Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Грушин, О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 360–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm40>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:09:35

УДК 517.95

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ФИНИТНО ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В. В. Грушин

В работе приведены достаточные условия для существования собственных значений финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечной цилиндрической области и их асимптотика по малому параметру. Рассматриваются также аналогичные вопросы для трубок – деформированных цилиндров.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть M – ограниченная связная область с бесконечно гладкой $(\nu - 1)$ -мерной границей в $\mathbb{R}^\nu$ с координатами $y = (y_1, \dots, y_\nu)$. В $\mathbb{R}^{\nu+1}$ с координатами $(x, y) = (x, y_1, \dots, y_\nu)$ рассмотрим цилиндрическую область $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, y \in M\}$. В Ω рассмотрим оператор

$$H_\varepsilon = -\Delta_D^\Omega + \varepsilon A(x, y, \partial_x, \partial_y) + \varepsilon^2 B(x, y, \varepsilon, \partial_x, \partial_y), \quad (1.1)$$

где Δ_D^Ω – оператор Лапласа в Ω , A и B – линейные дифференциальные операторы второго порядка с бесконечно дифференцируемыми по совокупности переменных $(x, y) \in \overline{\Omega}$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и аналитическими по ε коэффициентами. Будем предполагать, что коэффициенты A и B финитны и их носители расположены в $[0, l] \times \overline{M}$ при некотором $l > 0$. Обозначим через $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ подпространство функций из соболевского пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$, удовлетворяющих условию Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$ (определение пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$ см., например, [1, гл. 2]). Мы будем рассматривать H_ε как непрерывный оператор из $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, либо как неограниченный оператор в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$.

Основная задача этой статьи – получить достаточные условия для существования хотя бы одной собственной функции оператора H_ε при достаточно малых ε (т.е. слабо связанного состояния по терминологии из квантовой механики), а также получить асимптотические формулы для соответствующего собственного значения при ε стремящемся к нулю (соответствующие результаты содержатся в теореме 1.1). Затем эти результаты применяются к вопросу о существовании собственных значений оператора Лапласа с условиями Дирихле в трубках – областях, представляющих собой искривленные бесконечные цилиндры (при $\nu = 1$ цилиндрами называются полосы на плоскости). При переходе к подходящим образом выбранной системе координат трубка превращается в прямой цилиндр, а оператор Лапласа, записанный в таких координатах – в оператор вида (1.1), что позволяет для трубок использовать результаты, полученные для цилиндров.

Изучению связанных состояний в трубках и приложениям этих вопросов к задачам квантовой механики посвящено большое количество работ, см. [2]–[7] и цитированную там литературу. В работах В. П. Маслова [8], [9], Маслова и Е. М. Воробьева [10] была построена асимптотика собственных функций и квазистационарных собственных значений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых. Было показано, что подбирая нужным образом искривленность полоски и длину участка, где происходит искривление, можно добиться, чтобы существовало лишь одно собственное значение, т.е. резонатор имел лишь одну поперечную моду. Аналогичные вопросы исследовались для областей, ограниченных эквидистантными поверхностями. В работе В. В. Белова, С. Ю. Доброхотова, С. О. Синицына [2] с помощью канонического оператора Маслова построены быстро осциллирующие решения уравнения Шрёдингера в тонких трубках; изучению связанных состояний в трубках посвящены работы П. Дюкло и П. Экснера [3], М. Энтина и Л. Магарила [4], Экснера [5]–[7].

Сформулируем основной результат статьи. Пусть $\{\chi_n\}$ – полная ортонормированная система собственных функций $-\Delta_D^M$ (т.е. оператора Лапласа со знаком “минус” в области M с условием Дирихле),

$$0 < k_0^2 < k_1^2 \leq \dots \leq k_n^2 \leq k_{n+1}^2 \leq \dots$$

– соответствующие собственные значения. Хорошо известно, что основное собственное значение k_0^2 невырождено и $\chi_0(y)$ можно выбрать положительной в M (см., например, [11]). Функции $\chi_n(y)$ можно выбрать вещественными. Мы будем использовать стандартное обозначение

$$A_{mn}(x) = \int_M \bar{\chi}_m(y) A \chi_n(y) dy$$

и аналогичным образом определяются $B_{mn}(x, \varepsilon)$. Зададим числа μ_1 и μ_2 формулами

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} A_{00}(x) dx, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\chi}_0(y) \left(\mu_1 [A, x] + A \int_0^x (x - x') A_{00}(x') dx' + B_{00}(x, 0) \right) \chi_0(y) dx dy \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \bar{\chi}_0(y) A(\mathcal{E}_{\rho_n} * A_{n0}) \chi_n(y) dy, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $[A, x]$ – коммутатор оператора A и оператора умножения на x , знак “звездочка” означает свертку функций,

$$\mathcal{E}_{\rho_n}(x) = -\frac{1}{2\rho_n} e^{-\rho_n|x|}, \quad \rho_n = \sqrt{k_n^2 - k_0^2}. \quad (1.4)$$

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $\operatorname{Re} \mu_1 > 0$ или $\operatorname{Re} \mu_1 = 0$ и $\operatorname{Re} \mu_2 > 0$, то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение λ оператора H_ε , удовлетворяющее неравенству*

$$|\lambda - k_0^2| < \mu_0^2. \quad (1.5)$$

Это собственное значение невырожденно и имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику

$$\lambda = k_0^2 - \mu^2, \quad \mu = \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + O(\varepsilon^3). \quad (1.6)$$

В случае вещественных коэффициентов операторов A и B такое собственное значение вещественно.

Если же $\operatorname{Re} \mu_1 < 0$ или $\operatorname{Re} \mu_1 = 0$ и $\operatorname{Re} \mu_2 < 0$, то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ собственных значений, удовлетворяющих неравенству (1.5), для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ не существует.

Доказательство этой теоремы будет дано в п. 4. В следующем пункте мы приведем примеры того, как эту теорему можно применять к оператору Лапласа (с условием Дирихле) в некоторых полосках и трубках.

2. Собственные значения оператора Лапласа в трубках. В этом пункте мы рассмотрим оператор Лапласа с условием Дирихле в трубках – областях, представляющих собой деформированные цилиндры. Собственные значения здесь могут возникать не за счет добавления возмущающих операторов к оператору Лапласа, а за счет изменения геометрии области. Однако и в таких случаях можно применять теорему 1.1 после перехода в систему координат, в которой область становится цилиндром, т.е. производя “выпрямление” соответствующей трубки.

ПРИМЕР 2.1. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^{\nu+1}$, заданная неравенством

$$|y| < d(1 + \varepsilon b(x)),$$

где $b(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $d > 0$. Рассмотрим оператор Лапласа Δ_D^Ω в Ω с областью определения $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$. Пусть k_0^2 – наименьшее собственное значение оператора $-\Delta_D^M$, где M – шар $|y| < d$ в $\mathbb{R}^\nu$. Положим

$$\mu_1 = k_0^2 \int_{\mathbb{R}} b(x) dx. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $\mu_1 > 0$, то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение оператора $-\Delta_D^\Omega$, удовлетворяющее неравенству (1.5). Это собственное значение вещественно, невырожденно и имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику*

$$\lambda(\varepsilon) = k_0^2 - \varepsilon^2 \mu_1^2 + O(\varepsilon^3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор Δ_D^Ω симметрический, он может иметь только вещественные собственные значения. После преобразования

$$s = x, \quad \tau = y(1 + \varepsilon b(x))^{-1}$$

область Ω переходит в цилиндр $\tilde{\Omega} = \{(s, \tau): |\tau| \leq d\}$, а $-\Delta_D^\Omega$ переходит в оператор

$$\tilde{H}_\varepsilon = -h^{-2}\partial_\tau^2 - (\partial_s - \varepsilon \dot{b}(s)h^{-1}\partial_\tau)^2 = -\partial_s^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon A + \varepsilon^2 B,$$

где $h = 1 + \varepsilon b(s)$, а $\dot{b}$ обозначает производную от $b(s)$ по s . Непосредственный подсчет показывает, что

$$A = 2b\partial_\tau^2 + 2\dot{b}\tau\partial_s\partial_\tau + \ddot{b}\tau\partial_\tau, \quad A_{00} = -2k_0^2b(s).$$

Формула (1.2) совпадает с (2.1) и утверждение теоремы 2.1 вытекает из теоремы 1.1.

Отметим, что Δ_D^Ω совпадает с расширением по Фридрихсу Δ с $C_0^\infty(\Omega)$. При достаточно малых ε это вытекает из предложения 3.6, если его применить к оператору $h^{1/2}\tilde{H}_\varepsilon h^{-1/2}$, который унитарно эквивалентен оператору $-\Delta_D^\Omega$.

Без предположения о малости ε это можно доказать, используя соображения из замечания к предложению 3.5. Кроме того, результат теоремы 2.1 не изменится, если шар заменить произвольной областью M в $\mathbb{R}^\nu$ с указанными во введении свойствами, а Ω определить как

$$\Omega = \{(x, y): y(1 + \varepsilon b(x))^{-1} \in M\}.$$

ПРИМЕР 2.2. Пусть на координатной плоскости (x, y_1) в $\mathbb{R}^{\nu+1}$ имеется бесконечная несамопересекающаяся кривая Γ , заданная параметрическими уравнениями $x = X(s)$, $y_1 = Y_1(s)$, причем $X(s)$ и $Y_1(s)$ принадлежат $C^\infty(\mathbb{R})$, и в качестве s выбрана длина дуги (со знаком). Будем предполагать, что $\text{supp } \gamma \subset [0, l]$, $l > 0$, где $\gamma(s) = -\dot{X}(s)\ddot{Y}_1(s) + \dot{Y}_1(s)\ddot{X}(s)$ – кривизна (со знаком) кривой Γ . Последнее означает, что при $s \leq 0$ и $s \geq l$ кривая Γ превращается в прямые линии. Введем в окрестности Γ “нормальные” ортогональные координаты, связанные с кривой Γ :

$$x = X(s) - \tau_1 \dot{Y}(s), \quad y_1 = Y_1(s) + \tau_1 \dot{X}(s), \quad y_j = \tau_j, \quad 2 \leq j \leq \nu; \quad (2.2)$$

через h обозначим якобиан $h = 1 + \tau_1 \gamma(s)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{\nu+1}$ искривленную трубку Ω , которая получается как образ прямой трубки (цилиндра)

$$\tilde{\Omega} = \{(s, \tau): -\infty < s < +\infty, \tau \in M\}, \quad (2.3)$$

где M удовлетворяет условиям из введения.

Будем предполагать, что отображение (2.2) в $\tilde{\Omega}$ есть диффеоморфизм. Евклидова метрика записывается как

$$dx^2 + dy^2 = (1 + \gamma\tau_1)^2 ds^2 + d\tau^2,$$

поэтому оператор Лапласа в координатах (s, τ) имеет вид

$$h^{-1}\partial_s h^{-1}\partial_s + h^{-1}\partial_\tau h\partial_\tau, \quad h = 1 + \gamma\tau_1.$$

Мы будем рассматривать кривые Γ с малой кривизной, заменив γ на $\varepsilon\gamma$. Тогда $h = 1 + \varepsilon\gamma\tau_1$ и соответствующий оператор $\tilde{H}_\varepsilon$ запишется в виде

$$\tilde{H}_\varepsilon = -\partial_s^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon A + \varepsilon^2 B,$$

где

$$A = 2\gamma\tau_1\partial_s^2 + \dot{\gamma}\tau_1\partial_s - \gamma\partial_{\tau_1}, \quad (2.4)$$

$$B|_{\varepsilon=0} = -3\gamma^2\tau_1^2\partial_s^2 - 3\dot{\gamma}\gamma\tau_1^2\partial_s + \gamma^2\tau_1\partial_{\tau_1}. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Если $\gamma \neq 0$, то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение λ оператора $-\Delta_D^\Omega$ с условием Дирихле в трубке Ω , построенной с помощью (2.2) и (2.3) по кривой Γ с кривизной $\varepsilon\gamma$, $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющее неравенству (1.5). Это собственное значение вещественно, невырожденно и имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику (1.6) с $\mu_1 = 0$ и

$$\mu_2 = -\frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^4 (\tau_1)_{0n}^2 \int_{\mathbb{R}} \gamma(\mathcal{E}_{\rho_n} * \gamma) ds. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подсчитаем μ_1 и μ_2 по формулам (1.2) и (1.3). Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$A_{n0}(s) = -\gamma(s)(\partial_{\tau_1})_{n0}, \quad B_{00}(s, 0) = \gamma^2(s)(\tau_1\partial_{\tau_1})_{00}.$$

Интегрированием по частям получаются формулы

$$(\partial_{\tau_1})_{n0} = -(\partial_{\tau_1})_{0n}, \quad (k_n^2 - k_0^2)(\tau_1)_{0n} = -2(\partial_{\tau_1})_{n0}, \quad (\tau_1\partial_{\tau_1})_{00} = -\frac{1}{2}, \quad (2.7)$$

из которых, в частности, следует, что $A_{00}(s) = 0$. Поэтому $\mu_1 = 0$ и

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \gamma^2 ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (\partial_{\tau_1})_{n0} \{ [2\gamma(\mathcal{E}_{\rho_n} * \ddot{\gamma}) + \dot{\gamma}(\mathcal{E}_{\rho_n} * \dot{\gamma})](\tau_1)_{0n} - \gamma(\mathcal{E}_{\rho_n} * \gamma)(\partial_{\tau_1})_{0n} \} ds d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя соотношение $\ddot{\mathcal{E}}_{\rho_n} - \rho_n^2 \mathcal{E}_{\rho_n} = \delta(s)$, получаем

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\partial_{\tau_1})_{n0} (\tau_1)_{0n} \right] \int_{\mathbb{R}} \gamma^2 ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\partial_{\tau_1})_{n0} [\rho_n^2 (\tau_1)_{0n} - (\partial_{\tau_1})_{n0}] \int_{\mathbb{R}} \gamma(\mathcal{E}_{\rho_n} * \gamma) ds. \end{aligned}$$

В силу равенства Парсеваля для рядов Фурье и соотношений (2.7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\partial_{\tau_1})_{n0} (\tau_1)_{0n} = \int_M \tau_1 \chi_0 \partial_{\tau_1} \chi_0 d\tau = -\frac{1}{2}.$$

Используя (2.7), получаем формулу (2.6).

Если $\gamma \neq 0$, то все интегралы в (2.5) отрицательны (это следует из равенства Парсеваля, если перейти к преобразованию Фурье), поэтому утверждение теоремы 2.2 следует из теоремы 1.1 (вещественность собственных значений также следует из того, что оператор Лапласа с условием Дирихле симметрический). Отметим, что формула, по существу эквивалентная (2.5), при несколько более общих предположениях на кривизну кривой была получена другим методом в [3], [6].

ПРИМЕР 2.3. Пусть M – связная ограниченная область на плоскости (y_1, y_2) , граница которой состоит из конечного числа бесконечно гладких кривых. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y_1, y_2) рассмотрим область Ω , полученную поступательным перемещением M параллельно оси x с одновременным вращением вокруг оси x на угол $\varepsilon\phi(x)$, где $\dot{\phi}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. В подвижной системе координат (s, τ_1, τ_2) , связанной с исходной формулами

$$s = x, \quad \tau_1 = y_1 \cos(\varepsilon\phi) + y_2 \sin(\varepsilon\phi), \quad \tau_2 = -y_1 \sin(\varepsilon\phi) + y_2 \cos(\varepsilon\phi),$$

Ω превращается в цилиндр

$$\tilde{\Omega} = \{(s, \tau): -\infty < s < +\infty, \tau \in M\}.$$

В области Ω , как и в предыдущих примерах, рассмотрим оператор $-\Delta_D^\Omega$, который при указанном преобразовании координат переходит в оператор

$$\tilde{H}_\varepsilon = -\partial_\tau^2 - (\partial_s - \varepsilon\dot{\phi}L)^2, \quad L = \tau_1\partial_{\tau_2} - \tau_2\partial_{\tau_1}.$$

Подсчитав μ_1 и μ_2 по формулам (1.2), (1.3), где

$$A = 2\dot{\phi}L\partial_s + \ddot{\phi}L, \quad B = -\dot{\phi}^2L^2,$$

получим, что $\mu_1 = 0$, а μ_2 после аналогичных использованным в примере 2.2 преобразований приводится к виду

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (L_{n0})^2 \rho_n^2 \int_{\mathbb{R}} \dot{\phi}(\mathcal{E}_{\rho_n} * \dot{\phi}) ds. \quad (2.8)$$

Если $\dot{\phi} \not\equiv 0$, то все интегралы в (2.8), как и в предыдущем примере, отрицательны, поэтому $\mu_2 \leq 0$, причем $\mu_2 = 0$, если $L_{n0} = 0$ для всех n и, следовательно, $L\chi_0 = 0$.

Так как $L = \partial_\varphi$, где (r, φ) – полярные координаты на плоскости (τ_1, τ_2) , и χ_0 положительна в M , то из этого вытекает, что любая окружность с центром в начале координат либо целиком содержится в M , либо с M не имеет общих точек. Последнее возможно только в случае, когда граница области состоит из одной или двух окружностей с центрами в начале координат, а это в свою очередь означает, что Ω представляет собой прямой (т.е. не искривленный) цилиндр, а в прямом цилиндре собственных значений оператора Δ_D^Ω нет.

Если Ω не является прямым цилиндром, то и из теоремы 1.1 мы получаем, что собственных значений, удовлетворяющих (1.5), у оператора $-\Delta_D^\Omega$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нет (ε_0 и μ_0 определены в теореме 1.1).

3. Некоторые свойства возмущенного оператора Лапласа в бесконечном цилиндре. Пусть Ω – бесконечный цилиндр в $\mathbb{R}^{\nu+1}$, удовлетворяющий условиям, сформулированным во введении. В этом пункте мы изучим некоторые свойства оператора H_ε , определенного формулой (1.1). Предполагаются выполненными условия на операторы A и B , сформулированные во введении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Оператор Δ_D^Ω осуществляет изоморфизм пространств $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$.*

Это утверждение по существу содержится в результатах работы В. А. Кондратьева [12]. Поэтому лишь коротко наметим схему этого доказательства.

1. Рассмотрим уравнение

$$\Delta_D^\Omega u = f.$$

После преобразования Фурье по переменной x получаем

$$(\Delta_D^M - \xi^2)\tilde{u}(\xi, y) = \tilde{f}(\xi, y),$$

и, следовательно,

$$\tilde{u}(\xi, y) = R(\xi)\tilde{f}(\xi, y),$$

где $R(\xi)$ – обратный оператор к $\Delta_D^M - \xi^2$.

2. Утверждение предложения теперь является следствием равенства Парсеваля и оценок для решений эллиптических краевых задач с параметром из работы М. С. Аграновича и М. И. Вишика [13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для любого $u \in \mathcal{H}_D^2(\Omega)$ ряд Фурье*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\chi_n(y), \quad u_n(x) = \int_M u_n(x, y)\overline{\chi}_n(y) dy, \quad (3.1)$$

сходится по норме в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$. Для любого $f \in L_2(\Omega)$ решение уравнения $\Delta_D^\Omega u = f$ дается формулами

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{E}_{k_n} * f_n)\chi_n(y), \quad f_n(x) = \int_M f_n(x, y)\overline{\chi}_n(y) dy, \quad (3.2)$$

где знак звездочки означает свертку функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_D^\Omega u = f$; разложим f в ряд Фурье

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\chi_n(x). \quad (3.3)$$

Так как функции $u_n(x, y) = (\mathcal{E}_{k_n} * f_n)\chi_n(y)$ будут решениями уравнений $\Delta_D^\Omega u_n(x, y) = f_n(x)\chi_n(y)$ и ряд (3.3) сходится в $L_2(\Omega)$, то в силу предложения 3.1 ряд (3.1) будет сходиться к u , т.е. решение u представляется в виде (3.1). В силу предложения 3.1 таким способом можно получить любое $f \in L_2(\Omega)$, что и доказывает утверждение предложения 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Оператор Δ_D^Ω , как неограниченный оператор в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, самосопряжен.*

Это утверждение вытекает из известной теоремы фон Неймана о том, что симметрический оператор в гильбертовом пространстве, область определения которого совпадает со всем пространством, самосопряжен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. При достаточно малых ε оператор H_ε , определенный во введении, осуществляет изоморфизм пространств, указанных в предложении 3.1.

Это утверждение следует из того, что свойство операторов быть изоморфизмами сохраняется при малых по операторной норме возмущениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Если оператор H_ε симметрический на $C_0^\infty(\Omega)$, то при достаточно малых ε он самосопряжен в $L_2(\Omega)$.

Действительно, если H_ε симметрический на $C_0^\infty(\Omega)$ (такие дифференциальные операторы обычно называют формально самосопряженными), то оператор H_ε будет симметрическим и на $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, что легко устанавливается интегрированием по частям. Теперь, учитывая предложение 3.4, опять можно воспользоваться теоремой фон Неймана.

Заметим, что утверждение о самосопряженности симметрического оператора H_ε можно доказать и без предположения о малости ε , если наложить дополнительное условие эллиптичности задачи Дирихле для этого оператора. Это доказательство, использует локальные теоремы о гладкости решений эллиптических краевых задач и соответствующие оценки (см. [1, гл. 4 и 10]) в сочетании с подходящим разбиением единицы. Подробности мы опускаем, так как в данной работе мы ограничиваемся рассмотрением случая достаточно малых ε .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Если оператор H_ε симметрический, то при достаточно малых ε оператор H_ε с областью определения $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ совпадает с расширением по Фридрихсу оператора H_ε на $C_0^\infty(\Omega)$.

Действительно, расширение по Фридрихсу представляет собой самосопряженный оператор (см., например, [14, гл. 5]). Из его построения ясно, что область определения этого расширения содержит $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, но на $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ в силу предложения 3.5 оператор H_ε уже самосопряжен и его дальнейшее расширение с сохранением самосопряженности невозможно, что и доказывает утверждение предложения 3.6.

4. Доказательство теоремы 1.1. Это доказательство представляет собой вариант обычной теории возмущений. Положим $\lambda = k_0^2 - \mu^2$ и будем рассматривать уравнение

$$H_\varepsilon u - k_0^2 u + \mu^2 u = 0. \quad (4.1)$$

Пусть $\mathcal{L}_0$ – подпространство в $L_2(\Omega)$, состоящее из всех функций $\varphi(x)\chi_0(y)$, $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}_0^\perp$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}_0$, P_0 – проектор на $\mathcal{L}_0$.

ЛЕММА 4.1. При достаточно малых ε и μ уравнение (4.1) имеет единственное решение $u(\varepsilon, \mu, x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $u(\varepsilon, \mu, x, y)$ можно представить в виде суммы

$$u(\varepsilon, \mu, x, y) = u_0(\varepsilon, \mu, x)\chi_0(y) + U(\varepsilon, \mu, x, y),$$

причем

$$u_0(\varepsilon, \mu, x) \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}), \quad U(\varepsilon, \mu, x, y) \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp;$$

б) $u_0(\varepsilon, \mu, x) = e^{\mu x}$ при $x \leq 0$.

При этом $u_0(\varepsilon, \mu, x)$ и $U(\varepsilon, \mu, x, y)$ в указанных пространствах аналитически зависят от параметров ε и μ .

Для доказательства рассмотрим более широкую задачу: по заданным $f_0(x) \in L_2(0, l)$, $F(x, y) \in \mathcal{L}_0^\perp$ и числам a_0, a_1 найти такие

$$v_0(\varepsilon, \mu, x) \in \mathcal{H}^2(0, l) \quad \text{и} \quad V(\varepsilon, \mu, x, y) \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp,$$

что

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 v_0 + P_0(\varepsilon A + \varepsilon^2 B)(v_0 \chi_0 + V) + \mu^2 v_0 &= f_0, \\ -(\Delta + k_0^2)V + (I - P_0)(\varepsilon A + \varepsilon^2 B)(v_0 \chi_0 + V) + \mu^2 V &= F, \\ v_0(0) &= a_0, \quad \dot{v}_0(0) = a_1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отображение

$$(v_0, V) \rightarrow (f_0, F, a_0, a_1) \quad (4.3)$$

непрерывно в соответствующих пространствах. При $\varepsilon = 0$ и $\mu = 0$ эта задача однозначно разрешима, причем решение выражается явными формулами

$$\begin{aligned} v_0(0, 0, x) &= a_0 + a_1 x - \int_0^x (x - x') f_0(x') dx', \quad 0 \leq x \leq l, \\ V(0, 0, x, y) &= - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{E}_{\rho_n} * F_n) \chi_n(y), \end{aligned}$$

где $\mathcal{E}_{\rho_n}$ определены в (1.4). Таким образом, оператор (4.3) является изоморфизмом. Отсюда следует, что при достаточно малых ε и μ изоморфизмом будет и отображение (4.3) причем обратный оператор аналитически зависит от параметров ε и μ . Остается заметить, что решение $u(\varepsilon, \mu, x, y)$ получается из решения задачи (4.2) при $f_0(x) = 0$, $F(x, y) = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = \mu$, если продолжить $v_0(\varepsilon, \mu, x)$ на все $\mathbb{R}$ так, чтобы $v_0(\varepsilon, \mu, x) \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ и $\ddot{v}_0 - \mu^2 v_0 = 0$ вне отрезка $[0, l]$, и положить

$$u(\varepsilon, \mu, x, y) = v_0(\varepsilon, \mu, x) \chi_0(y) + V(\varepsilon, \mu, x, y).$$

ЛЕММА 4.2. *Можно найти такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $|\mu| < \mu_0$ уравнение (4.1) имеет единственное решение $u(\varepsilon, x, y)$, удовлетворяющее условию а) и условиям*

- с) $u_0(\varepsilon, x) = u_0(\varepsilon, 0)e^{\mu x}$ при $x < 0$ и $u_0(\varepsilon, x) = u_0(\varepsilon, l)e^{-\mu(x-l)}$ при $x > l$;
- д) $u_0(\varepsilon, 0) = 1$.

При этом существует аналитическая функция $\mu(\varepsilon)$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, такая, что $\mu(0) = 0$ и $u(\varepsilon, x, y) = u(\varepsilon, \mu(\varepsilon), x, y)$. Если A и B имеют вещественные коэффициенты, то $\mu(\varepsilon)$ при вещественных ε будет вещественной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение $u(\varepsilon, x, y)$ получается из решения леммы 4.1, если μ удовлетворяет уравнению

$$G(\varepsilon, \mu) = 0, \quad (4.4)$$

где

$$G(\varepsilon, \mu) = \dot{u}_0(\varepsilon, \mu, l) + \mu u_0(\varepsilon, \mu, l). \quad (4.5)$$

В силу леммы 4.1 функция $G(\varepsilon, \mu)$ аналитична в окрестности точки $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$. Легко видеть, что при $\varepsilon = 0$ функция $u_0(0, x)$ совпадает с $e^{\mu x}$. Отсюда видно, что

$$G(0, 0) = 0, \quad \partial_\mu G(0, 0) = 2.$$

Если A и B имеют вещественные коэффициенты, то при ε и μ вещественных и $G(\varepsilon, \mu)$ будет вещественной. Теперь утверждение леммы следует из теоремы о неявной функции.

ЛЕММА 4.3. При $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ число λ из окрестности (1.5) точки k_0^2 тогда и только тогда является собственным значением оператора H_ε , когда $\operatorname{Re} \mu(\varepsilon) > 0$ и $\lambda = k_0^2 - \mu^2(\varepsilon)$, где ε_0 , μ_0 и $\mu(\varepsilon)$ определены в лемме 4.2. При этом собственное значение λ будет невырожденным, а соответствующую собственную функцию можно взять в виде $u(\varepsilon, x, y)$, где $u(\varepsilon, x, y)$ определена в лемме 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные функции – это отличные от тождественного нуля решения уравнения (4.1), принадлежащие $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, поэтому $u_0(x) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R})$ и удовлетворяет уравнению $\ddot{u}_0 - \mu^2 u_0 = 0$ при $x < 0$ и $x > l$ (здесь u – собственная функция). Из этого следует, что $u_0(x)$ удовлетворяет условию с) леммы 4.2 при $\operatorname{Re} \mu > 0$.

Если $u_0(0) = 0$, то отсюда следует, что $u_0(x) = 0$ при $x < 0$ и $\dot{u}_0(0) = 0$. Представив u в виде $u = u_0(x)\chi_0(y) + U(x, y)$, получим, что пара (u_0, U) будет решением задачи (4.2) с $f_0 = F = 0$, $a_0 = a_1 = 0$. В силу однозначной разрешимости задачи (4.2) из этого следует, что $U = 0$ и $u_0(x) = 0$ на $[0, l]$, а отсюда вытекает, что $u_0(x) = 0$ и при $x > l$, т.е. $u \equiv 0$.

Так как собственная функция отлична от тождественного нуля, тем самым установлено, что $u_0(0) \neq 0$, следовательно, u получается из решения $u(\varepsilon, x, y)$ леммы 4.2 умножением на константу. Тем самым лемма 4.3 доказана.

Собирая вместе результаты лемм 4.1–4.3, получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ существуют аналитическая при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ функция $\mu(\varepsilon)$ и функция

$$u(\varepsilon, x, y) = u_0(\varepsilon, x)\chi_0(y) + U(\varepsilon, x, y)$$

такие, что $u_0(\varepsilon, x)$ аналитически зависит от ε в пространстве $\mathcal{H}^2(0, l)$ и удовлетворяет граничным условиям

$$u_0(\varepsilon, 0) = 1, \quad \dot{u}_0(\varepsilon, 0) = \mu(\varepsilon), \quad \dot{u}_0(\varepsilon, l) + \mu(\varepsilon)u_0(\varepsilon, l) = 0; \quad (4.6)$$

$U(\varepsilon, x, y)$ аналитически зависит от ε в пространстве $\mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$. Собственное значение оператора H_ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $|\lambda - k_0^2| < \mu_0^2$ существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} \mu(\varepsilon) > 0$. Если $\operatorname{Re} \mu(\varepsilon) > 0$, то это собственное значение невырожденно, $\lambda = k_0^2 - \mu^2(\varepsilon)$ и соответствующую собственную функцию можно взять в виде $u(\varepsilon, x, y)$.

Теперь для завершения доказательства теоремы 1.1 достаточно установить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Функция $\mu(\varepsilon)$, определенная в предложении 4.1, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет разложение

$$\mu(\varepsilon) = \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + O(\varepsilon^3),$$

где μ_1 и μ_2 вычисляются по формулам (1.2) и (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая аналитическую зависимость функции $u(\varepsilon, x, y)$ из предложения 4.1, представим ее в виде

$$u = u^{(0)}(x, y) + \varepsilon u^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, y) + O(\varepsilon^3), \quad (4.7)$$

подставим это разложение в уравнение (4.1) и граничные условия (4.6), соберем коэффициенты при отдельных степенях параметра (что является стандартным подходом теории возмущений). Запишем полученные таким способом рекуррентные соотношения:

$$(\Delta + k_0^2)u^{(0)} = 0, \quad (4.8)$$

$$(\Delta + k_0^2)u^{(1)} = Au^{(0)}, \quad (4.9)$$

$$(\Delta + k_0^2)u^{(2)} = Au^{(1)} + B_0u^{(0)} + \mu_1^2 u^{(0)}, \quad B_0 = B|_{\varepsilon=0}, \quad (4.10)$$

$$u_0^{(0)}(0) = 1, \quad \dot{u}_0^{(0)}(0) = 0, \quad (4.11)$$

$$u_0^{(1)}(0) = 0, \quad \dot{u}_0^{(1)}(0) = \mu_1, \quad \dot{u}_0^{(1)}(l) + \mu_1 u_0^{(0)}(l) = 0, \quad (4.12)$$

$$u_0^{(2)}(0) = 0, \quad \dot{u}_0^{(2)}(0) = \mu_2, \quad \dot{u}_0^{(2)}(l) + \mu_1 u_0^{(1)}(l) + \mu_2 u_0^{(0)}(l) = 0. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.8)–(4.10) будем решать с помощью рядов Фурье по ортогональной системе $\{\chi_n\}$. Из уравнений нулевого приближения (4.8), (4.11) находим, что $u^{(0)}(x, y) = \chi_0(y)$. Уравнения первого приближения (4.9), (4.12) дают

$$u_0^{(1)}(x) = \mu_1 x + \int_0^x (x - x') A_{00}(x') dx', \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u_n^{(1)}(x) = (\mathcal{E}_{\rho_n} * A_{n0})(x), \quad n \geq 1,$$

где $\mathcal{E}_{\rho_n}(x)$ определены в (1.4). Теперь из третьего уравнения в (4.12) получаем формулу (1.2). Наконец, из уравнений второго приближения (4.10), (4.13) следует, что

$$u_0^{(2)}(x) = \mu_2 + \int_0^l [(Au^{(1)})_0 + (B_0 u^{(0)})_0] dx + \mu_1^2 l,$$

где $(\cdot)_0$ означает коэффициент при χ_0 в разложении по системе $\{\chi_n\}$. Поэтому третье условие в (4.13) приводит к соотношению

$$2\mu_2 = - \int_0^l [(Au^{(1)})_0 + (B_0 u^{(0)})_0] dx + \mu_1 \int_0^l x A_{00}(x) dx,$$

из которого и получается окончательная формула (1.3). Тем самым предложение 4.2 доказано.

В заключение автор благодарит профессора В. В. Белова и профессора С. Ю. Доброхотова, за обсуждение проблем, связанных со связанными состояниями в цилиндрических трубках и приложениями этих вопросов к задачам квантовой механики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы. М.: Мир, 1965.
- [2] Белов В. В., Доброхотов С. Ю., Сеницын С.О. Асимптотические решения уравнения Шрёдингера в тонких трубках // Тр. ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2003. Т. 9. № 1. С. 1–11.
- [3] Duclos P., Exner P. Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions // Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 73–102.
- [4] Entin M. V., Magarill L. I. Electrons in twisted quantum wire // Phys. Rev. B. 2002. V. 66. P. 205308-1–205308-5.
- [5] Exner P. Bound states in curved quantum waveguides // J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2574–2580.
- [6] Exner P. Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature // J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 23–28.
- [7] Exner P. A quantum pipette // J. Math. Phys. A. 1995. V. 28. P. 5323–5330.
- [8] Маслов В. П. Асимптотика собственных функций уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых и рассеяние электромагнитных волн в волноводе // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 4. С. 631–633.
- [9] Maslov V. P. Mathematical aspects of integral optics // Russ. J. Math. Phys. 2001. V. 8. P. 83–180.
- [10] Маслов В. П., Воробьев Е. М. Об одномодовых открытых резонаторах // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179. № 3. С. 558–561.
- [11] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [12] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 207–318.
- [13] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3 (117). С. 53–161.
- [14] Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.

Московский государственный институт
электроники и математики

Поступило
26.05.2003