Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова, Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 347–360

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3991>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:28:19

Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты

В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова

Изучаются вопросы конформной геометрии квази-сасакиевых многообразий. Получен контактный аналог теоремы Икуты. Доказано также, что регулярная локально конформно квази-сасакиева структура нормальна тогда и только тогда, когда она локально конформно косимплектична и имеет замкнутую контактную форму. Показано, что примерами таких структур являются структуры Кенмоцу, причем доказано, что такая структура является структурой Кенмоцу тогда и только тогда, когда ее контактная форма Ли совпадает с контактной формой.

Библиография: 8 названий.

В работе [1] Икута установил, что интегральные многообразия инволютивных подраспределений келерова распределения обобщенного многообразия Хопфа (т.е. локально конформно-келерова многообразия с параллельной формой Ли) являются вполне вещественными подмногообразиями.

В настоящей работе вводится понятие контактной формы Ли и изучаются вопросы конформной геометрии квази-сасакиевых многообразий, связанные с этим понятием. Построен контактный аналог келерова распределения и установлен контактный аналог результата Икуты в классе локально конформно квази-сасакиевых многообразий с параллельной контактной формой Ли. Доказано также, что регулярная локально конформно квази-сасакиева структура нормальна тогда и только тогда, когда она локально конформно-косимплектична и имеет замкнутую контактную форму. Показано, что примерами таких структур являются структуры Кенмоцу, причем доказано, что такая структура является структурой Кенмоцу тогда и только тогда, когда ее контактная форма Ли совпадает с контактной формой.

Предварительные сведения. Пусть M – $(2n + 1)$ -мерное гладкое многообразие размерности выше трех, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M , $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования. Напомним [2], что *почти контактной метрической* (короче, *АС-структурой*) на M называется совокупность (ξ, η, Φ, g) , где ξ – векторное поле на M , называемое *характеристическим*, η – дифференциальная 1-форма на M , называемая *контактной формой*, Φ – тензор типа $(1, 1)$ на M , называемый *структурным эндоморфизмом*, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на M . При этом

1) $\eta(\xi) = 1$;

- 2) $\Phi(\xi) = 0$;
- 3) $\eta \circ \Phi = 0$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi$;
- 5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Такие структуры естественно возникают на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий [2], на пространствах главных T^1 -расслоений над симплектическими многообразиями с целочисленной фундаментальной формой (расслоения Бутби–Вана [2]) и, более обще, над почти эрмитовыми многообразиями [3] и являются естественными обобщениями так называемых контактных метрических структур, возникающих на нечетномерных многообразиях с фиксированной 1-формой максимального ранга (контактной структурой).

Важным классом $\mathcal{AC}$ -структур являются косимплектические структуры, т.е. $\mathcal{AC}$ -структуры с параллельным в римановой связности структурным эндоморфизмом.

$\mathcal{AC}$ -структура называется *контактной метрической*, если $d\eta = \Omega$, где $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ – дифференциальная 2-форма на M , называемая *фундаментальной формой структуры*. $\mathcal{AC}$ -структура называется *нормальной*, если $2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y])$$

– тензор Нейенхейса эндоморфизма Φ . Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой*. Сасакиевы и косимплектические структуры играют фундаментальную роль в контактной геометрии, являясь контактными аналогами келеровых структур в эрмитовой геометрии [2]. Их естественным обобщением являются *квази-сасакиевы* (короче, QS -) *структуры*, т.е. нормальные $\mathcal{AC}$ -структуры с замкнутой фундаментальной формой. Квази-сасакиевы структуры были введены Блэром в его докторской диссертации и изучались многими авторами. Они являются естественным обобщением сасакиевых структур и в известной мере также являются контактным аналогом келеровых структур [2].

Хорошо известно, что многообразие, допускающее $\mathcal{AC}$ -структуру ($\mathcal{AC}$ -многообразие), нечетномерно и ориентируемо. В $C^\infty(M)$ -модуле $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей на таком многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathfrak{m} = \eta \otimes \xi$ и $\mathfrak{l} = \text{id} - \mathfrak{m} = -\Phi^2$. Их образы обозначим $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ соответственно. Таким образом, $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{L}$.

Задание $\mathcal{AC}$ -структуры на многообразии M^{2n+1} равносильно заданию G -структуры $\mathcal{G}$ на M со структурной группой $G = U(n) \times \{1\}$. Эта G -структура называется *присоединенной*. Элементами тотального пространства этой G -структуры являются комплексные реперы многообразия M вида $\rho = (p, \xi_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в них имеют соответственно вид

$$(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sqrt{-1}I_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I_n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Будем предполагать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегает значения от 0 до $2n$, а индексы $a, b, c, d, \dots$ – значения от 1 до n . Положим $\hat{a} = a + n$. Обозначим $\{\omega^i\}$ компоненты формы смещения на пространстве присоединенной G -структуры, Тогда в силу сказанного выше $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$, причем

$$\pi^*\Omega = -2\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a, \quad (1)$$

где π – естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на ее базу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конформным преобразованием $A\mathcal{C}$ -структуры $\mathcal{S} = (\xi, \eta, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от $\mathcal{S}$ к $A\mathcal{C}$ -структуре $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, где $\tilde{\xi} = e^\sigma \xi$, $\tilde{\eta} = e^{-\sigma} \eta$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma} g$, σ – произвольная гладкая функция на M , называемая определяющей функцией преобразования. Если $\sigma = \text{const}$, конформное преобразование называется тривиальным, или гомотетией. $A\mathcal{C}$ -структура $\mathcal{S}$ на M называется локально конформно квази-сасакиевой, короче, $lcQ\mathcal{S}$ -структурой, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в квази-сасакиеву структуру. Будем называть это преобразование локально конформным. Многообразие, на котором фиксирована $lcQ\mathcal{S}$ -структура, называется $lcQ\mathcal{S}$ -многообразием. $lcQ\mathcal{S}$ -структура называется собственной, если она отлична от $Q\mathcal{S}$ -структуры.

Контактная форма Ли.

ТЕОРЕМА 1. На всяком $lcQ\mathcal{S}$ -многообразии M внутренним образом определена дифференциальная 1-форма α такая, что $\alpha|_U = d\sigma$, где σ – определяющая функция соответствующего локально конформного преобразования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U_1 и U_2 – две пересекающиеся окрестности, допускающие локально конформные преобразования в квази-сасакиеву структуру с определяющими функциями σ_1 и σ_2 соответственно. Очевидно, фундаментальные формы преобразованных структур имеют вид

$$\tilde{\Omega}_1 = e^{-2\sigma_1}\Omega, \quad \tilde{\Omega}_2 = e^{-2\sigma_2}\Omega, \quad (2)$$

где Ω – фундаментальная форма исходной структуры. Поскольку преобразованные структуры квази-сасакиевы, $d\tilde{\Omega}_i = 0$, $i = 1, 2$. Дифференцируя внешним образом с учетом этого обстоятельства тождество (2), получаем, что на $U_1 \cap U_2$ справедливо тождество

$$d\Omega = 2d\sigma_i \wedge \Omega, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Обозначим $\tau = \sigma_1 - \sigma_2$. Тогда с учетом (3) получаем, что $d\tau \wedge \Omega = 0$. Положив $d\tau = \tau_i \omega^i$ и учитывая (1), перепишем это тождество в виде

$$\tau_{[a} \delta_{b]}^c \omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega_c + \tau^{[a} \delta_c^{b]} \omega_a \wedge \omega^b \wedge \omega_c + \tau_0 \omega^0 \wedge \omega^a \wedge \omega_a = 0.$$

В силу линейной независимости базисных форм получаем отсюда, что

$$\tau_{[a} \delta_{b]}^c = 0, \quad \tau^{[a} \delta_c^{b]}, \quad \tau_0 = 0.$$

Свертывая первые два соотношения с учетом того, что $\dim M > 3$, находим, что $\tau_i = 0$, т.е. $d\tau = 0$, а значит, $d\sigma_1|_{U_1 \cap U_2} = d\sigma_2|_{U_1 \cap U_2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем глобальную 1-форму α , построенную указанным образом, (контактной) формой Ли $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия. Вектор $\alpha^\#$, дуальный форме Ли, назовем (контактным) вектором Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что контактная форма Ли, будучи локально точной, замкнута. Очевидно, $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие является глобально конформно квази-сасакиевым тогда и только тогда, когда его контактная форма Ли точна. В частности, любое $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие, первое число Бетти которого равно нулю; в частности, любое односвязное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие получается из некоторого квази-сасакиева многообразия глобальным конформным преобразованием метрики.

ТЕОРЕМА 2. $A\mathcal{C}$ -структура $\mathcal{S} = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ на многообразии M квази-сасакиева тогда и только тогда, когда существует самосопряженный эндоморфизм $\tilde{C}$ модуля $\mathfrak{X}(M)$, аннулирующий характеристический вектор ξ и перестановочный со структурным эндоморфизмом Φ , такой, что

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \tilde{C}X, Y \rangle \xi - \eta(Y)(\tilde{C}X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (4)$$

При этом с необходимостью

$$\tilde{C}(X) = \nabla_{\Phi X} \xi, \quad X \in \mathfrak{X}(M). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [4] доказано, что тензор $\nabla\Phi$ квази-сасакиева многообразия на пространстве присоединенной G -структуры имеет лишь следующие компоненты, возможно, отличные от нуля:

$$\Phi^a_{0,b} = -\sqrt{-1}B^a_b, \quad \Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = \sqrt{-1}B^{\hat{a}}_{\hat{b}}, \quad \Phi^0_{\hat{a},b} = \sqrt{-1}B^a_{\hat{b}}, \quad \Phi^0_{a,\hat{b}} = -\sqrt{-1}B^{\hat{a}}_b,$$

где $\{B^a_b, B^{\hat{a}}_{\hat{b}} = B^b_a = -B^b_{\hat{a}}\}$ – компоненты вещественного тензора B (называемого четвертым структурным тензором $A\mathcal{C}$ -структуры [5]). Применяя к этим соотношениям стандартную процедуру восстановления тождества [4], получим тождество (4), где $\tilde{C} = B \circ \Phi = \Phi \circ B$. Очевидно, эндоморфизм $\tilde{C}$ самосопряжен, коммутирует с эндоморфизмом Φ и аннулирует вектор ξ .

Обратно, пусть на $A\mathcal{C}$ -многообразии выполняется тождество (4). Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_{\Phi X}(\Phi)(\Phi^2 Y) &= \langle \tilde{C}\Phi X, \Phi^2 Y \rangle \xi - \eta(\Phi^2 Y)\tilde{C}\Phi X \\ &= -\langle \tilde{C}X, \Phi^3 Y \rangle \xi = \langle \tilde{C}X, \Phi Y \rangle \xi - \eta(\Phi Y)\tilde{C}X = \nabla_X(\Phi)(\Phi Y). \end{aligned}$$

По предложению 1 в [4] $A\mathcal{C}$ -структура $\mathcal{S}$ нормальна. Далее, с учетом (4)

$$d\Omega(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(\langle Y, \nabla_X(\Phi)Z \rangle + \langle Z, \nabla_Y(\Phi)X \rangle + \langle X, \nabla_Z(\Phi)Y \rangle) = 0$$

($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$), т.е. форма Ω замкнута, а значит, $A\mathcal{C}$ -структура $\mathcal{S}$ квази-сасакиева.

Далее, согласно (4)

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = \langle \tilde{C}\Phi X, \xi \rangle \xi - \eta(\xi)\tilde{C}\Phi X = -\langle \tilde{C}X, \Phi\xi \rangle \xi - \eta(\xi)\tilde{C}\Phi X = -\tilde{C}\Phi X.$$

Следовательно,

$$\Phi\tilde{C}X = -\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = -\nabla_{\Phi X}(\Phi\xi) + \Phi(\nabla_{\Phi X}\xi) = \Phi(\nabla_{\Phi X}\xi),$$

а значит, $\Phi(\tilde{C}X - \nabla_{\Phi X}\xi) = 0$. Но тогда

$$\mathfrak{l}(\tilde{C}X - \nabla_{\Phi X}\xi) = -\Phi^2(\tilde{C}X - \nabla_{\Phi X}\xi) = 0.$$

Более того, поскольку $\langle \xi, \xi \rangle = \eta(\xi) = 1$,

$$\langle \nabla_X \xi, \xi \rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

В частности, $\nabla_{\Phi X}\xi \in \mathfrak{L}$, а значит, $\mathfrak{m}(\nabla_{\Phi X}\xi) = 0$. Кроме того,

$$\mathfrak{m}(\tilde{C}X) = \eta(\tilde{C}X)\xi = \langle \tilde{C}X, \xi \rangle \xi = \langle X, \tilde{C}\xi \rangle \xi = 0,$$

а значит, $\mathfrak{m}(\tilde{C}X - \nabla_{\Phi X}\xi) = 0$. Но тогда

$$\tilde{C}X - \nabla_{\Phi X}\xi = \mathfrak{m}(\tilde{C}X - \nabla_{\Phi X}\xi) + \mathfrak{l}(\tilde{C}X - \nabla_{\Phi X}\xi) = 0.$$

Пусть $\mathcal{S} = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – $lcQ\mathcal{S}$ -структура на многообразии M , $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ – соответствующая $Q\mathcal{S}$ -структура, локально определенная на этом многообразии, ∇ и $\tilde{\nabla}$ – римановы связности метрик g и $\tilde{g}$ соответственно. Хорошо известно [5], что тензор T аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид

$$T(X, Y) = \langle X, Y \rangle \alpha^\# - \alpha(X)Y - \alpha(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

С учетом этого, прежде всего,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi)Y &= \tilde{\nabla}_X(\Phi Y) - \Phi(\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= \nabla_X(\Phi Y) + T(X, \Phi Y) - \Phi(\nabla_X Y + T(X, Y)) \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + T(X, \Phi Y) - \Phi(T(X, Y)) \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + \Omega(X, Y)\alpha^\# - \langle X, Y \rangle \Phi(\alpha^\#) + \alpha(Y)\Phi X - \alpha(\Phi Y)X. \end{aligned} \tag{6}$$

ЛЕММА 1. Пусть σ – определяющая функция локально-конформного преобразования $A\mathcal{C}$ -структуры $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия M в $Q\mathcal{S}$ -структуру. Введем в рассмотрение (априори локальный) эндоморфизм $C = e^{-\sigma}\tilde{C}$. Тогда

$$C(X) = \nabla_{\Phi X}\xi - \alpha(\xi)\Phi X, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

В частности, эндоморфизм C определен на многообразии M глобально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим в явном виде эндоморфизм $\tilde{C}$ соответствующей $Q\mathcal{S}$ -структуры, локально определенный на многообразии M формулой (5). Имеем согласно (5)

$$\begin{aligned} \tilde{C}(X) &= \tilde{\nabla}_{\Phi X}(\tilde{\xi}) \\ &= \tilde{\nabla}_{\Phi X}(e^\sigma \xi) \\ &= e^\sigma(d\sigma(\Phi X)\xi + \tilde{\nabla}_{\Phi X}\xi) \\ &= e^\sigma(d\sigma(\Phi X)\xi + \nabla_{\Phi X}\xi + T(\Phi X, \xi)) \\ &= e^\sigma(\nabla_{\Phi X}\xi - \alpha(\xi)\Phi X). \end{aligned}$$

Отсюда сразу же следует утверждение леммы 1.

ЛЕММА 2. Ковариантный дифференциал контактной формы η $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия M в римановой связности вычисляется по формуле

$$\nabla_X(\eta)Y = \langle CX, \Phi Y \rangle + \langle X, Y \rangle \eta(\alpha^\#) - \alpha(Y)\eta(X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

В частности,

$$d\eta(X, Y) = \langle CX, \Phi Y \rangle + (\alpha \wedge \eta)(X, Y). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к обеим частям тождества $\Phi^2(Y) = -Y + \tilde{\eta}(Y)\tilde{\xi}$ оператор $\tilde{\nabla}_X$:

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi((\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y)) = \tilde{\nabla}_X(\tilde{\eta})(Y)\tilde{\xi} + \tilde{\eta}(Y)\tilde{\nabla}_X(\tilde{\xi}).$$

С учетом (4) после необходимых сокращений получим:

$$\tilde{g}(\tilde{C}X, \Phi Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)\Phi\tilde{C}X = \tilde{\nabla}_X(\tilde{\eta})(Y)\tilde{\xi} + \tilde{\eta}(Y)\tilde{\nabla}_X(\tilde{\xi}).$$

Как мы уже отмечали, $\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi} \in \mathfrak{L} = \mathfrak{M}^\perp$, поэтому

$$\tilde{\nabla}_X(\tilde{\eta})Y = \tilde{g}\tilde{C}X, \Phi Y, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (8)$$

Далее, как и в случае вывода формулы (6), имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\tilde{\eta})Y &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{\eta}Y) - \tilde{\eta}(\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= X(\tilde{\eta}Y) - \tilde{\eta}(\nabla_X Y + T(X, Y)) \\ &= X(e^{-\sigma}\eta(Y)) - e^{-\sigma}\eta(\nabla_X Y + T(X, Y)) \\ &= e^{-\sigma}(-d\sigma(X)\eta(Y) + X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) - \eta \circ T(X, Y)) \\ &= e^{-\sigma}(-\alpha(X)\eta(Y) + \nabla_X(\eta)Y - \eta \circ T(X, Y)) \\ &= e^{-\sigma}(\nabla_X(\eta)Y + \alpha(Y)\eta(X) - \langle X, Y \rangle \eta(\alpha^\#)). \end{aligned}$$

С другой стороны согласно (8) $\tilde{\nabla}_X(\tilde{\eta})Y = \tilde{g}(\tilde{C}X, \Phi Y) = e^{-\sigma}\langle CX, \Phi Y \rangle$. Сравнивая эти соотношения, приходим к тождеству

$$\nabla_X(\eta)Y = \langle CX, \Phi Y \rangle + \langle X, Y \rangle \eta(\alpha^\#) - \alpha(Y)\eta(X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

С помощью теоремы 2 и леммы 1 мы получаем следующий важный результат:

ТЕОРЕМА 3. Контактная форма Ли $(2n+1)$ -мерного $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия M во введенных обозначениях вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{1}{2n-1} \delta\Omega \circ \Phi - \frac{1}{2n} \delta^*\Omega \circ \mathfrak{m},$$

где δ и δ^* – операторы кодифференцирования и эрмитова кодифференцирования, задаваемые соотношениями

$$(\delta\Theta)_{i_1 \dots i_{r-1}} = g^{ki_r} \nabla_k \Theta_{i_1 \dots i_r}, \quad (\delta^*\Theta)_{i_1 \dots i_{r-1}} = \Omega^{ki_r} \nabla_k \Theta_{i_1 \dots i_r}$$

соответственно (здесь Θ – произвольная дифференциальная r -форма на M).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и раньше, будем помечать тильдой объекты на соответствующем $Q\mathcal{S}$ -многообразии. Тогда с учетом (6) в каждой точке многообразия M

$$\begin{aligned}(\tilde{\delta}\tilde{\Omega})^\# &= \tilde{g}^{ij}\tilde{\nabla}_{e_i}(\Phi)e_j \\ &= e^{2\sigma}g^{ij}(\nabla_{e_i}(\Phi)e_j + \Omega(e_i, e_j)\alpha^\# - \langle e_i, e_j \rangle \Phi(\alpha^\#) + \alpha(e_j)\Phi e_i - \alpha(\Phi e_j)e_i),\end{aligned}$$

где $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ – произвольный базис соответствующего касательного пространства. Имеем

- 1) $g^{ij}\nabla_{e_i}(\Phi)e_j = (\delta\Omega)^\#$ по определению;
- 2) $g^{ij}\Omega(e_i, e_j)\alpha^\# = 0$;
- 3) $-g^{ij}\langle e_i, e_j \rangle \Phi(\alpha^\#) = -g^{ij}g_{ij}\Phi(\alpha^\#) = -(2n+1)\Phi(\alpha^\#)$;
- 4) $g^{ij}\alpha(e_j)\Phi e_i = \alpha^i\Phi e_i = \Phi(\alpha^i e_i) = \Phi(\alpha^\#)$;
- 5) $-g^{ij}\alpha(\Phi e_j)e_i = -g^{ij}(\alpha \circ \Phi)(e_j)e_i = -(\alpha \circ \Phi)^i e_i = -(\alpha \circ \Phi)^\#$.

Следовательно,

$$(\tilde{\delta}\tilde{\Omega})^\# = e^{2\sigma}((\delta\Omega)^\# - (2n+1)\Phi(\alpha^\#) + \Phi(\alpha^\#) - (\alpha \circ \Phi)^\#).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\tilde{\Omega}(X) &= \tilde{g}((\tilde{\delta}\tilde{\Omega})^\#, X) \\ &= e^{-2\sigma}e^{2\sigma}(\langle (\delta\Omega)^\#, X \rangle - 2n\langle \Phi(\alpha^\#), X \rangle - \langle (\alpha \circ \Phi)^\#, X \rangle) \\ &= \delta\Omega(X) + (2n-1)(\alpha \circ \Phi)(X),\end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\tilde{\delta}\tilde{\Omega} = \delta\Omega + (2n-1)(\alpha \circ \Phi). \quad (9)$$

Аналогично,

$$\tilde{\delta}^*\tilde{\Omega} = \delta^*\Omega + 2n\alpha + 2(\alpha \circ \Phi^2). \quad (10)$$

Применим аналогичную процедуру к тождеству (4), записанному в форме

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \tilde{g}(\tilde{C}X, Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)(\tilde{C}X),$$

получим

$$\begin{aligned}(\tilde{\delta}\tilde{\Omega})^\# &= \tilde{g}^{ij}\tilde{\nabla}_{e_i}(\Phi)e_j \\ &= \tilde{g}^{ij}(\tilde{C}(e_i), e_j)\tilde{\xi} - \tilde{g}^{ij}\tilde{\eta}(e_j)\tilde{C}e_i \\ &= \tilde{g}^{ij}\tilde{C}_i^k\tilde{g}_{kj}\tilde{\xi} - \tilde{\xi}^i\tilde{C}e_i = \tilde{C}_i^i\tilde{\xi} - \tilde{C}(\tilde{\xi}) = (\text{tr } \tilde{C})\tilde{\xi} = e^{2\sigma}(\text{tr } C)\xi,\end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{\delta}\tilde{\Omega}(X) = \tilde{g}((\tilde{\delta}\tilde{\Omega})^\#, X) = e^{-2\sigma}e^{2\sigma}(\text{tr } C)\langle \xi, X \rangle = (\text{tr } C)\eta(X),$$

а значит,

$$\tilde{\delta}\tilde{\Omega} = (\text{tr } C)\eta. \quad (11)$$

С учетом (9) и (11),

$$\delta\Omega = (\text{tr } C)\eta - (2n-1)\alpha \circ \Phi. \quad (12)$$

В частности, $\delta\Omega \circ \Phi = (2n-1)\alpha \circ \mathbb{I}$, откуда

$$\alpha \circ \mathbb{I} = \frac{1}{2n-1}\delta\Omega \circ \Phi. \quad (13)$$

Аналогично,

$$\tilde{\delta}^* \tilde{\Omega} = 0,$$

и с учетом (10)

$$\delta^* \Omega = -2n\alpha - 2\alpha \circ \Phi^2 = -2n\alpha + 2\alpha \circ \mathfrak{l}, \quad (14)$$

откуда

$$\alpha \circ \mathfrak{m} = -\frac{1}{2n} \delta^* \Omega \circ \mathfrak{m}. \quad (15)$$

С учетом (13) и (15) получаем, что

$$\alpha = \alpha \circ (\mathfrak{l} + \mathfrak{m}) = \frac{1}{2n-1} \delta \Omega \circ \Phi - \frac{1}{2n} \delta^* \Omega \circ \mathfrak{m}.$$

В качестве следствия этой теоремы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Контактная форма Ли $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия не зависит от определяющей функции соответствующего конформного преобразования. В частности, локально-конформное преобразование, переводящее $lcQ\mathcal{S}$ -структуру в $Q\mathcal{S}$ -структуру, определено однозначно с точностью до гомотетии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ_1 и σ_2 – две определяющие функции соответствующих локально-конформных преобразований. По доказанному, на соответствующем открытом подмногообразии $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия $d\sigma_1 = d\sigma_2 = \alpha$, а значит, $d(\sigma_2 - \sigma_1) = 0$, т.е. $\sigma_2 - \sigma_1 = c = \text{const}$. Но тогда $g_2 = e^{-2\sigma_2} g = e^{-2c} e^{-2\sigma_1} g = e^{-2c} g_1$. Аналогично, $\eta_2 = e^{-c} \eta_1$, $\xi_2 = e^c \xi_1$.

СЛЕДСТВИЕ. *Образ $\widetilde{\mathcal{S}}$ $Q\mathcal{S}$ -структуры $\mathcal{S}$ при ее нетривиальном конформном преобразовании не является $Q\mathcal{S}$ -структурой.*

Келерово распределение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Келеровым распределением на $lcQ\mathcal{S}$ -многообразии назовем распределение $\mathfrak{K}$, внутренним образом определенное системой Пфаффа*

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0, \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

где $\beta = \alpha \circ \Phi$, $\gamma = \alpha \circ \Phi^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Келерово распределение инвариантно относительно эндоморфизма Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это легко следует из определения форм β и γ , а также тождества $\Phi^3 + \Phi = 0$, вытекающего из определения $\mathcal{A}\mathcal{S}$ -структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Распределение $\mathfrak{D}$ на $\mathcal{A}\mathcal{S}$ -многообразии, обладающее свойством*

$$\Phi(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}^\perp,$$

называется *антиинвариантным*, а его интегральные многообразия – *вполне вещественными подмногообразиями*.

Эти понятия являются контактными аналогами хорошо известных понятий эрмитовой геометрии. Следующая теорема является контактным аналогом известной теоремы Икуты, касающейся вполне вещественных подмногообразий обобщенных многообразий Хопфа, т.е. локально конформно-келеровых многообразий с параллельной формой Ли [1].

ТЕОРЕМА 5. Пусть M – собственное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие с параллельной формой Ли и C -инвариантным келеровым распределением $\mathfrak{K}$. Тогда интегральные многообразия любого инволютивного распределения $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{K}$ являются вполне вещественными подмногообразиями многообразия M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 вытекает, что на квази-сасакиевом многообразии M

$$\nabla_X(\Phi^2)Y = \nabla_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi \nabla_X(\Phi)Y = \langle \tilde{C}X, \Phi Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi \tilde{C}(X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Далее, согласно (4)

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \tilde{g}(\tilde{C}X, Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)\tilde{C}X = \langle CX, Y \rangle \xi - \eta(Y)CX.$$

Сравнивая с (6), получаем, что

$$\begin{aligned} \nabla_X(\Phi)Y &= -\Omega(X, Y)\alpha^\# + \langle X, Y \rangle \Phi(\alpha^\#) \\ &\quad - \alpha(Y)\Phi X + \alpha(\Phi Y)X + \langle CX, Y \rangle \xi - \eta(Y)CX, \end{aligned} \quad (16)$$

откуда

$$\begin{aligned} \nabla_X(\beta)Y &= \nabla_X(\alpha \circ \Phi)Y \\ &= \nabla_X(\alpha)\Phi Y + \alpha(\nabla_X(\Phi)Y) \\ &= \nabla_X(\alpha)\Phi Y - \|\alpha\|^2\Omega(X, Y) + \alpha(X)\alpha(\Phi Y) - \alpha(Y)\alpha(\Phi X) \\ &\quad + \langle CX, Y \rangle \alpha(\xi) - \eta(Y)\alpha(CX). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\beta(X, Y) &= \frac{1}{2}(\nabla_X(\alpha)\Phi Y - \nabla_Y(\alpha)\Phi X - 2\|\alpha\|^2\Omega(X, Y) \\ &\quad + 2\alpha(X)\beta(Y) - 2\alpha(Y)\beta(X) + \eta(X)\alpha(CY) - \eta(Y)\alpha(CX)). \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi^2)Y &= \tilde{\nabla}_X(\Phi^2Y) - \Phi^2(\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= \nabla_X(\Phi^2Y) + T(X, \Phi^2Y) - \Phi^2(\nabla_X Y + T(X, Y)) \\ &= \nabla_X(\Phi^2Y) + T(X, \Phi^2Y) - \Phi^2(T(X, Y)) \\ &= \nabla_X(\Phi^2Y) - \langle \Phi X, \Phi Y \rangle \alpha^\# - \langle X, Y \rangle \Phi^2(\alpha^\#) + \alpha(Y)\Phi^2 X - \alpha(\Phi^2 Y)X. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны, согласно (4)

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi^2)Y &= \tilde{\nabla}_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y) \\ &= \tilde{g}(\tilde{C}X, \Phi Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)\Phi(\tilde{C}X) = \Omega(CX, Y)\xi - \eta(Y)\Phi(CX). \end{aligned}$$

Сравнивая с (18), получаем, что

$$\begin{aligned}\nabla_X(\Phi^2)Y &= \langle \Phi X, \Phi Y \rangle \alpha^\# + \langle X, Y \rangle \Phi^2(\alpha^\#) \\ &\quad - \alpha(Y)\Phi^2 X + \alpha(\Phi^2 Y)X + \Omega(CX, Y)\xi - \eta(Y)\Phi(CX),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\nabla_X(\gamma)Y &= \nabla_X(\alpha \circ \Phi^2)Y \\ &= \nabla_X(\alpha)\Phi^2 Y + \alpha(\nabla_X(\Phi^2)Y) \\ &= \nabla_X(\alpha)\Phi^2 Y + \|\alpha\|^2 \langle \Phi X, \Phi Y \rangle - \|\Phi \alpha^\#\|^2 \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \alpha(X)\alpha(\Phi^2 Y) - \alpha(Y)\alpha(\Phi^2 X) + \Omega(CX, Y)\alpha(\xi) - \eta(Y)\alpha(\Phi(CX)).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}d\gamma(X, Y) &= \frac{1}{2}(\nabla_X(\alpha)\Phi^2 Y - \nabla_Y(\alpha)\Phi^2 X + 2\alpha(X)\gamma(Y) \\ &\quad - 2\alpha(Y)\gamma(X) + 2\Omega(CX, Y)\alpha(\xi) + \eta(X)\beta(CY) - \eta(Y)\alpha(CX)).\end{aligned}\quad (19)$$

Пусть M – собственное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие с параллельной формой Ли α и C -инвариантным келеровым распределением $\mathfrak{K}$. Примерами таких многообразий являются вполне геодезические гиперповерхности классического многообразия Хопфа $S^{2n-1} \times S^1$, снабженного классической локально конформно-келеровой структурой [6], наделенные индуцированной почти контактной метрической структурой [2]. Тогда сужения соотношений (17) и (19) (вместе с условием замкнутости формы Ли) на келерово распределение примут вид

$$\begin{aligned}1) \quad & d\alpha(X, Y) = 0; \\ 2) \quad & d\beta(X, Y) = -\|\alpha\|^2 \Omega(X, Y); \\ 3) \quad & d\gamma(X, Y) = \alpha(\xi)\Omega(CX, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{K}.\end{aligned}\quad (20)$$

Пусть $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{K}$ – инволютивное подраспределение келерова распределения. Тогда дифференциальные формы α , β и γ , аннулируемые на распределении $\mathfrak{K}$, тем более аннулируются на распределении $\mathfrak{D}$, и в силу инволютивности этого распределения на нем аннулируются также их внешние дифференциалы. Но тогда в силу (20),

$$\Omega(X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{D}.\quad (21)$$

Очевидно, тождество (21) равносильно тождеству $\langle X, \Phi Y \rangle = 0$, $X, Y \in \mathfrak{D}$, т.е. антиинвариантности распределения $\mathfrak{D}$. Таким образом, если распределение $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{K}$ инволютивно, то его интегральные многообразия являются вполне вещественными подмногообразиями многообразия M .

Нормальные $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия. Как мы видели, свойство квази-сасакиевости $A\mathcal{C}$ -структуры не сохраняется при нетривиальных конформных преобразованиях. Возникает естественный вопрос: может ли при таких преобразованиях сохраняться более слабое свойство нормальности? Иначе говоря, может ли собственная $lcQ\mathcal{S}$ -структура быть нормальной? Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Примерами нормальных собственных $lcQ\mathcal{S}$ -структур являются *структуры Кенмоцу*. Эти структуры были введены в рассмотрение Кенмоцу в работе [7]. Они характеризуются тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).\quad (22)$$

Исчерпывающее описание структур Кенмоцу было приведено в работе [8]. В этой работе доказано, что класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом $A\mathcal{C}$ -многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием их косимплектической структуры. В частности, из этого результата следует, что структуры Кенмоцу являются собственными $lcQ\mathcal{S}$ -структурами. Их нормальность доказана в [5] и легко проверяется с учетом (22) точно так же, как при доказательстве теоремы 2.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{S} = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – $lcQ\mathcal{S}$ -структура на $(2n + 1)$ -мерном многообразии M . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathcal{S}$ – нормальная структура;
- (2) $\alpha \circ \Phi = 0$ или, что равносильно, $\beta = \gamma = 0$;
- (3) $\alpha^\# \in \mathfrak{m}$;
- (4) $\delta\Omega = (\text{tr } C)\eta$;
- (5) $\delta^*\Omega = -2n\alpha$;
- (6) $\alpha = \alpha(\xi)\eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Пусть $\mathcal{S}$ – нормальная структура. Расписывая условие ее нормальности

$$\nabla_X(\Phi)(\Phi Y) = \nabla_{\Phi X}(\Phi)(\Phi^2 Y) \quad (23)$$

с учетом (16) после необходимых сокращений получим, что $\gamma(Y)(X - \Phi^2 X) = 0$. В частности, при $X = \xi$ находим, что $\gamma = 0$, а значит, $\beta = -\gamma \circ \Phi = 0$. Обратно, очевидно, что при выполнении этих условий справедливо тождество (23), т.е. $\mathcal{S}$ – нормальная структура.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Пусть $\alpha \circ \Phi = 0$. Тогда

$$\forall X \in \mathfrak{L} \quad \Rightarrow \quad \langle \alpha^\#, X \rangle = -\langle \alpha^\#, \Phi^2 X \rangle = \alpha(\Phi^2 X) = 0.$$

Следовательно, $\alpha^\# \in \mathfrak{L}^\perp = \mathfrak{M}$. Обратно, если $\alpha^\# \in \mathfrak{M}$, то $\Phi(\alpha^\#) = 0$, а значит,

$$\alpha \circ \Phi(X) = \langle \alpha^\#, \Phi X \rangle = -\langle \Phi(\alpha^\#), X \rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

(2) $\Leftrightarrow$ (4) и (2) $\Leftrightarrow$ (5) немедленно следуют из (12) и (14) соответственно.

(2) $\Leftrightarrow$ (6). Имеем с учетом пункта (2)

$$\alpha(X) = \alpha(lX + \mathfrak{m}X) = -\alpha \circ \Phi^2 X + \alpha(\xi)\eta(X) = \alpha(\xi)\eta(X), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Таким образом, $\alpha = \alpha(\xi)\eta$. Очевидно, верно и обратное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие назовем *регулярным*, если в каждой его точке его контактная форма Ли отлична от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, всякое регулярное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие является собственным. Обратно, столь же очевидно, что всякое собственное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие имеет открытое подмногообразие с индуцированной регулярной $lcQ\mathcal{S}$ -структурой. Назовем его *регулярным подмногообразием*.

Из теоремы 6 вытекает, что келерово распределение нормального $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия задается системой Пфаффа $\alpha = 0$ и в случае регулярности совпадает с каноническим распределением $\mathfrak{L}$, в частности, C -инвариантно.

ТЕОРЕМА 7. *Регулярное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие нормально тогда и только тогда, когда оно имеет замкнутую контактную форму и локально конформно косимплектично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{S} = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – нормальная $lcQ\mathcal{S}$ -структура на многообразии M , $\widetilde{\mathcal{S}} = (\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\Phi}, \widetilde{g})$ – соответствующая локально определенная $Q\mathcal{S}$ -структура на этом многообразии. По теореме 6 $\alpha = f\eta$, где $f = \alpha(\xi)$. Дифференцируя это соотношение внешним образом, с учетом замкнутости формы Ли получим, что

$$df \wedge \eta + f d\eta = 0.$$

С учетом (7)

$$f\langle CX, \Phi Y \rangle + f(\alpha \wedge \eta)(X, Y) = (df \wedge \eta)(X, Y).$$

В частности, если $X, Y \in \mathfrak{L}$, находим, что $\langle fCX, \Phi Y \rangle = 0$. Учитывая, что $\Phi(\xi) = C(\xi) = 0$, легко получить отсюда, что $\langle fCX, Y \rangle = 0$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, а значит,

$$fC = 0.$$

В силу регулярности многообразия M имеем $C = 0$. Следовательно, $\widetilde{C} = e^\sigma C = 0$, и согласно (4) $\widetilde{\nabla}\Phi = 0$, т.е. соответствующая $Q\mathcal{S}$ -структура косимплектична. Более того, из (7) и теоремы 6 вытекает, что $d\eta = 0$.

Обратно, пусть $\widetilde{\mathcal{S}}$ – косимплектическая структура. Тогда $\widetilde{\nabla}\Phi = 0$, а значит, $\widetilde{C} = 0$, и в силу (8) $\widetilde{\nabla}\widetilde{\eta} = 0$, и тем более $d\widetilde{\eta} = 0$. Следовательно, $d(e^{-\sigma}\eta) = 0$ и в силу замкнутости контактной формы $e^{-\sigma}d\sigma \wedge \eta = 0$, т.е. $\alpha \wedge \eta = 0$. Отсюда вытекает, что $\alpha = f\eta$ для подходящей функции $f \in C^\infty(M)$, причем $f = f\eta(\xi) = \alpha(\xi)$. По теореме 6 $\mathcal{S}$ – нормальная структура.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как уже отмечалось, нетривиальными примерами многообразий, обладающих указанными свойствами, являются многообразия Кенмоцу. В самом деле, из (16) следует, что их можно рассматривать как (нормальные) $lcQ\mathcal{S}$ -многообразия, для которых $\alpha = \eta$, $C = 0$. Очевидно, такие многообразия регулярны и, кроме того, согласно (7) $d\eta = 0$. (Конечно, из теоремы 7 вытекает, что такие многообразия являются локально конформно-косимплектическими).

В заключение приведем следующий удобный аналитический критерий распознавания нормальных регулярных $lcQ\mathcal{S}$ -многообразий:

ТЕОРЕМА 8. *$\mathcal{A}\mathcal{C}$ -многообразие M является нормальным регулярным $lcQ\mathcal{S}$ -многообразием тогда и только тогда, когда существует нигде не обращающаяся в нуль функция $f \in C^\infty(M)$ такая, что $(df) \circ \Phi = 0$ и*

$$\nabla_X(\Phi)Y = f(\langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi X), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, как и при доказательстве теоремы 6, доказывается, что условие $(df) \circ \Phi = 0$ равносильно условию $df = df(\xi)\eta$, а значит, и условию $df \wedge \eta = 0$. Пусть M – нормальное регулярное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие. Положим $f = \alpha(\xi)$. По теореме 6, $\alpha = f\eta$. Дифференцируя это соотношение внешним образом, получим, что $df \wedge \eta + f d\eta = 0$. Но по теореме 7 $C = 0$, и согласно (7) $d\eta = 0$, а значит, $df \wedge \eta = 0$. Отсюда вытекает, что $(df) \circ \Phi = 0$. С другой стороны, $\langle \alpha^\#, X \rangle = \alpha(X) = f\eta(X) = f\langle \xi, X \rangle$, откуда следует, что $\alpha^\# = f\xi$, и в силу (16) получаем (24).

Обратно, пусть M – $A\mathcal{C}$ -многообразие, на котором выполняется тождество (24). Применяя к обеим частям тождества $\Phi^2(Y) = -Y + \eta(Y)\xi$ оператор ∇_X , как и при выводе тождества (8), но с учетом (24), получим

$$\nabla_X(\eta)Y = f(\langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (25)$$

откуда следует, что

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2} (\nabla_X(\eta)Y - \nabla_Y(\eta)X) = 0. \quad (26)$$

Введем в рассмотрение 1-форму $\alpha = f\eta$. Тогда, как и выше, $\alpha^\# = f\xi$. С учетом сделанного в начале доказательства замечания и (26) имеем

$$d\alpha = df \wedge \eta + f d\eta = 0.$$

По лемме Пуанкаре

$$\forall p \in M \quad \exists U_p \quad \exists \sigma \in C^\infty(U_p) \quad d\sigma = \alpha|_{U_p}.$$

Подвергнем исходную $A\mathcal{C}$ -структуру $\mathcal{S} = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ многообразия M локально-конформному преобразованию с определяющей функцией σ . Как мы уже знаем, $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + T(X, Y)$, где

$$T(X, Y) = \langle X, Y \rangle \alpha^\# - \alpha(X)Y - \alpha(Y)X = f(\langle X, Y \rangle \xi - \eta(X)Y - \eta(Y)X). \quad (27)$$

С учетом (24) и (27) получаем, что

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + T(X, \Phi Y) - \Phi(T(X, Y)) = 0.$$

Следовательно, преобразованная $A\mathcal{C}$ -структура является косимплектической, а значит, исходная $A\mathcal{C}$ -структура $\mathcal{S}$ – регулярной локально конформно-косимплектической, в частности, $lcQ\mathcal{S}$ -структурой. Более того, с учетом (26) и теоремы 7, $\mathcal{S}$ – нормальная $lcQ\mathcal{S}$ -структура.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Не существует нормальных собственных $lcQ\mathcal{S}$ -структур с параллельной формой Ли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если бы такая структура на многообразии M существовала, то в силу (25) на его открытом регулярном подмногообразии $f = 0$, а значит, $\alpha = 0$, что противоречит собственности структуры.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Нормальное регулярное $lcQ\mathcal{S}$ -многообразие является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда его контактная форма Ли совпадает с контактной формой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Ikuta, “ α -submanifolds in locally conformal Kähler manifolds”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **31:1** (1980), 1–12.
- [2] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, **203**, Birkhäuser, Boston, MA, 2002.

- [3] В. Ф. Кириченко, “Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **6**:4 (2000), 1095–1120.
- [4] В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, “Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий”, *Матем. сб.*, **193**:8 (2002), 71–100.
- [5] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [6] I. Vaisman, “On locally and globally conformal Kähler manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **262**:2 (1980), 533–542.
- [7] K. Kenmotsu, “A class of almost contact Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **24** (1972), 93–103.
- [8] В. Ф. Кириченко, “О геометрии многообразий Кенмоцу”, *Докл. РАН*, **380**:5 (2001), 585–587.

В. Ф. Кириченко

Московский педагогический государственный университет

Н. С. Баклашова

Московский педагогический государственный университет

Поступило

30.08.2006

Исправленный вариант

30.01.2007