Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Б. Шпиз, Теорема о существовании собственного вектора в идемпотентном анализе, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 459–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3993>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:41:12

УДК 517.9

Теорема о существовании собственного вектора в идемпотентном анализе

Г. Б. Шпиз

В работе в рамках алгебраического подхода доказывается теорема о существовании собственного вектора у линейных операторов на абстрактных идемпотентных пространствах. Ранее аналогичное утверждение в алгебраическом варианте было известно только для операторов в свободных конечномерных полумодулях. В случае топологических полумодулей имеется соответствующий результат для компактных операторов в полумодулях вещественных непрерывных функций.

Библиография: 7 названий.

1. Идемпотентные пространства

Обозначения и определения. В настоящей работе используется терминология из [1]–[3]. Напомним, что *идемпотентной полугруппой* (ИП) называется аддитивная полугруппа с коммутативным сложением $\oplus$, в которой для любого элемента x выполнено соотношение $x \oplus x = x$. Любая ИП будет рассматриваться как упорядоченное множество относительно стандартного (частичного) порядка: $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$.

Легко видеть, что это определение корректно и $x \oplus y = \sup(x, y)$. Для произвольного подмножества X идемпотентной полугруппы положим $\oplus X = \sup(X)$ и $\wedge X = \inf(X)$ при условии, что соответствующие правые части существуют. ИП называется *b-полной* (или *ограниченно полной*), если любое ее ограниченное сверху подмножество (в том числе и пустое) имеет точную нижнюю грань. В частности, любая b-полная ИП содержит нуль (обозначаемый $\mathbf{0}$), совпадающий с $\oplus \emptyset$, где $\emptyset$ – пустое множество. Гомоморфизм b-полных идемпотентных полугрупп называется *b-гомоморфизмом*, если $g(\oplus X) = \oplus g(X)$ для любого ограниченного сверху подмножества X . *Идемпотентным полукольцом* (ИПК) называется ИП, снабженная таким ассоциативным умножением $\odot$ с единицей (обозначаемой $\mathbf{1}$), что выполнены оба соотношения дистрибутивности. Коммутативное ИПК называется *полуполем*, если любой его ненулевой элемент обратим. Идемпотентное полуполе называется *b-полным*, если оно является b-полной ИП. Множество всех ненулевых элементов b-полного полуполя является полной упорядоченной группой (в терминологии [4]). Верно и обратное утверждение: добавляя $\mathbf{0}$ к любой полной упорядоченной группе

и определяя сложение как $\sup$, получим b -полное полуполе. Полуполе, полученное таким образом из аддитивной группы вещественных чисел, обозначается $\mathbf{R}_{\max}$. В любом b -полном полуполе выполнены обобщенные дистрибутивные законы

$$a \odot (\oplus X) = \oplus(a \odot X), \quad a \odot (\wedge X) = \wedge(a \odot X),$$

где a – элемент поля, X – непустое ограниченное подмножество.

Идемпотентным полумодулем над идемпотентным полукольцом K называется идемпотентная полугруппа V , в которой определено такое умножение $\odot$ на элементы из K , что для любых $a, b \in K$, $x, y \in V$ выполнены обычные соотношения:

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot x) &= (a \odot b) \odot x, & (a \oplus b) \odot x &= a \odot x \oplus b \odot x, \\ a \odot (x \oplus y) &= a \odot x \oplus a \odot y, & \mathbf{0} \odot x &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Идемпотентный полумодуль над идемпотентным полуполем называется *идемпотентным пространством*. Идемпотентное пространство V над b -полным полуполем K называется (*идемпотентным*) b -*пространством*, если для любого непустого ограниченного подмножества $Q \subset K$ и произвольного $x \in V$ выполнены соотношения

$$(\oplus Q) \odot x = \oplus(Q \odot x), \quad (\wedge Q) \odot x = \wedge(Q \odot x).$$

Гомоморфизм b -пространств $g: V \rightarrow W$ называется b -*гомоморфизмом* или b -*линейным* отображением, если $g(\oplus X) = \oplus g(X)$ для любого ограниченного подмножества $X \subset V$. Гомоморфизмы со значениями в K , рассматриваемом как полумодуль над самим собой, называются *линейными функционалами*. Подмножество идемпотентного пространства называется *подпространством*, если оно замкнуто относительно сложения и умножения на коэффициенты. Подпространство идемпотентного b -пространства называется b -*замкнутым подпространством*, если оно замкнуто относительно суммирования любых ограниченных во всем пространстве подмножеств.

Пусть X – произвольное множество, V – идемпотентное пространство над K . Через $B(X, V)$ обозначается полумодуль всех ограниченных отображений из X в V , снабженный поточечными операциями. Если V – идемпотентное b -пространство, то $B(X, V)$ является b -пространством.

Полунепрерывные отображения. Отображение f топологического пространства X в упорядоченное множество V назовем *полунепрерывным сверху*, если для любого $b \in V$ множество $\{x \in X \mid f(x) \succeq b\}$ замкнуто в X . В случае, когда V совпадает с множеством всех вещественных чисел, это определение совпадает с обычным определением полунепрерывной сверху вещественной функции. Множество всех ограниченных полунепрерывных сверху отображений из X в V будем обозначать $USC(X, V)$. Если V является ограниченной полной решеткой, то $USC(X, V)$ является ограниченной полной решеткой относительно поточечного порядка. Если V – идемпотентное b -пространство, то $USC(X, V)$ является b -пространством относительно операций

$$f \oplus g = \sup(f, g), \quad (k \odot f)(x) = k \odot f(x).$$

2. Архимедовы идемпотентные пространства

В дальнейшем, если не оговорено противное, через K обозначается b -полное идемпотентное полуполе и все идемпотентные пространства рассматриваются над K .

Подмножество M идемпотентного b -пространства V будем называть *ωо-замкнутым*, если $\wedge X \in M$ и $\oplus X \in M$ для любого ограниченного в V линейно упорядоченного подмножества $X \subset M$. Неубывающее отображение b -пространств $f: V \rightarrow W$ будем называть *ωо-непрерывным*, если $f(\oplus X) = \oplus f(X)$ и $f(\wedge X) = \wedge f(X)$ для любого ограниченного линейно упорядоченного подмножества $X \subset V$. Заметим, что любой изоморфизм упорядоченных множеств *ωо-непрерывен*. Прямая проверка показывает, что семейство всех *ωо-замкнутых* подмножеств произвольного b -пространства V является системой замкнутых множеств некоторой $T1$ топологии и *ωо-непрерывность* неубывающего отображения эквивалентна непрерывности относительно этой топологии. Следующее предложение проверяется стандартным образом с использованием леммы Цорна (см. [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Любая ωо-замкнутая подполугруппа $W \subset V$ замкнута относительно суммирования своих ограниченных в V подмножеств. В частности, ωо-замкнутое подпространство является b -замкнутым подпространством.*

Элемент x идемпотентного пространства V называется *архимедовым*, если для любого элемента $y \in V$ существует коэффициент $\lambda \in K$ такой, что $\lambda \odot x \succeq y$. Для архимедова элемента $x \in V$ выражение

$$x^*(y) = \wedge \{k \in K \mid k \odot x \succeq y\}$$

определяет отображение $x^*: V \rightarrow K$. Если V – идемпотентное b -пространство, то x^* является b -линейным функционалом и $x^*(y) \odot x \succeq y$ для любого $y \in V$ (см. [1]). Архимедов элемент $x \in V$ назовем *ωо-непрерывным*, если функционал x^* является *ωо-непрерывным*.

Будем называть идемпотентное b -пространство V *архимедовым*, если в V существует *ωо-непрерывный* архимедов элемент.

Линейный функционал $\varphi: V \rightarrow K$ называется *невырожденным*, если $\varphi(x) > 0$ при любом ненулевом $x \in V$ и множество $\{x \in V \mid \varphi(x) = 1\}$ ограничено сверху. По построению функционал x^* невырожден для любого архимедова элемента $x \in V$ идемпотентного b -пространства V .

ЛЕММА 1. *Идемпотентное b -пространство V архимедово тогда и только тогда, когда на V существует невырожденный ωо-непрерывный b -линейный функционал.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in V$ является *ωо-непрерывным* архимедовым элементом, то x^* – невырожденный *ωо-непрерывный* b -линейный функционал. Обратно, если φ – невырожденный *ωо-непрерывный* b -линейный функционал, то

$$x_\varphi = \oplus \{x \in V \mid \varphi(x) = 1\}$$

является *ωо-непрерывным* архимедовым элементом, причем $x_\varphi^* = \varphi$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое *ωо-замкнутое* подпространство архимедова пространства (напомним, что оно автоматически является b -замкнутым подпространством) является архимедовым пространством.

ТЕОРЕМА 1. *Любое линейно упорядоченное по включению семейство ненулевых ωо-замкнутых подпространств архимедова пространства V имеет ненулевое пересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω – линейно упорядоченное по включению множество ненулевых wo -замкнутых подпространств. Фиксируем невырожденный wo -непрерывный b -линейный функционал φ и положим $W = \{v \in V \mid \varphi(v) = 1\}$. По построению W является wo -замкнутой подполугруппой в V . Очевидно, что $W \cap w$ непусто при любом $w \in \Omega$ и является wo -замкнутой подполугруппой в V . Положим $v_w = \oplus(W \cap w)$. По предложению 1 $v_w \in w$. Тогда $\varphi(v_w) = 1$ и $v_a \preceq v_b$ при $a \preceq b$, $a, b \in \Omega$. Положим $v = \inf\{v_a \mid a \in \Omega\}$. Так как Ω линейно упорядочено, из wo -непрерывности φ вытекает, что $\varphi(v) = 1$ и $v \in \bigcap_{w \in \Omega} w$. Таким образом, v – ненулевой элемент в $\bigcap_{w \in \Omega} w$, что и требовалось.

Неприводимые архимедовы пространства. Архимедово идемпотентное пространство V называется *неприводимым* относительно множества G произвольных отображений V в себя, если всякое ненулевое wo -замкнутое G -инвариантное подпространство W в V совпадает с V .

ТЕОРЕМА 2. Пусть V – архимедово пространство и G – множество произвольных отображений V в себя. Тогда в V существует wo -замкнутое G -инвариантное неприводимое архимедово подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 в множестве S всех ненулевых wo -замкнутых G -инвариантных подпространств всякое линейно упорядоченное подмножество имеет нижнюю грань. В силу леммы Цорна (см. [5]) из этого вытекает наличие в S минимального элемента, который и будет искомым неприводимым архимедовым подпространством.

3. Теорема о собственном векторе

Пусть V – полумодуль над полукольцом K . Собственным вектором отображения $g: V \rightarrow V$ с собственным значением $\lambda \in K$ называется такой ненулевой вектор $v \in V$, что $g(v) = \lambda \odot v$.

Полукольцо K называется *алгебраически замкнутым*, если из любого элемента $x \in K$ можно извлечь корень любой положительной степени n , т.е. найти такой элемент $y \in K$, что $y^n = x$. По поводу алгебраически замкнутых полуполей см. [6], [7].

Нам понадобится следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если два элемента полуполя удовлетворяют соотношению $x^n \succeq y^n$ при некотором $n \geq 2$, то $x \succeq y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиальным образом сводится к случаю $y = 1$. В этом случае из условия следует, что $x^n \oplus 1 = x^n$. Поэтому получаем

$$(1 \oplus x)^n = 1 \oplus \cdots \oplus x^n = x \oplus \cdots \oplus x^n = x \odot (1 \oplus \cdots \oplus x^{n-1}) = x \odot (1 \oplus x)^{n-1}.$$

Сокращая на $1 \oplus x^{n-1}$, получаем $1 \oplus x = x$, т.е. $x \succeq 1$, что и требовалось.

Примерами b -полных алгебраически замкнутых полуполей являются ограничено полные векторные решетки над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, расширенные $-\infty$ с операциями

$$x \oplus y = \sup(x, y), \quad x \odot y = x + y,$$

естественным образом продолженными на $-\infty = 0$.

Пусть V – архимедово идемпотентное пространство, $x, y \in V$ и $y \neq \mathbf{0}$, φ – невырожденный функционал на V . Если $k \odot y \preceq x$ при некотором $k \in K$, то $k \odot \varphi(y) \preceq \varphi(x)$, откуда $k \preceq \varphi(y)^{-1} \odot \varphi(x)$. Следовательно, множество $\{k \in K \mid k \odot y \preceq x\}$ ограничено и имеет точную верхнюю грань. Для $x, y \in V$ при $y \succeq \mathbf{0}$ положим $[x : y] = \sup\{k \in K \mid k \odot y \preceq x\}$. По построению $[x : y] \odot y \preceq x$.

ЛЕММА 2. Пусть V – архимедово пространство над b -полным алгебраически замкнутым полуполем K , неприводимое относительно такого ненулевого b -гомоморфизма $g: V \rightarrow V$, что $g(x) \preceq x$ при $x \in V$. Тогда

- 1) для любого $n = 1, \dots$ и ненулевого $x \in V$ выражение $\lambda_n = [x : g^n(x)]$ не зависит от x ;
- 2) $\lambda_n = \lambda^n$, где $\lambda = \lambda_1$;
- 3) для любого невырожденного линейного ω -непрерывного функционала φ существует такой элемент $v \in V$, что $\varphi(\lambda^n \odot g^n(v)) = \mathbf{1}$ при $n = 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что для любого $a \in K$ и $n > 0$ множество $M = \{x \in V \mid a \odot g^n(x) \preceq x\}$ является g -инвариантным ω -замкнутым подпространством в V . В частности, для любого ненулевого $y \in V$ множество

$$\{x \in V \mid x \neq \mathbf{0}, [x : g^n(x)] \succeq [y : g^n(y)]\} \cup \{\mathbf{0}\} = \{x \in V \mid [y : g^n(y)] \odot g^n(x) \preceq x\}$$

является ненулевым (так как содержит y) g -инвариантным ω -замкнутым подпространством в V и потому совпадает с V , откуда $[x : g^n(x)] \succeq [y : g^n(y)]$ при любых $x, y \neq \mathbf{0}$. Меняя местами x и y , получаем $[x : g^n(x)] = [y : g^n(y)]$, что доказывает 1). Так как по условию $g(x) \preceq x$, получаем $\lambda_n \succeq \mathbf{1}$. Учитывая неприводимость V , получим $g(x) \neq \mathbf{0}$ при $x \neq \mathbf{0}$. Пусть $\lambda = \lambda_1$, $r = r_n = \lambda_n^{1/n} \succeq \mathbf{1}$ и $m = pn + q$, где $q < n$. Для любого ненулевого $v \in V$ имеем

$$r^m \odot g^m(v) = r^q \odot g^q((r^n \odot g^n)^p(v)) = r^q \odot g^q((\lambda_n g^n)^p(v)) \preceq r^q \odot v \preceq r^n \odot v = \lambda \odot v,$$

откуда следует, что последовательность $r^m \odot g^m(v)$ ограничена. Положим

$$w = \bigoplus_{m \geq 0} (r^m \odot g^m(v)).$$

Имеем,

$$r \odot g(w) = \bigoplus_{m \geq 1} (r^m \odot g^m(v)) \leq w,$$

поэтому $r \leq \lambda_1$, откуда $\lambda_n = r^n \leq \lambda_1^n$. Но $\lambda_1^n \odot g^n(x) \preceq x$ для любого $x \in V$, поэтому $\lambda_1^n \leq \lambda_n$, что и дает 2). Фиксируем невырожденный ω -непрерывный функционал φ и положим $W = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{1}\}$, $v = \bigoplus W \in W$, $v_n = g^n(v)$, $k_n = \varphi(v_n)^{-1}$. Поскольку $\lambda_1^n \odot v_n = \lambda_n \odot g^n(v) \preceq v$, получаем $\lambda_1^n \odot \varphi(v_n) \preceq \varphi(v) = \mathbf{1}$, откуда $\lambda_1^n \preceq k_n$. Но учитывая, что $k_n \odot v_n \in W$, получаем $k_n \odot v_n \preceq v$, откуда $k_n \preceq \lambda_n = \lambda_1^n$ и, следовательно, $k_n = \lambda_1^n$. Таким образом, $\varphi(\lambda_1^n \odot g^n(v)) = \varphi(k_n \odot v_n) = \mathbf{1}$, что доказывает 3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть V – архимедово идемпотентное пространство над b -полным алгебраически замкнутым полуполем K . Тогда любой b -гомоморфизм $g: V \rightarrow V$ имеет собственный вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем на V невырожденный ω -непрерывный функционал φ и архимедов элемент a . По определению существует ненулевой скаляр $\lambda \in K$ такой, что $\lambda \odot g(a) \preceq a$.

Пусть $U = \{x \in V \mid \lambda \odot g(x) \preceq x\}$. Очевидно, U – непустой g -инвариантный ω -замкнутый подполумодуль в V и, следовательно, U – архимедово идемпотентное пространство. В силу теоремы 2 в U можно выбрать g -неприводимое ω -замкнутое подпространство U_0 . Пусть g_0 – ограничение $\lambda \odot g$ на U_0 . Если $g_0(x) = \mathbf{0}$ при некотором ненулевом $x \in U_0$, то x – собственный вектор g_0 , а значит, и g . В противном случае g_0 удовлетворяет условию предыдущей леммы. Поэтому существует $v \in U_0$ и обратимый $k \in K$ такие, что $\varphi(k^n \odot g_0^n(v)) = \mathbf{1}$ и $k \odot g_0(x) \preceq x$, $x \in U_0$.

Положим $f(x) = k \odot g_0(x)$ при $x \in U_0$ и $w_n = f^n(v) \in U_0$. По построению w_n не возрастает и $\varphi(w_n) = \mathbf{1}$. Пусть $w = \inf\{w_n \mid n = 1, \dots\}$. Тогда

$$\varphi(w) = \inf\{\varphi(w_n) \mid n = 1, \dots\} = \mathbf{1}$$

и, следовательно, $w \in W$ – ненулевой элемент V . Так как по построению f – b -гомоморфизм, немедленно получаем $f(w) = w$, т.е. $k \odot g_0(w) = w$. Но по построению $g_0(w) = \lambda \odot g(w)$, откуда $k \odot \lambda \odot g(w) = k \odot g_0(w) = w$. Таким образом, w – искомым собственный вектор оператора g . Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть V – архимедов полумодуль над полуполем $K = \mathbf{R}_{\max}$, $g: V \rightarrow V$ – гомоморфизм, $v, w \in V$ – собственные вектора, соответствующие собственным значениям $p, q \in K$ соответственно. Тогда

- 1) если $v \preceq w$, то $p \preceq q$;
- 2) все собственные значения, соответствующие архимедовым собственным векторам, совпадают.

4. Построение и примеры архимедовых полумодулей. Пространство $USC(X, V)$

Пусть X – топологическое пространство, V – упорядоченное (частично) множество. Следующее предложение показывает, что $\inf$ в $USC(X, V)$ можно брать поточечно (в отличие от $\sup$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $F \subset USC(X, V)$ – ограниченное подмножество и $f_0 = \inf(F)$, то $f_0(x) = \inf\{f(x) \mid f \in F\}$ для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что функция φ , заданная формулой $\varphi(x) = \inf\{f(x) \mid f \in F\}$, полунепрерывна. Но

$$\{x \in X \mid \varphi(x)(v)\} = \bigcap_{f \in F} \{x \in X \mid f(x) \succeq v\}$$

и потому замкнуто при любом $v \in V$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 4. Если K – b -полное полуполе и X – компактное топологическое пространство, то $USC(X, K)$ – архимедово пространство, причем функция $\mathbf{e}$, тождественно равная $\mathbf{1}$, является ω -непрерывным архимедовым элементом (отметим, что $\mathbf{e}^*(f) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $\varphi = \mathbf{e}^*$ – невырожденный wo -непрерывный b -линейный функционал. Невырожденность и b -линейность проверяется тривиально (и не требует компактности X). Докажем wo -непрерывность. Пусть $F \subset USC(X, V)$ – линейно упорядоченное подмножество. Пусть

$$\varphi_0 = \inf\{\varphi(f) \mid f \in F\}$$

и $f_0 = \inf(F)$. Нужно проверить, что $\varphi_0 = \varphi(f_0)$. Для $f \in F$ положим

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \succeq \varphi_0\}.$$

По построению X_f непусто и замкнуто и $X_f \subset X_g$ при $f \preceq g$. Таким образом, $\{X_f\}$ является линейно упорядоченной по включению системой непустых замкнутых подмножеств компакта X и, следовательно, имеет непустое пересечение. Пусть x – произвольный элемент этого пересечения. Тогда $f(x) \succeq \varphi_0$ для любого $f \in F$, откуда

$$f_0(x) = \inf\{f(x) \mid f \in F\} \succeq \varphi_0,$$

и, следовательно, $\varphi(f_0) \succeq \varphi_0$. Так как обратное неравенство очевидно ($\inf(\varphi(F)) \succeq \varphi(\inf(F))$ для любой сохраняющей порядок функции φ), получаем требуемое.

5. $\wedge$ -ПОДПОЛУМОДУЛИ

Подмножество b -полного полумодуля V называется $\wedge$ -подполумодулем, если оно замкнуто относительно умножения на скаляры и взятия в V точных нижних граней своих непустых подмножеств.

Из определения немедленно вытекает, что любой $\wedge$ -подполумодуль W является ограниченно полной решеткой относительно унаследованного порядка. Поэтому его можно рассматривать как полумодуль относительно унаследованного умножения на скаляры и операции $x \oplus_W y = \sup(x, y)$, где $\sup$ берется в W . В дальнейшем всегда будем рассматривать $\wedge$ -подполумодуль как полумодуль относительно этой структуры.

Из определений немедленно получаем, что $\wedge$ -подполумодуль b -полного полумодуля V является b -полным полумодулем. Более того, если V является b -пространством, то и любой его $\wedge$ -подполумодуль W будет b -пространством. Будем называть $\wedge$ -подполумодуль идемпотентного b -пространства $\wedge$ -подпространством.

ПРИМЕР 1. Пусть X – топологическое пространство и V является b -пространством. Тогда $USC(X, V)$ является $\wedge$ -подпространством в $B(X, V)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = [0, 1]$, $K = \mathbf{R}_{\max}$. Примером $\wedge$ -подполумодуля в $USC(X, K)$ является множество $\text{Conc}(X, K)$ всех вогнутых функций из $USC(X, K)$ (т.е. таких функций f , что $f(kx + (1-k)y) \succeq kf(x) + (1-k)f(y)$ при $k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq 1$). Заметим, что $\text{Conc}(X, K)$ не является подполумодулем в $USC(X, K)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть V – архимедово пространство и $v \in V$ его wo -непрерывный архимедов элемент. Любое $\wedge$ -подпространство $W \subset V$, содержащее v , является архимедовым пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что v является wo -непрерывным архимедовым элементом в W . Но архимедовость v очевидна, и остается проверить wo -непрерывность функционала v^* в W . Так как W является b -пространством, то v^* является b -линейным функционалом на W и остается проверить, что $v^*(\wedge X) = \wedge v^*(X)$ для любого линейно упорядоченного подмножества $X \subset W$, причем нижняя грань берется в W . Но так как W является $\wedge$ -подпространством, то $\wedge X$ в W и в V совпадают. Учитывая wo -непрерывность функционала v^* на V , получаем требуемое.

ЛЕММА 3. Пусть $\wedge$ -подпространство V пространства $B(X, K)$ ограниченных функций на некотором множестве X , содержащее функцию e , тождественно равную 1 . Предположим, что функционал $e^*: f \mapsto \sup(f)$ является wo -непрерывным и что любая функция из V достигает на X своего максимума. Тогда X можно снабдить такой структурой компактного топологического пространства, что все функции из V будут полунепрерывны сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X_f = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$ и рассмотрим на X топологию τ , в которой множества X_f при $f \in V$ образуют базу замкнутых множеств. По определению все функции $f \in V$ полунепрерывны и достаточно проверить, что в условиях леммы множество X компактно.

Множества вида X_f при $f \in V$ будем называть *простыми*. Будем называть *цепочкой* семейство непустых замкнутых подмножеств пространства X , линейно упорядоченное по включению. Пересечение всех элементов цепочки Ω будем обозначать $\cap \Omega$. Будем говорить, что подмножество $Y \subset X$ пересекается с цепочкой, если Y пересекается с любым ее элементом.

1) Прежде всего заметим, что $\bigcap_{f \in F} X_f = X_{\wedge F}$ для любого $F \subset V$. Поэтому любое непустое замкнутое подмножество $Y \subset X$ является конечным объединением простых множеств.

2) Для любого подмножества $Y \subset X$ положим

$$[Y] = \wedge \{f \in V \mid f(x) \geq 1, x \in Y\} \in V.$$

Непосредственно видно, что $[Y] \preceq [Z]$ при $Y \subset Z$ и $Y = X_{[Y]}$ для простых Y . Кроме того, очевидно, $e^*([Y]) \geq 1$ при любом непустом Y .

3) Для любой цепочки Ω простых подмножеств пересечение $\cap \Omega$ непусто. В самом деле, в силу 2) семейство функций $F = \{[\omega] \mid \omega \in \Omega\}$ линейно упорядочено. Положим $g = \wedge F$. Поскольку $e^*(f) = 1$ при $f \in F$, то $e^*(g) \geq 1$, т.е. $\sup(g) \geq 1$. По условию существует такой $x \in X$, что $g(x) > 1$. Но тогда $x \in X_{[\omega]} = \omega$ при всех $\omega \in \Omega$ и, значит, $x \in \cap \Omega$, что и требовалось.

4) Если замкнутое подмножество $Y \subset X$ пересекается с цепочкой Ω , то существует простое подмножество Z , лежащее в Y и пересекающееся с Ω . В самом деле, пусть $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ – разложение Y в объединение простых подмножеств. Если бы для каждого Y_i можно было найти элемент Ω , не пересекающийся с ним, то минимальный из этих элементов не пересекался бы с Y , что невозможно. Следовательно, хотя бы одно из Y_i пересекается с Ω , что и требовалось.

5) Если замкнутое подмножество $Y \subset X$ пересекается с цепочкой Ω , состоящей из простых подмножеств, то Y пересекается с $\cap \Omega$. В самом деле, учитывая 4), можно считать Y простым. В этом случае семейство простых подмножеств $\{Y \cap \omega \mid \omega \in \Omega\}$ удовлетворяет условию пункта 3) и потому имеет непустое пересечение.

6) Для доказательства компактности достаточно проверить, что любая цепочка Ω имеет непустое пересечение. Упорядоченное по включению множество всех цепочек, состоящих из простых подмножеств, пересекающихся с Ω , очевидно, удовлетворяет условию леммы Цорна (см. [5]) и, следовательно, содержит максимальную цепочку. Пусть Λ – такая цепочка и $Y = \cap \Lambda$. В силу 3) Y – непустое простое подмножество. Пусть $\omega \in \Omega$. Так как ω пересекается с Λ , то в силу 5) ω пересекается с Y . Если при этом $Y \cap \omega \neq Y$, то это семейство $\Lambda \cup \{Y \cap \omega\}$ будет цепочкой простых подмножеств, пересекающихся с Ω , что противоречит максимальной Λ . Таким образом, $Y \subset \omega$ при $\omega \in \Omega$. Следовательно, $Y \subset \cap \Omega$ и Ω имеет непустое пересечение, что и требовалось. Лемма доказана.

В качестве следствия получается следующая теорема вложения.

ТЕОРЕМА 6. *Всякое архимедово пространство V может быть реализовано как $\wedge$ -подпространство пространства $USC(X, K)$ для компактного топологического пространства X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – ω -непрерывный невырожденный функционал. Положим $X = \{x \in V \mid \varphi(x) = 1\}$ и для $v \in V$ определим функцию $\hat{v} \in B(X, K)$ формулой

$$\hat{v}(x) = [v : x] = \sup\{k \in K \mid k \odot x \preceq v\}.$$

Прямая проверка с учетом очевидного тождества $v = \bigoplus_{x \in X} [v : x] \odot x$ показывает, что отображение $v \mapsto \hat{v}$ является однородным, сохраняющим порядок вложением (но не гомоморфизмом) пространства V в $B(X, K)$. отождествим V с его образом в $B(X, K)$ относительно этого вложения. Достаточно проверить, что V удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Если $F \subset V$, $x \in X$, $a = \wedge\{f(x) \mid f \in F\}$, то $a \odot x \preceq f$ при всех $f \in F$, откуда $a \odot x \preceq \wedge F$ и, следовательно, $a \preceq (\wedge F)(x)$. Поскольку обратное неравенство очевидно, получаем, что

$$(\wedge F)(x) = \wedge\{f(x) \mid f \in F\}.$$

Таким образом, V является $\wedge$ -подпространством в $B(X, K)$.

Учитывая обобщенную дистрибутивность умножения на скаляры, получим, что $v(x) \odot x \preceq v$, откуда

$$v(x) = \varphi(v(x) \odot x) \preceq \varphi(v).$$

Поэтому $\sup\{v(x) \mid x \in X\} \preceq \varphi(v)$. С другой стороны, при любом ненулевом $v \in V$ по построению $\varphi(v)^{-1} \odot v \in X$ и $v(\varphi(v)^{-1} \odot v) \succeq \varphi(v)$. Следовательно, при ненулевых v функция $v(x)$ достигает максимума в точке $\varphi(v)^{-1} \odot v \in X$ и этот максимум равен $\varphi(v)$. Поскольку $\mathbf{0}(x) = \mathbf{0}$ при всех $x \in X$, получаем, что все функции из V достигают максимума на X . Таким образом, все условия предыдущей леммы выполнены, что и требовалось.

Автор благодарен Г. Л. Литвинову за помощь и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, “Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход”, *Докл. РАН*, **363**:3 (1998), 298–300.

- [2] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, “Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход”, *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 573–586.
- [3] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, “Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход”, *Матем. заметки*, **69**:5 (2001), 758–797.
- [4] Л. Фукс, *Частично упорядоченные алгебраические системы*, Мир, М., 1965.
- [5] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [6] Г. Б. Шпиз, “Теорема о собственном векторе в идемпотентных пространствах”, *Докл. РАН*, **374**:1 (2000), 26–28.
- [7] Г. Б. Шпиз, “Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полуполях”, *УМН*, **55**:5 (2000), 185–186.

Г. Б. Шпиз

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ

E-mail: shpiz@theory.sinp.msu.ru

Поступило

22.11.2006

Исправленный вариант

09.02.2007