Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, Т. В. Родионов, Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 6, 809–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3998>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:28:18

Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций

В. К. Захаров, Т. В. Родионов

Э. Борелем, А. Лебегом и Ф. Хаусдорфом были описаны все равномерно замкнутые семейства вещественнозначных функций на множестве T , обладающие теми же алгебраическими свойствами, что и множество всех непрерывных функций относительно открытой топологии на T . Ими оказались в точности семейства всех функций, измеримых относительно некоторых σ -аддитивных и мультипликативных ансамблей на T . Задача об описании всех равномерно замкнутых семейств ограниченных функций, обладающих теми же алгебраическими свойствами, что и множество всех непрерывных ограниченных функций, оставалась нерешенной. В статье дано решение этой задачи с помощью нового класса функций, равномерных относительно некоторых мультипликативных семейств конечных покрытий на T . Доказано несовпадение класса равномерных функций с классом измеримых функций.

Библиография: 11 названий.

Введение. Пусть T – множество, $F(T)$ – семейство всех функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, $F_b(T)$ – его подсемейство всех ограниченных функций, $\mathbf{1}: T \rightarrow \{1\}$ – единичная функция, $\mathcal{G}$ – открытая топология на T , $C(T, \mathcal{G})$ – семейство всех непрерывных функций и $C_b(T, \mathcal{G})$ – его подсемейство всех непрерывных ограниченных функций.

Весьма давно было установлено, что семейство $C(T, \mathcal{G}) \subset F(T)$ обладает следующими замечательными свойствами:

- 1) $\mathbf{1} \in C(T, \mathcal{G})$;
- 2) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно умножения на вещественные числа;
- 3) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно сложения, умножения, супремума и инфимума;
- 4) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно равномерной сходимости последовательностей;
- 5) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно *разрешенного деления*, т.е. для любой функции $f \in C(T, \mathcal{G})$ такой, что $f(t) \neq 0$ для любого $t \in T$, справедливо $\mathbf{1}/f \in C(T, \mathcal{G})$.

Семейство $C_b(T, \mathcal{G})$ обладает свойствами 1)–4) и свойством

- 5') $C_b(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно *ограниченного разрешенного деления*, т.е. для любой функции $f \in C_b(T, \mathcal{G})$ такой, что $f(t) \neq 0$ для любого $t \in T$ и $\mathbf{1}/f \in F_b(T)$, справедливо $\mathbf{1}/f \in C_b(T, \mathcal{G})$.

Любое семейство $A(T)$ в $F(T)$ со свойствами 1)–5) было названо Хаусдорфом *полным* (см. [1], [2; 37.IX]). Будем называть его *нормальным*. Любое семейство $A(T)$ в $F_b(T)$ со свойствами 1)–4) и 5') будем называть *ограниченно нормальным*.

Понятие непрерывной функции было затем расширено до понятия измеримой функции.

Пусть $\mathcal{P}(T)$ – множество всех подмножеств множества T . Любое множество $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(T)$ назовем *ансамблем* на T . В работах 1898–1904 гг. Э. Борель и А. Лебег для любого ансамбля $\mathcal{S}$ ввели понятие *$\mathcal{S}$ -измеримой функции* $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. такой, что $f^{-1}[x, y[\in \mathcal{S}$ для любого открытого интервала $]x, y[\subset \mathbb{R}$. Семейство всех $\mathcal{S}$ -измеримых функций на T обозначим через $M(T, \mathcal{S})$ (см. [2; §37 и указатель литературы]). Ясно, что $C(T, \mathcal{G}) = M(T, \mathcal{G})$.

Если $\mathcal{S}$ – произвольный ансамбль на множестве T , то через $\mathcal{S}_\sigma$ (соответственно $\mathcal{S}_\sigma$) обозначается ансамбль, состоящий из всех конечных (соответственно счетных) объединений элементов из $\mathcal{S}$, а через $\mathcal{S}_\eta$ обозначается ансамбль, состоящий из всех конечных пересечений элементов из $\mathcal{S}$. Если $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$ (соответственно $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$), то ансамбль $\mathcal{S}$ называется *аддитивным* (соответственно *σ -аддитивным*), а если $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\eta$, то – *мультипликативным*. Мультипликативный ансамбль, содержащий $\emptyset$ и T , называется *основой* на T , σ -аддитивная основа называется *σ -основой*. Борелем и Лебегом было доказано, что для всякой σ -основы $\mathcal{S}$ семейство $M(T, \mathcal{S})$ является нормальным, а семейство $M_b(T, \mathcal{S}) \equiv M(T, \mathcal{S}) \cap F_b(T)$ является ограничено нормальным.

В связи с наличием таких полезных свойств у семейств $M(T, \mathcal{S})$ и $M_b(T, \mathcal{S})$ возникли два естественных вопроса:

- (i) каковы все нормальные семейства $A(T) \subset F(T)$, т.е. обладающие свойствами 1)–5)?
- (ii) каковы все ограничено нормальные семейства $A(T) \subset F_b(T)$, т.е. обладающие свойствами 1)–4) и 5')?

Ответ на первый вопрос был дан Хаусдорфом в 1914 г. (см. [1], [2; 37.IX, теорема 8]). Им было доказано, что класс всех нормальных семейств на множестве T в точности совпадает с классом всех семейств измеримых функций на T . Теорема Хаусдорфа показала естественность класса измеримых функций.

С вопросами (i) и (ii) тесно связаны также вопросы:

- (iii) какова нормальная оболочка произвольного семейства $A(T) \subset F(T)$?
- (iv) какова ограничено нормальная оболочка произвольного ограниченного семейства $A(T) \subset F_b(T)$?

Ясно, что эти вопросы являются более сложными, чем соответствующие вопросы (i) и (ii).

Ответ на вопрос о виде нормальной оболочки $N(A(T))$ произвольного семейства $A(T) \subset F(T)$, т.е. наименьшего из всех нормальных семейств $B(T)$, содержащих семейство $A(T)$, был также дан Хаусдорфом в 1914 г. (см. [1], [2; 37.IX, теорема 7]) в терминах лебеговских множеств семейства $A(T)$.

Доказательства Хаусдорфа существенным образом опирались на наличие у нормального семейства $A(T)$ сильного свойства делимости 5). Приведем уточненные формулировки теорем Хаусдорфа, для чего введем еще несколько обозначений и понятий.

Для функции $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ множество $\text{coz } f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ называется *ко-нульмножеством функции* f . Для семейства $A(T)$ функций на множестве T ан-

самбль $\text{Coz } A(T) \equiv \{\text{coz } f \mid f \in A(T)\}$ называется ансамблем конульмножеств семейства $A(T)$.

ТЕОРЕМА ХАУСДОРФА 1. Пусть T – множество и $A(T)$ – подсемейство в $F(T)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) семейство $A(T)$ является нормальным;
- 2) $A(T) = M(T, \mathcal{S})$ для некоторой σ -основы $\mathcal{S}$;
- 3) $A(T) = M(T, \{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T))_{\eta\sigma})$.

Для любого семейства $A(T) \subset F(T)$ рассмотрим семейство $A(T)_*$ всех функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для f существуют функция $u \in A(T)$ и числа $x < y$ из $\mathbb{R}$ такие, что

$$f = ((u - x\mathbf{1}) \vee 0) \wedge ((y\mathbf{1} - u) \vee 0).$$

ТЕОРЕМА ХАУСДОРФА 2. Пусть T – множество и $A(T)$ – подсемейство в $F(T)$. Тогда семейство $M(T, \{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T)_*)_{\eta\sigma})$ является нормальной оболочкой $N(A(T))$ семейства $A(T)$.

Ответы на второй (ii) и четвертый (iv) вопросы задержались на многие годы. Причина состоит в том, что у ограниченно нормального семейства $A(T) \subset F_b(T)$ свойство делимости 5') является гораздо более слабым, чем свойство делимости 5) у нормального семейства $A(T) \subset F(T)$. Поэтому доказательства Хаусдорфа оказываются неприменимыми в ограниченном случае.

В настоящей статье даются полные ответы на эти вопросы. Для этого вводится новый класс функций, равномерных относительно мультипликативных семейств $\mathcal{C}$ конечных покрытий, обобщающий класс ограниченных измеримых функций. Доказывается, что класс всех ограниченно нормальных семейств на множестве T в точности совпадает с классом всех семейств $\mathcal{C}$ -равномерных функций на T (см. теорему 1). Тем самым показывается естественность класса $\mathcal{C}$ -равномерных функций. В теореме 2 описывается вид ограниченно нормальной оболочки произвольного семейства $A(T) \subset F_b(T)$.

В связи с вопросами (ii) и (iv) возникает также вопрос:

- (v) является ли класс $\mathcal{C}$ -равномерных функций действительно новым, т.е. отличаются ли классы $\mathcal{S}$ -измеримых ограниченных функций и $\mathcal{C}$ -равномерных функций?

Ответ на этот вопрос дается в п. 3 данной работы. Доказывается, что класс семейств равномерных функций строго шире класса семейств измеримых ограниченных функций (см. теорему 3).

Ответы на вопросы (ii) и (iv) были анонсированы в [3].

В работе использованы понятия и обозначения, принятые в современной теории классов и множеств (см., например, [4]). Для удобства читателя приведем некоторые необходимые определения.

Переобозначение знаковочетания σ знаковочетанием τ обозначается через $\sigma \equiv \tau$ или $\tau \equiv \sigma$. Знакосочетание $\{t \mid \varphi(t)\}$ обозначает класс, состоящий из элементов x таких, что существует $y(x \in y) \wedge \varphi(y)$, т.е. состоящий из множеств, обладающих свойством φ . Наряду с $\{t \mid t \in X \wedge \varphi(t)\}$ пишут также $\{t \in X \mid \varphi(t)\}$. Через знаковочетание $\{t \mid \varphi(t)\}$ определяются все теоретико-множественные операции:

- $\emptyset \equiv \{t \mid t \neq t\}$,
- $\{x\} \equiv \{t \mid t = x\}$,
- $\{x, y\} \equiv \{t \mid t = x \vee t = y\}$,
- $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

- $\mathcal{P}(X) \equiv \{t \mid t \subset X\}$,
- $X \cup Y$,
- $X \cap Y$,
- $X \setminus Y$,
- $X \times Y \equiv \{t \mid \exists x \in X \exists y \in Y (t = (x, y))\}$.

Натуральные числа определяются как следующие множества:

$$0 \equiv \emptyset, \quad 1 \equiv 0 \cup \{0\}, \quad 2 \equiv 1 \cup \{1\}, \quad \dots, \quad n+1 \equiv n \cup \{n\}, \quad \dots$$

При таком определении одновременно имеют место два свойства: $m \subset n+1$ и $m \in n+1$ для всех $m \leq n$ (т.е. $m \subset n$). Множество всех ненулевых натуральных чисел обозначается через $\mathbb{N}$.

Мы строго отличаем отображение $u: X \rightarrow Y$ из множества X в множество Y от его значения $y_x \equiv u(x) \in Y$ на элементе $x \in X$. Для отображения $u: X \rightarrow Y$ используется также индексное обозначение $u \equiv (y_x \in Y \mid x \in X)$, которое читается как *семейство* или *коллекция элементов множества Y , индексированных элементами множества X* . Множество членов $\{t \mid \exists x \in X (t = y_x)\}$ коллекции u обозначается через $\{y_x \in Y \mid x \in X\}$. Например, для трехчленной коллекции $u \equiv (a_i \in \mathbb{N} \mid i \in 3)$ такой, что $a_0 = 5$, $a_1 = 4$ и $a_2 = 5$, ее множество членов является двухэлементным множеством $\{a_i \mid i \in 3\} = \{4, 5\}$. Для коллекции подмножеств $u \equiv (A_i \in \mathcal{P}(A) \mid i \in I)$ множества A определим *операции объединения*

$$\bigcup (A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \exists i \in I (t \in A_i)\},$$

пересечения

$$\bigcap (A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \forall i \in I (t \in A_i)\}$$

и произведения

$$\prod (A_i \mid i \in I) \equiv \left\{ t \mid \left(t: I \rightarrow \bigcup (A_i \mid i \in I) \right) \wedge \forall i \in I (t(i) \in A_i) \right\}.$$

Если на множестве A определена бинарная операция сложения $+: A \times A \rightarrow A$, то для коллекции $(a_i \in A \mid i \in n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ по индукции определяется операция сложения

$$\sum (a_i \in A \mid i \in 2) \equiv a_0 + a_1, \quad \sum (a_i \in A \mid i \in n+1) \equiv \sum (a_i \in A \mid i \in n) + a_n.$$

Если на множестве A определен порядок $\leq$, то на A определяются частичные бинарные *операции супремума*

$$a \vee b \in \{t \in A \mid (t \geq a) \wedge (t \geq b) \wedge \forall c \in A ((c \geq a) \wedge (c \geq b) \Rightarrow c \geq t)\}$$

и инфимума

$$a \wedge b \in \{t \in A \mid (t \leq a) \wedge (t \leq b) \wedge \forall c \in A ((c \geq a) \wedge (c \leq b) \Rightarrow c \leq t)\}.$$

1. Равномерные функции относительно мультипликативного семейства покрытий. Семейство $\mathcal{C}$ конечных покрытий множества T назовем *мультипликативным*, если для каждой конечной коллекции $(\pi_\alpha \in \mathcal{C} \mid \alpha \in A)$ покрытий $\pi_\alpha \equiv$

$(C_{\alpha i} \in \mathcal{P}(T) \mid i \in I_\alpha)$ множества T мы имеем $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A) \in \mathcal{C}$, где $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A)$ обозначает покрытие $(D_j \mid j \in J)$ такое, что

$$J \equiv \prod(I_\alpha \mid \alpha \in A) \quad \text{и} \quad D_j \equiv \bigcap(C_{\alpha j(\alpha)} \mid \alpha \in A) \quad \text{для каждого } j \in J.$$

Ясно, что это свойство достаточно проверять для случая двух покрытий $\pi_1 \equiv (C_{1i} \mid i \in I_1)$ и $\pi_2 \equiv (C_{2i} \mid i \in I_2)$ из $\mathcal{C}$. Тогда должно быть выполнено $\pi_1 \wedge \pi_2 \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathcal{C}$, где $J \equiv I_1 \times I_2$ и $D_j \equiv C_{1j(1)} \cap C_{2j(2)}$ для каждого $j \in J$. Отметим, что для того, чтобы не увеличивать этажи индексации, мы здесь и далее считаем, что предшествующие индексы задают область изменения последующих.

Для семейства $\mathcal{C}$ покрытий множества T рассмотрим его η -оболочку $\mathcal{C}_\eta$, состоящую из всех конечных коллекций $\pi \equiv (P_u \in \mathcal{P}(T) \mid u \in U)$ таких, что для π существует конечная коллекция $(\gamma_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$ конечных покрытий $\gamma_i \equiv (C_{im} \mid m \in M_i)$ множества T такая, что

$$U = \prod(M_i \mid i \in I) \quad \text{и} \quad P_u = \bigcap(C_{iu(i)} \mid i \in I) \quad \text{для каждого } u \in U.$$

ЛЕММА 1. Пусть T – множество и $\mathcal{C}$ – семейство конечных покрытий множества T . Тогда каждая коллекция $\pi \in \mathcal{C}_\eta$ является конечным покрытием T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу общей дистрибутивности объединения относительно пересечения имеем

$$\begin{aligned} \bigcup(P_u \mid u \in U) &= \bigcup\left(\bigcup(C_{iu(i)} \mid i \in I) \mid u \in U\right) \\ &= \bigcap\left(\bigcup(C_{im} \mid m \in M_i) \mid i \in I\right) = \bigcap(T \mid i \in I) = T. \end{aligned}$$

Так как каждое множество M_i является конечным, их произведение $U \equiv \prod(M_i \mid i \in I)$ тоже конечно.

ЛЕММА 2. Пусть T – множество и $\mathcal{C}$ – семейство конечных покрытий множества T . Тогда семейство $\mathcal{C}_\eta$ конечных покрытий T мультипликативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\pi_\alpha \in \mathcal{C}_\eta \mid \alpha \in A)$ – конечная коллекция. По определению

$$\pi_\alpha \equiv (P_{\alpha u} \subset T \mid u \in U_\alpha) \quad \text{для } \alpha \in A,$$

и для каждого π_α существует конечная коллекция $(\gamma_{\alpha i} \in \mathcal{C} \mid i \in I_\alpha)$ покрытий такая, что

$$U_\alpha = \prod(M_{\alpha i} \mid i \in I_\alpha) \quad \text{и} \quad P_{\alpha u} = \bigcap(C_{\alpha iu(i)} \mid i \in I_\alpha) \quad \text{для каждого } u \in U_\alpha.$$

Рассмотрим конечное множество

$$J \equiv \bigcap(I_\alpha \times \{\alpha\} \mid \alpha \in A).$$

По свойству общей ассоциативности произведения имеют место следующие биекции:

$$W \equiv \prod(U_\alpha \mid \alpha \in A) \rightleftharpoons \prod\left(\prod(M_{\alpha i} \mid (i, \alpha) \in I_\alpha \times \{\alpha\} \mid \alpha \in A)\right) \rightleftharpoons \prod(M_j \mid j \in J) \equiv V,$$

где $M_j \equiv M_{\alpha i}$ для

$$j \equiv (i, \alpha) \in J_\alpha \equiv I_\alpha \times \{\alpha\}.$$

Рассмотрим конечную коллекцию $(\delta_j \mid j \in J)$ конечных коллекций $\delta_j \equiv (D_{jm} \mid m \in M_j)$ таких, что $D_{jm} \equiv C_{\alpha im}$ для $j \equiv (i, \alpha) \in J_\alpha$ и $m \in M_j \equiv M_{\alpha i}$. Так как $\delta_{(i, \alpha)} = (C_{\alpha im} \mid m \in M_{\alpha i})$, мы заключаем, что $\delta_j \in \mathcal{C}$ для каждого $j \in J$.

Рассмотрим множества $Q_v \equiv \bigcap (D_{jv(j)} \mid j \in J)$ и коллекцию $\varkappa \equiv (Q_v \mid v \in V) \in \mathcal{C}_\eta$. Если $v \in V$ получается в результате биекций из $w \in W$, то

$$\begin{aligned} \bigcap (P_{\alpha w(\alpha)} \mid \alpha \in A) &= \bigcap \left(\bigcap (C_{\alpha iw(\alpha)(i)} \mid i \in I_\alpha) \mid \alpha \in A \right) \\ &= \bigcap \left(\bigcap (D_{jv(j)} \mid j \in J_\alpha) \mid \alpha \in A \right) = \bigcap (D_{jv(j)} \mid j \in J) = Q_v. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\bigwedge (\pi_\alpha \mid \alpha \in A) = \varkappa$. Следовательно, $\bigwedge (\pi_\alpha \mid \alpha \in A) \in \mathcal{C}_\eta$.

Для функции $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, множества $P \subset T$ и коллекции множеств $\pi \equiv (P_i \subset T \mid i \in I)$ рассмотрим числа

$$\omega(f, P) \equiv \sup\{|f(s) - f(t)| \mid s, t \in P\} \quad \text{и} \quad \omega(f, \pi) \equiv \sup\{\omega(f, P_i) \mid i \in I\},$$

называемые *колебанием функции f на множестве P и на коллекции π* соответственно.

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторое семейство конечных покрытий множества T . Функцию f назовем *равномерной относительно семейства $\mathcal{C}$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие $(C_i \mid i \in I) \in \mathcal{C}$ такое, что $\omega(f, C_i) < \varepsilon$ для любого $i \in I$. Семейство всех таких функций обозначим через $U(T, \mathcal{C})$.

Если $\mathcal{S}$ – ансамбль на T , то он порождает семейство $\text{Cov } \mathcal{S}$ конечных покрытий $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T . Функция f называется *равномерной относительно ансамбля $\mathcal{S}$* , если она является равномерной относительно семейства $\text{Cov } \mathcal{S}$. Эти функции были введены Захаровым в работе [5]. Далее вместо $U(T, \text{Cov } \mathcal{S})$ будем писать просто $U(T, \mathcal{S})$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на T . Тогда

$$M_b(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S}) \subset M_b(T, \mathcal{S}_\sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in M_b(T, \mathcal{S})$. Тогда $f[T] \subset]-a, a[$ для некоторого $a > 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положительное натуральное число n такие, что $2a/n < \varepsilon$. Рассмотрим множества

$$C_i \equiv f^{-1} \left[\left] \frac{a(i-1)}{n}, \frac{a(i+1)}{n} \right[\right] \in \mathcal{S}, \quad |i| \in n.$$

Ясно, что $\bigcap (C_i \mid i \in n) = T$ и $\omega(f, C_i) \leq 2a/n < \varepsilon$. Таким образом, $f \in U(T, \mathcal{S})$.

Теперь пусть $f \in U(T, \mathcal{S})$. Это означает, что для каждого $\varepsilon_n \equiv 1/n$ найдется конечное покрытие $\pi_n \equiv (C_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества T такое, что $\omega(f, \pi_n) < \varepsilon_n$. Отсюда видно, что f ограничена. Возьмем произвольные действительные числа $x < y$ и рассмотрим множества

$$\begin{aligned} E &\equiv f^{-1}[x, y[, \quad E_n \equiv f^{-1}[[x + \varepsilon_n, y - \varepsilon_n], \\ J_n &\equiv \{i \in I_n \mid C_{ni} \cap E_n \neq \emptyset\}, \quad \tilde{E}_n \equiv \bigcup (C_{ni} \mid i \in J_n). \end{aligned}$$

Если $t \in \tilde{E}_n$, то $t \in C_{ni}$ для некоторого $i \in J_n$. Следовательно, существует $s \in C_{ni} \cap E_n$. Далее, имеем $f(t) < f(s) + \varepsilon_n < y$ и $f(t) > f(s) - \varepsilon_n > x$, т.е. $t \in E$. Таким образом, $\tilde{E}_n \subset E$. Отсюда следует, что

$$E \subset \bigcap (E_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset \bigcup (\tilde{E}_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset E,$$

т.е.

$$E = \bigcup (\tilde{E}_n \mid n \in \mathbb{N}).$$

В итоге, поскольку $\tilde{E}_n \in \mathcal{S}_\sigma$, получаем, что $E \in \mathcal{S}_\sigma$. Последнее приводит к заключению, что $f \in M_b(T, \mathcal{S}_\sigma)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{S}$ – σ -аддитивный ансамбль на множестве T . Тогда имеем $U(T, \mathcal{S}) = M_b(T, \mathcal{S})$.

Класс семейств $U(T, \mathcal{S})$ функций, равномерных относительно ансамблей $\mathcal{S}$, оказался полезным при решении ряда классических задач в теории функций и теории меры (подробнее см. в конце статьи и в [6]). Однако этот класс не давал ответа на вопрос (ii). Более широкий класс семейств $U(T, \mathcal{C})$ функций, равномерных относительно семейств конечных покрытий $\mathcal{C}$, позволяет дать ответ на этот вопрос.

Если последовательность $(f_n \mid n \in \omega_0)$ сходится к $f \in F(T)$ равномерно на T , то будем писать

$$f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \omega_0).$$

Покрытие $(T_i \equiv T \mid i \in \{i\})$ будем называть *одноэлементным*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если семейство конечных покрытий $\mathcal{C}$ мультипликативно и содержит одноэлементное покрытие, то семейство функций $U(T, \mathcal{C})$ является ограничено нормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\mathbf{1} \in A(T) \equiv U(T, \mathcal{C})$. Зафиксируем функции $f, g \in A(T)$ и число $\varepsilon > 0$. Пусть $|f| \leq a\mathbf{1}$ и $|g| \leq b\mathbf{1}$ для некоторых чисел a и b .

Пусть $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathcal{C}$ такое, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in C_i$, то

$$|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r||f(s) - f(t)| \leq |r|\omega(f, \pi).$$

Следовательно, $\omega(rf, \pi) \leq |r|\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Поэтому $rf \in A(T)$.

Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathcal{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathcal{C}$ такие, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leq |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leq \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa).$$

Следовательно,

$$\omega(f+g, \pi \wedge \varkappa) \leq \omega(f, \pi) + \omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Так как $\mathcal{C}$ мультипликативно, то $\pi \wedge \varkappa \in \mathcal{C}$. Значит, $f+g \in A(T)$.

Аналогичным образом, по неравенству Биркгофа имеем

$$\begin{aligned} |(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| &\leq |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \\ &\leq |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leq \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega(f \vee g, \pi \wedge \varkappa) \leq \omega(g, \varkappa) + \omega(f, \pi) < \varepsilon.$$

Значит, $f \vee g \in A(T)$.

Точно так же проверяется, что $f \wedge g \in A(T)$.

Рассмотрим числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2b$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2a$. Для них существуют покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathcal{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathcal{C}$ такие, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, \varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s, t \in C_i \cap D_j$, то

$$\begin{aligned} |(fg)(s) - (fg)(t)| &= |(f(s)g(s) - f(t)g(s)) + (f(t)g(s) - f(t)g(t))| \\ &\leq |g(s)||f(s) - f(t)| + |f(t)||g(s) - g(t)| \leq b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega(fg, \pi \wedge \varkappa) \leq b\omega(f, \pi) + a\omega(g, \varkappa) < \varepsilon.$$

Значит, $fg \in A(T)$.

Предположим, что $f(t) \neq 0$ для любого $t \in T$ и $1/|f| \leq c1$ для некоторого числа c . Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/c^2$ существует покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathcal{C}$ такое, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in C_i$, то

$$\left| \left(\frac{1}{f} \right)(s) - \left(\frac{1}{f} \right)(t) \right| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)||f(t)|} \leq c^2 \omega(f, \pi).$$

Следовательно,

$$\omega\left(\frac{1}{f}, \pi\right) \leq c^2 \omega(f, \pi) < \varepsilon.$$

Поэтому $1/f \in A(T)$.

Теперь предположим, что $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \omega_0)$ для некоторой последовательности $(f_n \mid n \in \omega_0)$ $\mathcal{C}$ -равномерных функций. Для всякого $\varepsilon > 0$ определим такое число $m \in \omega_0$, что $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ для всех $n \geq m$. Рассмотрим такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathcal{C}$, что $\omega(f_m, \pi) < \varepsilon/3$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &= |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \\ &\leq |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| \\ &\quad + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{для всех } s, t \in C_i. \end{aligned}$$

Следовательно, $\omega(f, \pi) < \varepsilon$ и, таким образом, функция f также лежит в $U(T, \mathcal{C})$.

2. Характеризация ограничено нормальных семейств и оболочек. Введем обозначения

$$B(T)_+ \equiv \{h \in B(T) \mid h(t) > 0 \forall t \in T\} \quad \text{и} \quad B_b(T) \equiv A(T) \cap F_b(T)$$

для произвольного семейства $B(T) \subset F(T)$.

ЛЕММА 4. Пусть семейство $A(T)$ функций на множестве T обладает свойствами 1)-3) из введения. Тогда $A(T)_* = A_b(T)_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $0 \leq f \leq (y-x)1$ мы заключаем, что $A(T)_* \subset A_b(T)_+$. Обратно, пусть $u \in A_b(T)_+$. Возьмем $x \equiv 0$ и число y такое, что $y1 \geq 2u$. Рассмотрим функцию

$$f \equiv ((u - x1) \vee 0) \wedge ((y1 - u) \vee 0) \in A(T)_*.$$

Так как $(y1 - u) \vee 0 \geq u$, то $f = u$. Значит, $u \in A(T)_*$.

Для функции $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ множество

$$\text{coz}_n f \equiv \left\{ t \in T \mid |f(t)| > \frac{1}{n} \right\}$$

для $n \in \mathbb{N}$ называется n -м конульмножеством функции f .

Для семейства $A(T) \subset F_b(T)$ рассмотрим семейство $\text{Cov } A(T)$ всех конечных покрытий $\varkappa \equiv (C_i \mid i \in I)$ множества T таких, что или $\varkappa = (T_i \equiv T \mid i \in \{i\})$, или для $\varkappa$ существуют конечная коллекция $(f_i \in A(T) \mid i \in I)$ и число $l \in \mathbb{N}$ такие, что $C_i = \text{coz } f_i$ и $(\text{coz}_l f_i \mid i \in I)$ является покрытием T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть T – множество и $A(T)$ – ограниченно нормальное семейство ограниченных функций на T . Тогда

$$A(T) = U(T, \text{Cov } A(T)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале проверим, что семейство $\mathcal{C} \equiv \text{Cov } A(T)$ является мультипликативным. Пусть $\varkappa \equiv (C_i \mid i \in I)$, $C_i = \text{coz } f_i$, $\bigcup (\text{coz}_l f_i \mid i \in I) = T$, $\rho \equiv (D_j \mid j \in J)$, $D_j = \text{coz } g_j$ и $\bigcup (\text{coz}_m g_j \mid j \in J) = T$.

Для $K \equiv I \times J$, $k \equiv (i, j) \in K$, $E_k \equiv C_i \cap D_j$ и $h_k \equiv f_i \wedge g_j \in A(T)$ справедливо $E_k = \text{coz } h_k$. Аналогично для $n \equiv \max(l, m)$ справедливо

$$\text{coz}_n h_k = \text{coz}_n f_i \cap \text{coz}_n g_j \supset \text{coz}_l f_i \cap \text{coz}_m g_j.$$

Следовательно,

$$\bigcup (\text{coz}_n h_k \mid k \in K) = T.$$

Это означает, что $\varkappa \wedge \rho \equiv (E_k \mid k \in K) \in \mathcal{C}$, т.е. $\mathcal{C}$ бинарно мультипликативно. По индукции доказывается, что оно (конечно) мультипликативно.

Поэтому по предложению 1 мы можем рассмотреть ограниченно нормальное семейство $B(T) \equiv U(T, \mathcal{C})$.

Пусть $u \in A(T)$ и $u(t) \in [-z, z]$ для каждого $t \in T$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $1/n < \varepsilon$. Рассмотрим числа $x_i \equiv -z + 2zi/3n$ для $i \in I \equiv 3n + 1$. Рассмотрим также функции

$$f_i \equiv ((u - x_{i-1} \mathbf{1}) \vee 0) \wedge ((x_{i+2} \mathbf{1} - u) \vee 0) \in A(T)_*$$

и коллекцию $\varkappa \equiv (C_i \mid i \in I)$ такую, что $C_i \equiv \text{coz } f_i$. Пусть $t \in T$. Тогда $u(t) \in [x_i, x_{i+1}]$ для некоторого i . Поэтому

$$f_i(t) \geq (x_i - x_{i-1}) \wedge (x_{i+2} - x_{i+1}) \geq \frac{1}{3}n > \frac{1}{4}n,$$

т.е. $t \in \text{coz}_{4n} f_i$. Это означает, что $(\text{coz}_{4n} f_i \mid i \in I)$ является покрытием T . Значит, $\varkappa \in \mathcal{C}$.

Пусть $s, t \in C_i$. Тогда $((u(s) - x_{i-1}) \vee 0) \wedge ((x_{i+2} - u(s)) \vee 0) = f_i(s) > 0$ влечет $x_{i-1} < u(s) < x_{i+2}$. Аналогично, $x_{i-1} < u(t) < x_{i+2}$. Следовательно, $|u(s) - u(t)| < x_{i+2} - x_{i-1} = 1/n$. Поэтому

$$\omega(u, C_i) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Значит, $A(T) \subset B(T)$.

Обратно, пусть $f \in B(T)_+$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению $\omega(f, \varkappa) < \varepsilon$ для некоторой конечной коллекции $(f_i \in A(T) \mid i \in I)$ и некоторого числа $l \in \mathbb{N}$ таких, что $\varkappa = (C_i \mid i \in I)$, $C_i = \text{coz } f_i$ и $\bigcup(\text{coz}_l f_i \mid i \in I) = T$. Рассмотрим числа $r_i \equiv \inf(f(t) \mid t \in C_i)$ и функции $g_i \equiv (r_i l f_i) \wedge (r_i \mathbf{1})$ и $g \equiv \sup(g_i \mid i \in I)$ из $A(T)$. Если $t \in D_i \equiv \text{coz}_l f_i$, то $g_i(t) = r_i$. Если $t \in C_i$, то $g_i(t) \leq r_i \leq f(t)$. Если $t \notin C_i$, то $g_i(t) = 0 \leq f(t)$. Следовательно, $g_i \leq f$. Поэтому

$$0 \leq f(t) - g(t) \leq f(t) - g_i(t) = f(t) - r_i < \varepsilon \quad \text{для каждого } t \in D_i.$$

Из доказанного факта следует, что, используя аксиому выбора, мы можем построить последовательность функций $(g_n \in A(T) \mid n \in \mathbb{N})$ таких, что $f = \text{u-lim}(g_n \mid n \in \mathbb{N})$. Так как $A(T)$ является равномерно замкнутым, мы заключаем, что $f \in A(T)$.

Если f – произвольная функция из $B(T)$, то

$$f = f_+ + f_-, \quad \text{где } f_+ \equiv f \vee 0 \in B(T)_+ \text{ и } -f_- \equiv -(f \wedge 0) \in B(T)_+.$$

По доказанному выше $f_+ \in A(T)$ и $-f_- \in A(T)$. Поэтому $f = f_+ + f_- \in A(T)$. Значит, $B(T) \subset A(T)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть T – множество и $A(T)$ – ограничено нормальное семейство на T . Тогда $A(T) = U(T, \text{Cov } A(T)_*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что

$$\text{Cov } A(T)_* = \text{Cov } A_b(T)_+ = \text{Cov } A(T).$$

Теперь мы применяем предложение 2.

Следующая теорема дает нам характеристику ограничено нормальных семейств $A(T) \subset F_b(T)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть T – множество и $A(T)$ – подсемейство в $F_b(T)$. Тогда следующие заключения равносильны:

- 1) семейство $A(T)$ является ограничено нормальным;
- 2) $A(T) = U(T, \mathcal{C})$ для некоторого мультипликативного семейства конечных покрытий $\mathcal{C}$, содержащего одноэлементное покрытие;
- 3) $A(T) = U(T, (\text{Cov } A(T))_\eta)$;
- 4) $A(T) = U(T, (\text{Cov } A(T)_*)_\eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\vdash$ 3). В доказательстве предложения 2 было доказано, что семейство $\mathcal{C} \equiv \text{Cov } A(T)$ мультипликативно. Поэтому $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\eta$. Следовательно, по предложению 2 $A(T) = U(T, \mathcal{C}_\eta)$.

3) $\vdash$ 2). Рассмотрим семейство $\mathcal{C} \equiv \text{Cov } A(T)$. По лемме 2 $\mathcal{C}_\eta$ мультипликативно.

2) $\vdash$ 1). Это следует из предложения 1.

1) $\vdash$ 4). Из леммы 4 следует, что $(\text{Cov } A(T)_*)_\eta = (\text{Cov } A_b(T)_+)_\eta = (\text{Cov } A(T))_\eta$.

Теперь необходимая дедукция следует из доказанной дедукции 1) $\vdash$ 3).

4) $\vdash$ 2). В силу леммы 2 семейство $\mathcal{C} \equiv (\text{Cov } A(T)_*)_\eta$ мультипликативно.

Теорема 1 позволяет описать ограничено нормальную оболочку $BN(A(T))$ произвольного семейства функций $A(T) \subset F_b(T)$, т.е. наименьшее из всех ограничено нормальных семейств $B(T)$, содержащих семейство $A(T)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть T – множество и $A(T)$ – подсемейство в $F_b(T)$. Тогда семейство $U(T, (\text{Cov } A(T)_*)_\eta)$ является ограничено нормальной оболочкой $BN(A(T))$ семейства $A(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 семейство $\mathcal{C} \equiv (\text{Cov } A(T)_*)_\eta$ мультипликативно. Поэтому $E(T) \equiv U(T, \mathcal{C})$ по предложению 2 является ограниченно нормальным семейством.

Кроме того, в доказательстве предложения 2 было установлено, что $A(T) \subset U(T, \text{Cov } A(T)_*)$. Поэтому $A(T) \subset E(T)$.

Наконец, пусть $B(T)$ – ограниченно нормальное семейство и $A(T) \subset B(T)$. По теореме 1 $B(T) = U(T, (\text{Cov } B(T)_*)_\eta)$. Так как $\text{Cov } A(T)_* \subset \text{Cov } B(T)_*$, мы получаем $E(T) \subset U(T, (\text{Cov } B(T)_*)_\eta) = B(T)$.

3. Различие между классами равномерных и измеримых функций. Этот пункт посвящен ответу на вопрос (v), поставленный во введении, и мы доказываем, что класс $\mathcal{C}$ -равномерных функций является действительно новым, и поэтому ответы на вопросы (ii) и (iv) нельзя было получить, оставаясь в рамках понятий, введенных Э. Борелем, А. Лебегом и Ф. Хаусдорфом.

Пусть T – множество. Определим класс

$$\mathfrak{M}_b(T) \equiv \{x \mid \exists \mathcal{S} \ (\mathcal{S} - \sigma\text{-основа} \wedge x = M_b(T, \mathcal{S}))\}$$

всех семейств ограниченных функций, измеримых относительно некоторой σ -основы $\mathcal{S}$ на множестве T . С этим классом связан новый класс

$$\mathfrak{U}(T) \equiv \{x \mid \exists \mathcal{C} \ (\mathcal{C} - \text{мультипликативное семейство покрытий,} \\ \text{содержащее одноэлементное покрытие} \wedge x = U(T, \mathcal{C}))\}$$

всех семейств функций, равномерных относительно некоторого мультипликативного семейства $\mathcal{C}$ покрытий множества T . Его естественным подклассом является класс

$$\mathfrak{U}_{en}(T) \equiv \{x \mid \exists \mathcal{S} \ (\mathcal{S} - \text{основа} \wedge x = U(T, \mathcal{S}))\}$$

всех семейств функций, равномерных относительно некоторой основы $\mathcal{S}$ на T .

Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ на T рассмотрим коансамбль со- $\mathcal{S}$, состоящий из всех элементов $R \in \mathcal{P}(T)$ таких, что $R = T \setminus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$. Аддитивный ансамбль $\mathcal{H}$ назовем алгеброй, если он замкнут относительно дополнений ($\mathcal{H} = \text{co-}\mathcal{H}$) и содержит T и $\emptyset$. Ясно, что алгебра $\mathcal{H}$ мультипликативна.

ТЕОРЕМА 3. Для $T \equiv [0, 1]$ справедливо строгое вложение $\mathfrak{M}_b(T) \subsetneq \mathfrak{U}_{en}(T)$, т.е. класс семейств равномерных функций строго шире класса семейств ограниченных измеримых функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – алгебра на T . Предположим, что существует такая σ -основа $\mathcal{Q}$, что $U(T, \mathcal{H}) = M_b(T, \mathcal{Q})$. В силу первой теоремы Хаусдорфа семейство $M(T, \mathcal{Q})$ нормально и имеет место равенство

$$M(T, \mathcal{Q}) = M(T, (\text{Coz } M(T, \mathcal{Q}))_{\eta\sigma}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} U(T, \mathcal{H}) &= M_b(T, \mathcal{Q}) = M_b(T, (\text{Coz } M(T, \mathcal{Q}))_{\eta\sigma}) \\ &= M_b(T, (\text{Coz } M_b(T, \mathcal{Q}))_{\eta\sigma}) = M_b(T, (\text{Coz } U(T, \mathcal{H}))_{\eta\sigma}). \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{H}$ – алгебра, легко заметить, что $\mathcal{H} \subset \text{Coz } U(T, \mathcal{H})$. Для этого достаточно взять произвольное множество $H \in \mathcal{H}$ и определить функцию f на T , положив

$f(t) \equiv 1$ при $t \in H$ и $f(t) \equiv 0$ при $t \in T \setminus H$. Следовательно, $\mathcal{H}_\sigma \subset (\text{Coz } U(T, \mathcal{H}))_{\eta\sigma}$ и

$$M_b(T, \mathcal{H}_\sigma) \subset M_b(T, (\text{Coz } U(T, \mathcal{H}))_{\eta\sigma}) = M_b(T, \mathcal{Q}) = U(T, \mathcal{H}).$$

Но $U(T, \mathcal{H}) \subset M_b(T, \mathcal{H}_\sigma)$ по лемме 3. Значит, $U(T, \mathcal{H}) = M_b(T, \mathcal{H}_\sigma)$.

Теперь докажем, что это равенство, вообще говоря, неверно. Для этого предъявим алгебру $\mathcal{H}$, для которой $U(T, \mathcal{H}) \neq M_b(T, \mathcal{H}_\sigma)$.

Определим ансамбль $\mathcal{R}_0$ на $T \equiv [0, 1]$, состоящий из всех собственных замкнутых интервалов $[x, y] \subset T$, $0 \leq x < y \leq 1$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{S}_0 \equiv \text{co-}\mathcal{R}_0$, состоящий из всех интервалов $[0, x[$, $0 < x < 1$, всех интервалов $]y, 1]$, $0 < y < 1$, и всех множеств вида $[0, x[\cup]y, 1]$, $0 < x < y < 1$.

Возьмем канторово совершенное множество $D \subset T$ и его дополнение $C \equiv T \setminus D$ и положим $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_0 \cup \{D\}$. Тогда $\mathcal{S} \equiv \text{co-}\mathcal{R} = \mathcal{S}_0 \cup \{C\}$. Легко видеть, что $(\mathcal{R}_0)_\eta = \mathcal{R}_0 \cup \{[x, x] \mid 0 < x < 1\}$ и $\mathcal{S}_1 \equiv (\mathcal{S}_0)_\eta$ состоит из всех S_1 таких, что $S_1 = \bigcup (I_m \mid m \in M)$ для некоторых конечных коллекций $(I_m \mid m \in M)$ непересекающихся интервалов I_m одного из следующих типов: $I_m = [0, x[$, $0 < x < 1$, $I_m =]x, y]$, $0 < x < y < 1$, или $I_m =]y, 1]$, $0 < y < 1$. Следовательно,

$$\mathcal{R}_\eta = \mathcal{R}_0 \cup \{[x, x] \mid 0 < x < 1\} \cup \{R \cap D \mid R \in \mathcal{R}_0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}_1 \cup \{S_1 \cap C \mid S_1 \in \mathcal{S}_1\}.$$

Далее видим, что $\mathcal{K} \equiv \{\tilde{S} \cap \tilde{R} \mid \tilde{S} \in \mathcal{S}_\eta \wedge \tilde{R} \in \mathcal{R}_\eta\} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' \cup \mathcal{K}'''$. Опишем ансамбли $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ и $\mathcal{K}'''$:

$$\mathcal{K}' \equiv \{S \cap R \mid S \in \mathcal{S}_1 \wedge R \in (\mathcal{R}_0)_\eta\},$$

т.е. $\mathcal{K}'$ состоит из замкнутых интервалов $[x, y]$, $0 \leq x < y \leq 1$, $[x, x]$, $0 < x < 1$, и всех конечных объединений следующих четырех видов:

$$\begin{aligned} [x_1, y_1[\cup]x_2, y_2[\cup \dots \cup]x_m, y_m], & \quad 0 \leq x_1 < y_1 < \dots < x_m < y_m \leq 1, \\ [x_1, y_1[\cup]x_2, y_2[\cup \dots \cup]x_m, y_m[, & \quad 0 \leq x_1 < y_1 < \dots < x_m < y_m < 1, \\]x_1, y_1[\cup]x_2, y_2[\cup \dots \cup]x_m, y_m], & \quad 0 < x_1 < y_1 < \dots < x_m < y_m \leq 1, \\]x_1, y_1[\cup]x_2, y_2[\cup \dots \cup]x_m, y_m[, & \quad 0 < x_1 < y_1 < \dots < x_m < y_m < 1; \\ \mathcal{K}'' \equiv \{K \cap D \mid K \in \mathcal{K}'\}, & \quad \mathcal{K}''' \equiv \{K \cap C \mid K \in \mathcal{K}'\}. \end{aligned}$$

Далее, мы будем строить функцию ξ на T такую, что $\xi \in M_b(T, \mathcal{K}_\sigma)$, но $\xi \notin U(T, \mathcal{K})$.

Рассмотрим множество $\mathcal{J}$ всех интервалов $[0, x]$, $|x, y|$ и $]y, 1]$ для всех $0 < x < y < 1$, где $|$ обозначает одну из скобок $]$, $[$. Ясно, что $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$.

Опишем алгоритм построения интервалов, составляющих множество C , это необходимо для корректного задания функций на C .

Рассмотрим множества A и B всех индексов α и β , состоящих из цифр 1 и 2, и определяемых по индукции следующим образом:

- 1) 1 является индексом β ;
- 2) если β известно, то $\beta 1$ и $\beta 2$ являются индексами α ;
- 3) если α известно, то $\alpha 1$ и $\alpha 2$ являются индексами β .

Опишем теперь алгоритм построения двух коллекций интервалов

$$(I_\alpha^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \alpha \in A) \quad \text{и} \quad (J_\beta^n \mid n \in \mathbb{N}, \beta \in B).$$

Шаг 1₁. Полагаем

$$J_1^1 \equiv \left[\frac{x_1^1}{3}, \frac{y_1^1}{3} \right], \quad \text{где } x_1^1 \equiv 1, \quad y_1^1 \equiv 2.$$

Пусть все интервалы

$$J_\beta^n \equiv \left[\frac{x_\beta^n}{3^n}, \frac{y_\beta^n}{3^n} \right]$$

определены на шаге n_1 , $n \in \mathbb{N}$.

Шаг $(n+1)_0$. Для каждого интервала J_β^n определим интервалы

$$I_{\beta 1}^{n+1} \equiv \left[\frac{u_{\beta 1}^{n+1}}{3^{n+1}}, \frac{v_{\beta 1}^{n+1}}{3^{n+1}} \right], \quad I_{\beta 2}^{n+1} \equiv \left[\frac{u_{\beta 2}^{n+1}}{3^{n+1}}, \frac{v_{\beta 2}^{n+1}}{3^{n+1}} \right],$$

полагая

$$u_{\beta 1}^{n+1} \equiv 3x_\beta^n - 2, \quad v_{\beta 1}^{n+1} \equiv 3x_\beta^n - 1, \quad u_{\beta 2}^{n+1} \equiv 3y_\beta^n + 1, \quad v_{\beta 2}^{n+1} \equiv 3y_\beta^n + 2.$$

Шаг $(n+1)_1$. Для каждого интервала

$$I_\alpha^{n+1} \equiv \left[\frac{u_\alpha^{n+1}}{3^{n+1}}, \frac{v_\alpha^{n+1}}{3^{n+1}} \right]$$

определим интервалы

$$J_{\alpha 1}^{n+1} \equiv \left[\frac{x_{\alpha 1}^{n+1}}{3^{n+1}}, \frac{y_{\alpha 1}^{n+1}}{3^{n+1}} \right], \quad J_{\alpha 2}^{n+1} \equiv \left[\frac{x_{\alpha 2}^{n+1}}{3^{n+1}}, \frac{y_{\alpha 2}^{n+1}}{3^{n+1}} \right],$$

полагая

$$x_{\alpha 1}^{n+1} \equiv 3u_\alpha^{n+1} - 2, \quad y_{\alpha 1}^{n+1} \equiv 3u_\alpha^{n+1} - 1, \quad x_{\alpha 2}^{n+1} \equiv 3v_\alpha^{n+1} + 1, \quad y_{\alpha 2}^{n+1} \equiv 3v_\alpha^{n+1} + 2.$$

Теперь определим функцию $\xi: T \rightarrow [0, 1]$, полагая $\xi(x) \equiv 1/2$ для всех $x \in J_1^1$, $\xi(x) \equiv 1/2^n$ для всех $x \in I_\alpha^n$, $\xi(x) \equiv 1 - 1/(2^n)$ для всех $x \in J_\beta^n$ и $\xi(x) \equiv 0$ для всех $x \in D$.

Для всякого открытого интервала $]a, b[\subset \mathbb{R}$ рассмотрим его прообраз $X \equiv \xi^{-1}]a, b[$. Он либо пуст, либо является счетным объединением открытых интервалов $]x, y[$ из $\mathcal{J}$, либо их объединением с множеством D . Так как $D \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$, то $X \in \mathcal{K}_\sigma$. Поэтому $\xi \in M_b(T, \mathcal{K}_\sigma)$.

Докажем, что $\xi \notin U(T, \mathcal{K})$. Рассмотрим последовательность интервалов

$$I_n \equiv \left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n} \right] \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Возьмем их середины $z_n \equiv (3/2) \cdot 3^{-n}$. Положим $Z \equiv \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Рассмотрим произвольное конечное покрытие $\mathcal{K} \equiv (K_p \in \mathcal{K} \mid p \in P)$ множества T . Предположим, что все множества $Z \cap K_p$ конечны. Тогда и множество $Z = \bigcup (Z \cap K_p \mid p \in P)$ конечно, что неверно. Следовательно, множество $Z \cap K_{p_0}$ бесконечно для некоторого $p_0 \in P$. Теперь можно определить числа

$$n_m \equiv \min\{n \mid n \geq m \wedge z_n \in K_{p_0}\}.$$

Возьмем бесконечную подпоследовательность $y_m \equiv z_{n_m} \equiv 3^{-n_m+1}/2$, лежащую в K_{p_0} .

Из $y_m \notin D$ следует, что $K_{p_0} \notin \mathcal{K}''$. Тогда $K_{p_0} \in \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'''$. Следовательно, существует конечный набор непересекающихся интервалов $(I_l \in \mathcal{J} \mid l \in L)$ таких, что

$$K_{p_0} = \bigcup (I_l \mid l \in L) \quad \text{или} \quad K_{p_0} = \bigcup (I_l \setminus D \mid l \in L).$$

Поскольку $I_l = [x_l, y_l]$ и L конечно, найдется такое $l_0 \in L$, что $x_{l_0} = \min(x_l \mid l \in L)$. Предположим, что $x_{l_0} > 0$. Из $y_m \rightarrow 0$ вытекает существование m_0 такого, что $y_m < x_{l_0}$ для всех $m \geq m_0$. Тогда $y_m \notin K_{p_0}$, что неверно. Таким образом, $x_{l_0} = 0$, т.е. $I_{l_0} = [0, y_{l_0}]$ для некоторого $y_{l_0} > 0$ и существует такое m_1 , что $y_m \in [0, y_{l_0}] \setminus D$ для всех $m \geq m_1$. Отсюда последовательно получаем, что $\omega(\xi, K_{p_0}) = 1$, $\omega(\xi, \mathcal{K}) = 1$ и, наконец, $\xi \notin U(T, \mathcal{K})$.

Легко видеть из определения равномерной функции, что $U(T, \mathcal{K}_\varphi) = U(T, \mathcal{K})$ для произвольного ансамбля $\mathcal{K}$. Таким образом, нами доказано, что

$$U(T, \mathcal{K}_\varphi) = U(T, \mathcal{K}) \neq M_b(T, \mathcal{K}_\sigma).$$

Докажем, что $\mathcal{H} \equiv \mathcal{K}_\varphi$ – алгебра. Действительно, мультипликативность $\mathcal{K}$ влечет аддитивность и мультипликативность $\mathcal{H}$. Далее, из равенства

$$\text{co-}\mathcal{K} = \{R \cup S \mid R \in \mathcal{R}_\varphi \wedge S \in \mathcal{S}_\varphi\}$$

следует, что $\text{co-}\mathcal{K} \subset \mathcal{R}_\varphi \cup \mathcal{S}_\varphi \subset \mathcal{K}_\varphi \equiv \mathcal{H}$ и $\text{co-}\mathcal{H} = (\text{co-}\mathcal{K})_\eta \subset \mathcal{H}$.

Итак, предъявлена алгебра $\mathcal{H}$ на T такая, что $U(T, \mathcal{H}) \neq M_b(T, \mathcal{H}_\sigma)$, что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 3. 1) В доказательстве теоремы 3 дан алгоритм построения и нумерации интервалов, дополнительных к канторову совершенному множеству, который использован для определения функции ξ .

2) Для любого замкнутого интервала $[x, y] \subset T$ такого, что $[x, y] \cap D \neq \emptyset$, и любого конечного покрытия $\mathcal{K} \equiv (K_p \in \mathcal{K} \mid p \in P)$ имеем

$$\omega(\xi, \mathcal{K}|_{[x, y]}) = 1, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}|_{[x, y]} \equiv (K_p \cap [x, y] \mid p \in P),$$

т.е. функция ξ не будет $\mathcal{K}$ -равномерной и на любом $[x, y]$.

3) Множество разрывов функции ξ совпадает с канторовым множеством D .

Из замечаний 2) и 3) следует, что функция ξ является, в некотором смысле, *антиподом сингулярной функции Лебега* (канторовой лестницы).

С помощью ансамбля, построенного в доказательстве теоремы 3, можно получить следующее усиление леммы 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существуют множество T и основа $\mathcal{S}$ на нем такие, что*

$$M_b(T, \mathcal{S}) \subsetneq U(T, \mathcal{S}) \subsetneq M_b(T, \mathcal{S}_\sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем множество T и ансамбль (основу) $\mathcal{K}$ из доказательства теоремы 3. В доказательстве теоремы 3 было установлено, что $U(T, \mathcal{K}) \neq M_b(T, \mathcal{K}_\sigma)$. Докажем, что $M_b(T, \mathcal{K}) \neq U(T, \mathcal{K})$.

Определим функцию $\eta: T \rightarrow [0, 1]$, полагая $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in J_1^1$, $\eta(x) \equiv 1/3^n$ при $x \in I_\alpha^n$, $\eta(x) \equiv 2/3^n$ при $x \in J_\beta^n$ и $\eta(x) \equiv 0$ для всех $x \in D$.

Берем произвольное $\varepsilon > 0$. Можно заметить, что

$$X \equiv \eta^{-1}[\varepsilon/2, 1] = J_1^1 \cup \bigcup (I_\alpha^n \mid \alpha \in A \wedge 1/3^n > \varepsilon/2) \cup \bigcup (J_\beta^n \mid \beta \in B \wedge 2/3^n > \varepsilon/2).$$

Рассмотрим конечную коллекцию $\pi \equiv (K_p \in \mathcal{J} \subset \mathcal{K} \mid p \in P)$, состоящую из указанных открытых интервалов. Для всякого $p \in P$ имеем $\omega(\eta, K_p) = 0$.

Так как открытые интервалы K_p не пересекаются, множество $Y \equiv \eta^{-1}[[0, \varepsilon/2]] = T \setminus X$ является конечным объединением непересекающихся замкнутых интервалов из $\mathcal{J}$. Обозначим эту коллекцию через $\varkappa \equiv (L_q \in \mathcal{J} \mid q \in Q)$. Ясно, что $\omega(\eta, L_q) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Рассмотрим покрытие $\rho \equiv (K_r \in \mathcal{J} \subset \mathcal{K} \mid r \in R)$ множества T , состоящее из всех элементов коллекций π и $\varkappa$. Тогда $\omega(\eta, \rho) < \varepsilon$, и потому $\eta \in U(T, \mathcal{K})$.

Убедимся теперь, что $\eta \notin M(T, \mathcal{K})$. Возьмем число $b \in]0, 1[$ и множество

$$B \equiv \eta^{-1}[-1, b] = \eta^{-1}[[0, b]].$$

Если $b = 1/3^n$ или $b = 2/3^n$ для некоторого n , то

$$B = \eta^{-1}[[0, b - 1/3^{n+2}]].$$

Если $2/3^{n+1} < b < 1/3^n$, то $B = \eta^{-1}[[0, b]]$. В обоих случаях

$$B = \eta^{-1}[[0, c]], \quad c \in]0, 1[.$$

Следовательно, множество B (как и множество Y) есть объединение конечной коллекции $\theta \equiv (H_f \in \mathcal{J} \mid f \in F)$ непересекающихся замкнутых интервалов. Крайние интервалы имеют вид $[0, u]$ и $[v, 1]$, где $0 < u < v < 1$, но интервалы такого вида не принадлежат ансамблю $\mathcal{K}$. Следовательно, $B \notin \mathcal{K}$ и $\eta \notin M(T, \mathcal{K})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конструкцию функции η из доказательства предложения 3 можно подправить так, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ получить $\mathcal{K}$ -равномерную функцию $\eta_\varepsilon: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которая будет иметь колебание $\omega(\eta_\varepsilon, [u, v]) = 1$ на любом интервале $[u, v] \subset [0, 1]$ с $v - u > \varepsilon$.

Новый класс равномерных функций относительно ансамблей $\mathcal{S}$ оказался полезен при решении ряда классических задач в теории функций и теории меры. Перечислим основные из них:

- 1) сходимостная бэровская классификация борелевских функций на произвольном топологическом пространстве, обобщающая классификации Лебега и Хаусдорфа для метрического пространства и классификацию Банаха для совершенного топологического пространства [7];
- 2) задача Хаусдорфа–Серпинского функционального описания ограниченно нормальной оболочки семейства ограниченных полунепрерывных функций [5], [6];
- 3) проблема Рисса–Радона характеристики интегралов для произвольного хаусдорфова пространства [8], [9];
- 4) критерии слабой компактности множеств ограниченных радоновских мер на произвольных тихоновском и хаусдорфовом пространствах [9], восходящие к критерию Прохорова [10];
- 5) функциональное описание семейства функций, интегрируемых по Риману, отличное от описания Лебега и пригодное для произвольного тихоновского топологического пространства с ограниченной радоновской мерой [6], [11].

В заключение отметим, что вопрос о совпадении классов $\mathfrak{U}_{en}(T)$ и $\mathfrak{U}(T)$ остается открытым, т.е. в настоящее время не известно можно ли для всякого семейства $U(T, \mathcal{C})$ функций, равномерных относительно мультипликативного семейства $\mathcal{C}$ конечных покрытий, указать такую основу $\mathcal{S}$, что $U(T, \mathcal{C}) = U(T, \mathcal{S})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Viet, Leipzig, 1914.
- [2] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, УРСС, М., 2004.
- [3] В. К. Захаров, “Теорема Хаусдорфа об измеримых функциях и новый класс равномерных функций”, *Тихонов и современная математика*, Тезисы докл. междунар. конф. (19–25 июня 2006 г.), Изд-во МГУ, М., 2006, 128–129.
- [4] T. Jech, *Set Theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [5] V. K. Zakharov, “Alexandrovian cover and Sierpiński extension”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **24**:2–3 (1989), 93–117.
- [6] В. К. Захаров, “Новые классы функций, связанные с общими семействами множеств”, *Докл. РАН*, **407**:2 (2006), 167–171.
- [7] В. К. Захаров, “Классификация борелевских множеств и функций для произвольного пространства”, *Докл. РАН*, **385**:5 (2002), 596–598.
- [8] В. К. Захаров, “Проблема характеристики радоновских интегралов”, *Докл. РАН*, **385**:6 (2002), 735–737.
- [9] В. К. Захаров, “Проблема Рисса–Радона характеристики интегралов и слабая компактность радоновских мер”, *Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям*, Тр. МИАН, **248**, Наука, М., 2005, 106–116.
- [10] Ю. В. Прохоров, “Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **1** (1956), 177–238.
- [11] В. К. Захаров, А. А. Серединский, “Новая характеристика интеграла Римана и функций, интегрируемых по Риману”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, № 2, 16–23.

В. К. Захаров

Центр новых информационных технологий МГУ
им. Ломоносова
E-mail: zakharov_valeriy@list.ru

Поступило

31.05.2007

Исправленный вариант

18.05.2008

Т. В. Родионов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: rodionovtv@mail.ru