–150.
- [6] Шестаков И. П. Супералгебры и контрпримеры // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 6. С. 187–196.

Московский городской педагогический университет

Поступило
10.06.98