Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О нелинейности осреднений в финансовой математике, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 944–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:02:24

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О НЕЛИНЕЙНОСТИ ОСРЕДНЕНИЙ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

В. П. Маслов

Пусть x_i при $i = 1, \dots, L$ — значения дохода. Введем понятие финансового осреднения и аксиомы финансового осреднения. Пусть I — некоторое непустое подмножество множества доходов x_i , тогда соответствующее *финансовое осреднение* имеет вид

$$E(I) = f^{-1} \left(\sum_{i=1}^L \alpha_i(I) f_i(x_i) \right), \quad (1)$$

где $f(x)$ — гладкая функция, производная которой нигде не обращается в 0, $f^{-1}(x)$ — обратная функция, $\alpha_i(I)$ — неотрицательные числа, которые называются *весами* и для которых выполняются условия

$$\alpha_i(I) = 0 \quad \text{при } i \notin I, \quad (2)$$

$$\sum_i \alpha_i(I) = 1. \quad (3)$$

Согласно *первой аксиоме*, если множество I состоит из одного значения дохода x_{i_0} , то финансовое осреднение (1) совпадает с x_{i_0} . Следствием этой аксиомы является, что $f_i(x) = f(x)$ для любого i .

Далее в этой работе рассматривается модель, в которой значения дохода имеют вид

$$x_i = \lambda_{j_1(i)} + \dots + \lambda_{j_N(i)}, \quad (4)$$

где $j_s = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, N$. Выражение (4) описывает доход в серии из N игр, в каждой из которых возможно n исходов и при исходе с номером j выигрыш игрока равен λ_j , j_s — номер исхода в s -ой игре. Кроме того, (4) есть доход вкладчика, который вложил N купюр в n банков, в случае, когда банк с номером j на одну вложенную купюру выплачивает λ_j , а j_s — номер банка, в который вложена s -я купюра.

Вторая аксиома финансового осреднения утверждает, что для весов $\alpha_i(I)$ выполняется условие: если $i, i' \in I$, то $\alpha_i(I) = \alpha_{i'}(I)$. Кроме того, веса не зависят от λ_i . Отсюда следует, что при $i \in I$

$$\alpha_i(I) = A(I), \quad (5)$$

где

$$A(I) = \left(\sum_{i \in I} 1 \right)^{-1}. \quad (6)$$

Для доказательства (5) достаточно применить вторую аксиому в случае, когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$.

В данной работе рассмотрена финансовая модель с доходами вида (4). В финансовых задачах действует *принцип тождественности* купюр одного номинала. *Третья аксиома* финансового осреднения утверждает, что перемена купюр одного номинала местами ничего не изменяет и приводит к тому же варианту вклада. Для рассматриваемой модели это означает, что каждому варианту вклада i однозначно соответствует набор неотрицательных целых чисел $N_1^{(i)}, \dots, N_n^{(i)}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=1}^n N_j^{(i)} = N, \quad (7)$$

и наоборот, каждому набору целых неотрицательных чисел $N_1, \dots, N_n$, удовлетворяющих условию (7), однозначно соответствует некоторый вариант вклада i . Число N_j равно числу купюр вложенных в банк с номером j , поэтому доход (4) в этом случае записывается в виде $x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j^{(i)}$.

Наконец, согласно *четвертой аксиоме* финансового осреднения добавление ко всем значениям дохода x_i одного и того же числа γ приводит к тому, что ко всем финансовым осреднениям (1) независимо от I добавляется γ . Требование четвертой аксиомы удовлетворяется в случае, когда $f(x)$ является линейной функцией. Кроме того, оказывается, что нелинейная функция, удовлетворяющая этой аксиоме, единственна с точностью до числовых коэффициентов.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $f(x)$ либо является линейной, либо имеет вид $f(x) = A \exp(\beta x) + C$, где $A \neq 0$, $\beta \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из четвертой аксиомы.

Дальше рассмотрен нелинейный случай. Значение финансового осреднения не зависит от чисел A и C , поэтому в рассматриваемой финансовой модели финансовое осреднение с учетом всех аксиом и их следствий принимает вид

$$E(I) = \frac{1}{\beta} \ln \left(A(I) \sum_{i \in I} \exp \left(\beta \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j^{(i)} \right) \right). \quad (8)$$

В случае, когда множество I состоит из всех возможных вариантов вклада, финансовое осреднение (8) называется *глобальным*. Для глобального финансового осреднения из (8) получается следующее выражение:

$$E = \frac{1}{\beta} \ln \left(A \sum_{\{N\}} \exp \left(\beta \sum_{j=1}^n \lambda_j N_j \right) \right), \quad (9)$$

где

$$\sum_{\{N\}}$$

обозначает сумму по всем наборам целых неотрицательных чисел $N_1, \dots, N_n$, удовлетворяющим условию (7), а кроме того,

$$A = \left(\sum_{\{N\}} 1 \right)^{-1}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что

$$A = \frac{(n-1)!N!}{(N+n-1)!}. \quad (11)$$

Число β будем считать параметром, который характеризует состояние экономики. Например, β может быть равно покупательной способности рубля.

Исследуем зависимость глобального финансового осреднения от β . Сделаем это в случае, когда некоторые значения λ_j совпадают. Самым простым нетривиальным случаем является следующий, когда выполнены условия:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{G_1} = \omega_1, \quad \lambda_{G_1+1} = \dots = \lambda_n = \omega_2 \neq \omega_1, \quad (12)$$

где $1 \leq G_1 < n$, кроме того, введем обозначение $G_2 = n - G_1$. Условия (11) для рассматриваемой финансовой модели означают, что банки делятся на две группы: в первую группу входит G_1 банков, каждый из которых на одну вложенную купюру выплачивает ω_1 , а вторая группа состоит из G_2 банков, каждый из которых на одну вложенную купюру выплачивает ω_2 . Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены условия (12), то глобальное финансовое осреднение (9) принимает вид*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{1}{\beta} \ln & \left(\frac{(n-1)!N!}{(N+n-1)!} \sum_{N_1=0}^N \frac{(N_1+G_1-1)!}{(G_1-1)!N_1!} \frac{(N-N_1+G_2-1)!}{(G_2-1)!(N-N_1)!} \right. \\ & \left. \times \exp(\beta\omega_1 N_1 + \beta\omega_2(N-N_1)) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Будем считать, что G_1 и G_2 зависят от N таким образом, что выполняются условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G_1}{N} = g_1 > 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G_2}{N} = g_2 > 0. \quad (14)$$

Получается, что глобальное финансовое осреднение в пределе при $N \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$\mathbf{E} = N \left(\max_{x \in [0,1]} F(x, 1-x, \beta, \omega_1, \omega_2) + O(1) \right), \quad (15)$$

где $F(n_1, n_2, \beta, \omega_1, \omega_2)$ – функция вида

$$\begin{aligned} F(n_1, n_2, \beta, \omega_1, \omega_2) = & \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \frac{1}{\beta} \left((1+n_1+g_1) \ln(1+n_1+g_1) - n_1 \ln(n_1) - g_1 \ln(g_1) \right. \\ & \left. + (1+n_2+g_2) \ln(1+n_2+g_2) - n_2 \ln(n_2) - g_2 \ln(g_2) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Максимум функции (16) по переменным n_1, n_2 при дополнительном условии

$$n_1 + n_2 = 1 \quad (17)$$

единственен и достигается при

$$n_1^0 = \frac{g_1}{B \exp(-\beta\omega_1) - 1}, \quad n_2^0 = \frac{g_2}{B \exp(-\beta\omega_2) - 1}, \quad (18)$$

где число B определяется из (17). Подстановка (18) в (16) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} F(x, 1-x, \beta, \omega_1, \omega_2) = & -g_1(\omega_1 - \mu) - \frac{g_1}{\beta} \ln(\exp(\beta(\mu - \omega_1)) - 1) \\ & - g_2(\omega_2 - \mu) - \frac{g_2}{\beta} \ln(\exp(\beta(\mu - \omega_2)) - 1), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mu = \ln(B)/\beta$.

Заметим, что в силу явного вида функции $F(n_1, n_2, \beta, \omega_1, \omega_2)$ (16) нахождение зависимости максимума этой функции по переменным n_1, n_2 при условии (17) от параметров $\beta, \omega_1, \omega_2$ эквивалентно нахождению преобразования Лежандра от переменных n_1, n_2, β к переменным $\omega_1, \omega_2, \beta$. Поэтому рассмотрим полученную асимптотику глобального финансового осреднения с точки зрения геометрического квантования, т.е. с точки зрения лагранжевых многообразий [1]. При этом будем

считать, что число купюр у вкладчика может быть не фиксированным; это приводит к тому, что дальше не учитывается условие (17).

Рассмотрим следующую функцию:

$$\Omega(t, \mu, \omega_1, \omega_2) = t \max_{x \in [0,1]} F\left(x, 1-x, \frac{1}{t}, \omega_1, \omega_2\right) = -g_1(\omega_1 - \mu) - g_1 t \ln\left(\exp\left(\frac{\mu - \omega_1}{t}\right) - 1\right) - g_2(\omega_2 - \mu) - t g_2 \ln\left(\exp\left(\frac{\mu - \omega_2}{t}\right) - 1\right). \quad (20)$$

Рассмотрим фазовое пространство, парами сопряженных переменных в котором являются ω_1 и n_1 , ω_2 и n_2 , μ и n , t и s . Функция (21) определяет лагранжево многообразие в этом восьмимерном фазовом пространстве:

$$n_1(t, \mu, \omega_1, \omega_2) = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_1}, \quad n_2(t, \mu, \omega_1, \omega_2) = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_2}, \quad (21)$$

$$n(t, \mu, \omega_1, \omega_2) = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = n_1(t, \mu, \omega_1, \omega_2) + n_2(t, \mu, \omega_1, \omega_2), \quad (22)$$

$$s(t, \mu, \omega_1, \omega_2) = -\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -g_1 \ln\left(\exp\left(\frac{\mu - \omega_1}{t}\right) - 1\right) - g_2 \ln\left(\exp\left(\frac{\mu - \omega_2}{t}\right) - 1\right) + \frac{g_1(\mu - \omega_1) \exp((\mu - \omega_1)/t)}{t(\exp((\mu - \omega_1)/t) - 1)} + \frac{(\mu - \omega_2) \exp((\mu - \omega_2)/t)}{t(\exp((\mu - \omega_2)/t) - 1)}. \quad (23)$$

Заметим, что выражение (21) равно (18) при $B = \exp(\mu/t)$. Рассмотрим проекции этого лагранжева многообразия на другие координатные плоскости фазового пространства, отличные от плоскости $t, \mu, \omega_1, \omega_2$. Например, рассмотрим проектирование лагранжева многообразия на плоскость t, μ, n_1, n_2 . Из (21) получим, что ω_1 и ω_2 однозначно выражаются через t, μ, n_1, n_2 :

$$\lambda_1(t, \mu, n_1, n_2) = \mu - t \ln\left(\frac{g}{n_1} + 1\right), \quad \lambda_2(t, \mu, n_1, n_2) = \mu - t \ln\left(\frac{1}{n_2} + 1\right). \quad (24)$$

Это означает, что рассматриваемое лагранжево многообразие однозначно проектируется на плоскость t, μ, n_1, n_2 .

С точки зрения рассматриваемой финансовой модели приведенные формулы означают, что поскольку ω_i и n_i , $i = 1, 2$, являются сопряженными друг другу величинами, то изменение одной из них приводит к изменению другой. Например, из (24) следует, что увеличение дохода ω_i , приносимого группой банков, приводит к увеличению вклада n_i в эту группу банков.

Этот финансовый факт совершенно очевиден, но он не следует из линейного осреднения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. // ТМФ. 1994. Т. 101. № 3. С. 433–441.