Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 334–347

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4000>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 04:54:19

Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности

И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева

В работе найдены структурно-геометрические характеристики некоторых подмножеств $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$ (положительной меры), на которых в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, при $N \geq 3$ справедлива слабая обобщенная локализация почти всюду для кратных тригонометрических рядов Фурье, когда прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ ($x \in \mathbb{T}^N$, $f \in L_p$) этих рядов имеют “номер” $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, в котором некоторые компоненты n_j являются элементами лакунарных последовательностей. При $N = 3$ аналогичные исследования проведены для обобщенной локализации почти всюду.

Библиография: 23 названия.

1. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, и положим $(nx) = n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_Nx_N$.

Введем множество $\mathbb{R}_+^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с положительными координатами и множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами. Положим $\mathbb{Z}_+^N = \mathbb{R}_+^N \cap \mathbb{Z}^N$.

Пусть 2π -периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, где $\mathbb{T}^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leq x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, N\}$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}.$$

Рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1| \leq n_1} \dots \sum_{|k_N| \leq n_N} c_k e^{i(kx)}, \quad (1)$$

где $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $\mu \mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N -мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

Основной целью нашего исследования является изучение поведения на $\mathfrak{A}$ частичной суммы (1) при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$) в зависимости от гладкости функции $f(x)$, от структурных и геометрических характеристик множества $\mathfrak{A}$, а также от ограничений, накладываемых на компоненты $n_1, \dots, n_N$ вектора n – “номера” частичной суммы $S_n(x; f)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00206).

2. В случае $N = 1$ в 1966 г. Карлесон [1] доказал, что если $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$, то одномерный ряд Фурье функции f сходится для почти всех (п.в.) $x \in \mathbb{T}^1$. В 1967 г. Хант [2] распространил этот результат на функции из любого класса $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p > 1$.¹ Обобщить указанные результаты Карлесона и Ханта на кратный случай (т.е. для $N \geq 2$) оказалось невозможно, а именно, в 1971 г. Фефферманом [4] была построена непрерывная на $\mathbb{T}^2$ функция $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} |S_{n_1, n_2}(x; f)| = +\infty \quad \text{в каждой внутренней точке } \mathbb{T}^2.$$

Среди массы вопросов, которые появились в связи с указанным контрпримером Феффермана, возник, в частности, вопрос о сходимости п.в. кратных рядов Фурье в случае, когда компоненты $n_1, \dots, n_N$ вектора n (“номера” частичной суммы $S_n(x; f) - (1)$) удовлетворяют каким-либо дополнительным условиям.

Остановимся на некоторых таких условиях, а именно, на условиях, когда некоторые из компонент $n_1, \dots, n_N$ (вектора n) являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей.²

Заметим, что в одномерном случае Колмогоровым еще в 1922 г. в работе [5] было установлено: для любой функции $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ последовательность частичных сумм $S_{n^{(k)}}(x; f)$, где $\{n^{(k)}\}$, $n^{(k)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $k = 1, 2, \dots$, – лакунарная последовательность, сходится п.в. на $\mathbb{T}^1$. Указанный результат Колмогорова был распространен в 1931 г. Литтлвудом и Пэли [6] на классы $L_p(\mathbb{T}^1)$, $p > 1$. Позже Госселином и Тотиком [7] было установлено, что в $L_1(\mathbb{T}^1)$ этот результат неверен. (Подробный обзор результатов такого плана в одномерном случае см. в работе Ульянова [8].)

В свою очередь, первый результат для кратных рядов (т.е. для $N \geq 2$), касающийся “лакунарных последовательностей частичных сумм” был получен Шёлиным в 1971 г. в работе [9], где было доказано, что если $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, $\{n_1^{(\nu_1)}\}$, $n_1^{(\nu_1)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $\nu_1 = 1, 2, \dots$, – однократная лакунарная последовательность, то

$$\lim_{\nu_1, n_2 \rightarrow \infty} S_{n_1^{(\nu_1)}, n_2}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}^2.^3$$

В 1977 г. Кожима в работе [12] обобщил результат Шёлина, доказав, что если функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 2$, и $\{n_j^{(\nu_j)}\}$, $n_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $\nu_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, N - 1$, – однократные лакунарные последовательности, то

$$\lim_{\nu_1, \dots, \nu_{N-1}, n_N \rightarrow \infty} S_{n_1^{(\nu_1)}, \dots, n_{N-1}^{(\nu_{N-1})}, n_N}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}^N.$$

В той же работе Кожима доказал (используя результат Феффермана [4]), что сформулированный выше результат не может быть усилен в следующем смысле: для любой последовательности $\tilde{n} = (n_3, n_4, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^{N-2}$ существует непрерывная функция $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{n_1, n_2, \tilde{n} \rightarrow \infty} |S_{n_1, n_2, \tilde{n}}(x; f)| = +\infty \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}^N.$$

¹Что касается $p = 1$, то, как хорошо известно, в 1926 г. А. Н. Колмогоров [3] построил пример суммируемой функции с неограниченно расходящимся (в каждой точке $\mathbb{T}^1$) одномерным тригонометрическим рядом Фурье.

²Последовательность $\{n^{(s)}\}$, $n^{(s)} \in \mathbb{Z}_+^1$, называется *лакунарной*, если $n^{(s+1)}/n^{(s)} \geq q > 1$, $s = 1, 2, \dots$.

³В 1977 г. вышла работа Санадзе, Хеладзе [10], где указанный результат Шёлина [9] был распространен на классы Орлича $L(\log^+ L)^4(\mathbb{T}^2)$ (см. также работу Жижиашвили [11] 1975 г.).

⁴В частности, каждая компонента n_j вектора $\tilde{n}$ может быть элементом лакунарной последовательности.

Что касается дальнейших (после 1977 г.) исследований вопросов сходимости кратных рядов Фурье, чьи прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ – (1) имеют “номер” $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, в котором компоненты $n_1, \dots, n_N$ “в том или ином смысле лакунарны”, то подробный обзор результатов такого плана можно найти, например, в работе Жижиашвили [13].

3. Далее, перейдем к вопросам локализации для (суммируемых по прямоугольникам) кратных рядов Фурье функций из L_p , $p \geq 1$, т.е. к вопросу о поведении ряда Фурье на множествах, где разлагаемая в (указанный) ряд функция $f(x)$ ($f \in L_p$) равна нулю, точнее, мы перейдем к вопросам обобщенной и слабой обобщенной локализаций для рассматриваемых рядов.

В работах Блошанского [14]–[17] были введены следующие понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 1$, – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, справедлива на множестве $\mathfrak{A}$

а) *обобщенная локализация* (ОЛ) п.в., если для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{п.в. на } \mathfrak{A};$$

б) *слабая обобщенная локализация* (СОЛ) п.в., если для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует такое подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu \mathfrak{A}_1 > 0$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{п.в. на } \mathfrak{A}_1.$$

В работах [14]–[23] были проведены исследования указанных локализаций в различных функциональных пространствах. Коротко остановимся на результатах по ОЛ и СОЛ в классах L_p , $p > 1$. Для $N = 2$ в работе [14] (см. также [15]) было доказано, что для любой функции $f \in L_p$, $p > 1$, ОЛ справедлива на любых открытых множествах, и этот результат перестает быть верным при $N \geq 3$ даже для непрерывных функций (подробнее см. работы [14], [15], [23]).⁵

Что касается СОЛ, то для формулировки результатов по данной локализации (см. [16]–[18]), введем следующие обозначения.

Обозначим через $\Omega_{x_s x_t}$, $\Omega_{x_s x_t} \subset [-\pi, \pi]^2$, произвольное открытое множество в плоскости (x_s, x_t) , $s < t$, $s, t = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим следующие множества: “ N -мерные бруски”

$$W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-2}, \quad (2)$$

“ N -мерный крест” (построенный из этих брусков)

$$W = \bigcup_{\substack{s, t=1 \\ s < t}}^N W_{x_s x_t} \quad (3)$$

и “центр” рассматриваемого “ N -мерного креста”

$$W^0 = \bigcap_{\substack{s, t=1 \\ s < t}}^N W_{x_s x_t}. \quad (4)$$

⁵ В классе L_1 ОЛ перестает быть верной для $N = 2$ даже на открытых множествах (подробнее см. работы [14], [17], [21], [23]).

В работе [18] (см. также [16], [17]) Блошанским было доказано, что если $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 2$, $p > 1$, и $f(x) = 0$ на W , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{п.в. на } W^0.$$

Таким образом, СОЛ справедлива на “кресте” W вида (3) с числом брусков $W_{x_s x_t}$ – (2), равным $C_N^2 = N(N-1)/2$. В той же работе была доказана неусиливаемость этого результата, а именно, были приведены примеры множества W вида (3) и функции $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$, равной нулю на W , таких, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x; f)| = +\infty \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

Далее, в той же работе было показано, что на кресте с меньшим, чем C_N^2 , числом брусков или на кресте с другой геометрией брусков СОЛ, вообще говоря, не справедлива даже в классе непрерывных функций. (Отметим, что для справедливости СОЛ на каких-либо измеримых множествах в других функциональных пространствах, например, в классе L_1 , или в классах Орлича $L(\log^+ L)^{1/2-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1/2$, или в классах H^ω непрерывных функций с некоторым модулем непрерывности, как показано в [17], [20]–[23], требуется другая геометрия “ N -мерных крестов”.)

В связи с приведенными результатами возникает вопрос: какими должны быть структурно-геометрические характеристики множества $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, в частности, какова должна быть геометрия “ N -мерного креста” (на котором разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ равна нулю), чтобы на этом множестве (“ N -мерном кресте”) в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 2$, $p > 1$, была справедлива СОЛ, если (прямоугольные) частичные суммы этого ряда $S_n(x; f)$ имеют “номер” $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, в котором некоторые компоненты $n_1, \dots, n_N$ являются элементами лакунарных последовательностей?

4. Введем следующие обозначения. Пусть M – множество чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_s < j_t$ при $s < t$ и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \dots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_t$ при $s < t$ – непустые подмножества множества M .

Обозначим $\alpha = \alpha(J_k) = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \dots, k$. Символом $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ будем обозначать такой N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j = j_s$, $s = 1, \dots, k$, являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей (для $j \in J_k$: $n_j = n_j^{(\alpha_j)}$ и $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$).

Используя множества $W_{x_s x_t}$ – “ N -мерные бруски” (2) при $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, определим следующий неполный “ N -мерный крест”

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(J_k) = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}, \quad (5)$$

“центр” которого обозначим

$$\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_k) = \bigcap_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}. \quad (6)$$

Учитывая определение множеств W и W^0 (см. (3) и (4)), можем считать, что $W = \widetilde{W}(\emptyset)$, а $W^0 = \widetilde{W}^0(\emptyset)$.

В настоящей работе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА. Для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\widetilde{W}$,

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\alpha)}[J_k]}(x; f) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in \widetilde{W}^0.$$

СЛЕДСТВИЕ. При $N = 3$ для любого $J_1 \subset M$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\widetilde{W}$,

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_1 \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_1}} S_{n^{(\alpha)}[J_1]}(x; f) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in \widetilde{W}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, результат теоремы показывает, что для кратных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) СОЛ в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, при $N \geq 3$ будет справедлива на неполном “кресте из N -мерных брусков” – множестве $\widetilde{W}$ вида (5), если k компонент ($1 \leq k \leq N-2$) “номера” $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ частичной суммы $S_n(x; f)$ – (1) будут элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей. При этом “ N -мерные бруски” $W_{x_s x_t}$, $1 \leq s < t \leq N$, образующие указанный “крест” $\widetilde{W}$, имеют “основания” $\Omega_{x_s x_t}$ в тех плоскостях (x_s, x_t) , для которых соответствующие компоненты “номера” $n \in \mathbb{Z}_+^N$ – компоненты n_s и n_t – являются “свободными” (т.е., в частности, не являются элементами никаких лакунарных последовательностей), и число таких “брусков” будет равно $C_{N-k}^2 = (N-k)(N-k-1)/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как при $N = 3$ $\widetilde{W} = \widetilde{W}^0 = W_{x_s x_t}$, учитывая определение, сформулированное следствие означает, что для любых s, t : $1 \leq s < t \leq 3$, на множестве $\widetilde{W} = W_{x_s x_t}$ для тройных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) в классе $L_p(\mathbb{T}^3)$, $p > 1$, справедлива обобщенная локализация почти всюду, если компонента n_j , $j \neq s, t$, “номера” частичной суммы $S_{n_1, n_2, n_3}(x; f)$ является элементом лакунарной последовательности ($n_j = n_j^{(\alpha_j)}$), а остальные n_j , $j = s, t$, являются “свободными”.

Для любого $n \in \mathbb{Z}_+^N$ положим

$$D_n(u) = D_{n_1}(u_1) \cdots D_{n_N}(u_N),$$

где

$$D_{n_j}(u_j) = \frac{\sin(n_j + 1/2)u_j}{2 \sin(u_j/2)}$$

– одномерное ядро Дирихле.

С помощью введенного ядра $D_n(u)$ прямоугольную частичную сумму (1) ряда Фурье функции можно представить в следующем виде:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{T}^N} f(x+u) D_n(u) du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Фиксируем произвольное k , $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$. Не ограничивая общности, будем считать, что $J_k = \{N-k+1, \dots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \dots, N-k\}$. Пусть $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ – N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ – некоторые (однократные) лакунарные последовательности ($n_j = n_j^{(\alpha_j)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j = N-k+1, \dots, N$).

Далее, пусть r, v, l – целые числа, $0 \leq r, v, l \leq N - k$, и пусть $m = (m_1, \dots, m_{N-k}) \in \mathbb{Z}^{N-k}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(r, v, l) = \{m \in \mathbb{Z}^{N-k} : & 0 = m_0 < m_1 < \dots < m_r \leq N - k; \\ & 0 = m_0 < m_{r+1} < \dots < m_{r+v} \leq N - k; \\ & 1 \leq m_{r+v+1} < \dots < m_{r+v+l} \leq N - k; \\ & m_{\mu_1} \neq m_{\mu_2} \text{ при } \mu_1 \neq \mu_2\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 \leq r, v, l \leq N - k, \quad r + v + l = N - k.$$

Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k}) \in \mathbb{R}_+^{N-k}$, $0 < \delta_j \leq \pi$, $j = 1, \dots, N - k$, можем расписать частичную сумму $S_{n(\alpha)}(x; f)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{n(\alpha)}(x; f) &= \frac{1}{\pi^N} \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta_1} + \int_{-\delta_1}^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^{\pi} \right\} \dots \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta_{N-k}} + \int_{-\delta_{N-k}}^{\delta_{N-k}} + \int_{\delta_{N-k}}^{\pi} \right\} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) D_{n(\alpha)}(u) du \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, v, l \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} \sum_{m \in \mathfrak{A}(r, v, l)} \frac{1}{\pi^N} \int_{-\pi}^{-\delta_{m_1}} \dots \int_{-\pi}^{-\delta_{m_r}} \int_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}} \dots \int_{-\delta_{m_{r+v}}}^{\delta_{m_{r+v}}} \\ &\quad \int_{\delta_{m_{r+v+1}}}^{\pi} \dots \int_{\delta_{m_{r+v+l}}}^{\pi} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) D_{n(\alpha)}(u) du \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, v, l \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} \sum_{m \in \mathfrak{A}(r, v, l)} A_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(m; \delta, x, f). \end{aligned} \quad (8)$$

При этом мы предполагаем, что при $r = 0$ в (8) отсутствуют интегралы вида $\int_{-\pi}^{-\delta_j}$, при $v = 0$ – интегралы вида $\int_{-\delta_j}^{\delta_j}$, при $l = 0$ – интегралы вида $\int_{\delta_j}^{\pi}$, где $j = 1, \dots, N - k$.

Обозначим через $B_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(\delta, x, f)$ внутреннюю сумму в (8), т.е.

$$B_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) = \sum_{m \in \mathfrak{A}(r, v, l)} A_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(m; \delta, x, f) \quad (9)$$

(число слагаемых в сумме (9) в силу определения множества $\mathfrak{A}(r, v, l)$ (7) равно $(N - k)!/r!v!l!$).

В таком случае, учитывая (8) и (9), имеем

$$S_{n(\alpha)}(x; f) = \sum_{\substack{0 \leq r, v, l \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} B_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(\delta, x, f).$$

Разобьем последнюю сумму на три суммы:

$$\begin{aligned} S_{n(\alpha)}(x; f) &= \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ v=0 \\ r+l=N-k}} B_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) + \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ v=1 \\ r+l=N-k-1}} B_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ 2 \leq v \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} B_{n(\alpha)}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) \\ &= B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f) + B_{n(\alpha)}^{(1)}(\delta, x, f) + B_{n(\alpha)}^{(2)}(\delta, x, f). \end{aligned} \quad (10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k}) \in \mathbb{R}_+^{N-k}$, $0 < \delta_j \leq \pi$, $j = 1, \dots, N-k$, $B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f) \rightarrow 0$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j \in J_k$, $n_j \rightarrow \infty$, $j \in M \setminus J_k$ н.в. на $\mathbb{T}^N$; более того,

$$\left\| \sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad 1 < p < \infty,$$

где константа $C = C(p, \delta)$ не зависит от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Рассмотрим и оценим $B_{n(\alpha)}^{(r,v,l)}(\delta, x, f)$ при $v = 0$, $0 \leq r, l \leq N-k$, $r+l = N-k$. Имеем

$$B_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(\delta, x, f) = \sum_{m \in \mathfrak{A}(r,0,l)} A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f), \quad 0 \leq r, l \leq N-k, \quad r+l = N-k. \quad (11)$$

Фиксируем произвольный вектор $m \in \mathfrak{A}(r,0,l)$ и рассмотрим $A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)$ из суммы (11). В силу (7) и (8) можем записать

$$\begin{aligned} A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f) &= \frac{1}{\pi^N} \int_{-\pi}^{-\delta_{m_1}} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta_{m_r}} \int_{\delta_{m_{r+1}}}^{\pi} \cdots \int_{\delta_{m_{r+l}}}^{\pi} \\ &\quad \int_{\mathbb{T}^k} f(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) D_{n_1}(u_1) \cdots D_{n_{N-k}}(u_{N-k}) \\ &\quad \times D_{n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\alpha_N)}(u_N) du_1 \dots du_N, \\ &\quad 0 \leq r, l \leq N-k, \quad r+l = N-k. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как

$$|D_{n_j}(u_j)| \leq C(\delta_j) = \text{const} \quad \text{при} \quad \delta_j \leq |u_j| \leq \pi, \quad (13)$$

из (12) получаем (с учетом 2π -периодичности функции $f(x)$ по каждой переменной):

$$\begin{aligned} |A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)| &\leq C_0(\delta) \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad \left| \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(u_1, \dots, u_{N-k}, x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \right. \\ &\quad \times D_{n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\alpha_N)}(u_N) du_{N-k+1} \cdots du_N \Big| \\ &\quad \times du_1 \dots du_{N-k}, \end{aligned}$$

где $C_0(\delta) = \pi^{-N+k} C(\delta_{m_1}) \cdots C(\delta_{m_{r+l}})$.

Выражение под знаком модуля для почти всех $(u_1, \dots, u_{N-k}) \in [-\pi, \pi]^{N-k}$ можно рассматривать как частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по переменным $x_{N-k+1}, \dots, x_N$. Обозначим эту частичную сумму

$$S_{n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_{N-1}^{(\alpha_{N-1})}, n_N^{(\alpha_N)}(x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_1, \dots, u_{N-k}).$$

Так как по условию теоремы $n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_{N-1}^{(\alpha_{N-1})}$ являются элементами лакунарных последовательностей, для оценки мажоранты этой частичной суммы можно применить теорему Кожимы [12]:

$$\left\| \sup_{\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, n_k} |S_{n_1^{(\nu_1)}, \dots, n_{k-1}^{(\nu_{k-1})}, n_k} (x; g)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \leq C_p \|g(x)\|_{L_p(\mathbb{T}^k)}, \quad 1 < p < \infty;$$

здесь $\{n_j^{(\nu_j)}\}$, $j = 1, \dots, k-1$, – лакунарные последовательности.

Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\alpha_j > 0, j \in J_k} |S_{n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_{N-1}^{(\alpha_{N-1})}, n_N^{(\alpha_N)}} (x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_1, \dots, u_{N-k})| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^k)} \\ & \leq C_1(p) \left\{ \int_{\mathbb{T}^k} |f(u_1, \dots, u_N)|^p du_{N-k+1} \dots du_N \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя неравенство Гёльдера и оценку (14), можем получить оценку для $A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \\ & \leq C_2(\delta) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{T}^k} \left[\sup_{\alpha_j > 0, j \in J_k} |S_{n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_{N-1}^{(\alpha_{N-1})}, n_N^{(\alpha_N)}} (x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_1, \dots, u_{N-k})| \right]^p \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times dx_{N-k+1} \dots dx_N \right) du_1 \dots du_{N-k} \right\}^{1/p} \\ & \leq C_3(p, \delta) \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу произвольности выбора вектора m из множества $\mathfrak{A}(r, 0, l)$ оценка (15) справедлива для каждого слагаемого в сумме (11) при $v = 0$. Следовательно, используя неравенство Гёльдера и учитывая количество элементов во множестве $\mathfrak{A}(r, 0, l)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}^p \\ & = \left\| \sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} \left| \sum_{m \in \mathfrak{A}(r,0,l)} A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f) \right| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}^p \\ & \leq \left[\frac{(N-k)!}{r!l!} \right]^{p-1} \sum_{m \in \mathfrak{A}(r,0,l)} \left\| \sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |A_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}^p \\ & \leq \left[\frac{(N-k)!}{r!l!} C_3(p, \delta) \right]^p \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}^p. \end{aligned}$$

Окончательно мы получаем оценку для $\sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f)|$, где

$$B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f) = \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ r+l=N-k}} B_{n(\alpha)}^{(r,0,l)}(\delta, x, f),$$

т.е.

$$\left\| \sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leq C(p, \delta) \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^N)},$$

$$0 \leq r, l \leq N - k, \quad r + l = N - k.$$

Из последней оценки, используя стандартный прием, получаем $B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f) \rightarrow 0$ при $\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k, n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k$ п.в. на $\mathbb{T}^N$. Предложение 1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k}) \in \mathbb{R}_+^{N-k}, 0 < \delta_j \leq \pi, j = 1, \dots, N - k, B_{n(\alpha)}^{(1)}(\delta, x, f) \rightarrow 0$ при $\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k, n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k$ п.в. на $\mathbb{T}^N$; более того

$$\left\| \sup_{\substack{\alpha_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\alpha)}^{(1)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^N)}, \quad 1 < p < \infty,$$

где константа $C = C(p, \delta)$ не зависит от функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Рассмотрим и оценим $B_{n(\alpha)}^{(r,v,l)}(\delta, x, f)$ при $v = 1, 0 \leq r, l \leq N - k - 1, r + l = N - k - 1$. Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (9) при $v = 1$. Если $v = 1$, то для произвольного вектора $m \in \mathfrak{A}(r, 0, l)$ соответствующее слагаемое в сумме (9) имеет вид

$$\begin{aligned} A_{n(\alpha)}^{(r,1,l)}(m; \delta, x, f) &= \frac{1}{\pi^N} \int_{-\pi}^{-\delta_{m_1}} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta_{m_r}} \int_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}} \int_{\delta_{m_{r+2}}}^{\pi} \cdots \int_{\delta_{m_{r+1+l}}}^{\pi} \\ &\quad \int_{\mathbb{T}^k} f(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) D_{n_1}(u_1) \cdots D_{n_{N-k}}(u_{N-k}) \\ &\quad \times D_{n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\alpha_N)}(u_N) du_1 \dots du_N, \end{aligned} \quad (16)$$

$$0 \leq r, l \leq N - k - 1, \quad r + l = N - k - 1.$$

Из (16), учитывая оценку (13) и 2π -периодичность функции $f(x)$, получаем

$$\begin{aligned} |A_{n(\alpha)}^{(r,1,l)}(m; \delta, x, f)| &\leq C_4(\delta) \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1}), \dots, n_N^{(\alpha_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \\ &\quad u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}})| \\ &\quad \times du_{m_1} \dots du_{m_r} du_{m_{r+2}} \dots du_{m_{N-k}}, \end{aligned}$$

где через $\tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1}), \dots, n_N^{(\alpha_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot)$ обозначен интеграл

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1}), \dots, n_N^{(\alpha_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) &= \frac{1}{\pi^{k+1}} \int_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}} \int_{\mathbb{T}^k} f(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}, \\ &\quad x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \\ &\quad \times D_{n_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) D_{n_{N-k+1}}^{(\alpha_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\alpha_N)}(u_N) \\ &\quad \times du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \dots du_N. \end{aligned}$$

Так как $f(x) \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $1 < p < \infty$, $0 < \delta_{m_{r+1}} \leq \pi$ и

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\alpha_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot) \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{T}^{k+1}} - \int_{-\pi}^{-\delta_{m_{r+1}}} - \int_{\mathbb{T}^k}^{\pi} \int_{\delta_{m_{r+1}}}^{\pi} \right\} \\ & \quad f(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{N-k}, x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \\ & \quad \times D_{n_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) D_{n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N^{(\alpha_N)}}(u_N) du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \dots du_N, \end{aligned}$$

то (с учетом предложения 1) для п.в. $(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{N-k}) \in [-\pi, \pi]^{N-k-1}$ можно рассматривать $\tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\alpha_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot)$ как “главный член” частичной суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по переменным $x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N$. Обозначим эту частичную сумму

$$\begin{aligned} & S_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\alpha_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) \\ &= \frac{1}{\pi^{k+1}} \int_{\mathbb{T}^{k+1}} f(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}, \\ & \quad x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \\ & \quad \times D_{n_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) D_{n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N^{(\alpha_N)}}(u_N) \\ & \quad \times du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \dots du_N. \end{aligned}$$

Далее, применяя те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 1, получим оценки для $S_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\alpha_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\alpha_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot)$, $A_{n^{(\alpha)}}^{(r,1,l)}(\delta, x, f)$, $B_{n^{(\alpha)}}^{(r,1,l)}(\delta, x, f)$, а затем и $B_{n^{(\alpha)}}^{(1)}(\delta, x, f)$, доказав, тем самым, предложение 2.

Рассмотрим куб $\widehat{\mathbb{T}}^N = [-2\pi, 2\pi]^N$. Определим по аналогии со множеством $\widetilde{W}$ (5) множество $\widehat{W} \subset \widehat{\mathbb{T}}^N$. Пусть

$$\widehat{W}_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-2\pi, 2\pi]^{N-2}, \quad s < t, \quad s, t \in M \setminus J_k, \quad (17)$$

где $\Omega_{x_s x_t} \subset [-\pi, \pi]^2$ – открытое множество в плоскости (x_s, x_t) , фигурировавшее при построении множества $W_{x_s x_t}$ (2), и пусть

$$\widehat{W} = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} \widehat{W}_{x_s x_t}. \quad (18)$$

Очевидно, справедливы следующие вложения:

$$\widetilde{W} \subset \widehat{W} \quad \text{и} \quad \widetilde{W}^0 \subseteq \bigcap_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} \widehat{W}_{x_s x_t}.$$

С другой стороны, так как $f(x) = 0$ на $\widetilde{W} \subset \mathbb{T}^N$, то в силу 2π -периодичности функции $f(x)$ по каждой из переменных имеем

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \widehat{W}. \quad (19)$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующая теорема Уитни.

ТЕОРЕМА УИТНИ. Пусть дано произвольное непустое замкнутое множество $P \subset \mathbb{R}^N$. Тогда существует такой набор кубов $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m, \dots)$, что выполнены следующие условия:

$$1) \bigcup_m Q_m = \Omega = \mathbb{R}^N \setminus P; \quad (20)$$

2) все Q_m попарно не пересекаются;

$$3) \text{diam } Q_m \leq \text{dist}(Q_m, P) \leq 4 \text{diam } Q_m \quad (21)$$

(под кубом понимается замкнутый куб в $\mathbb{R}^N$ с ребрами, параллельными координатным осям; два таких куба называются непересекающимися, если не пересекаются их внутренности).

В качестве открытого множества Ω , фигурирующего в теореме Уитни, рассмотрим открытое множество $\widetilde{W}^0$ (6), в качестве замкнутого множества P – множество $\mathbb{T}^N \setminus \widetilde{W}^0$. Следовательно, вместо условия (20) имеем

$$\widetilde{W}^0 = \bigcup_m Q_m. \quad (22)$$

Рассмотрим произвольный куб Q_{m_0} из объединения (22). Обозначим

$$\delta^0 = \text{diam } Q_{m_0}.$$

Учитывая (21), получаем для этого куба оценку

$$\delta^0 \leq \text{dist}(Q_{m_0}, \mathbb{T}^N \setminus \widetilde{W}^0) \leq 4\delta^0.$$

В таком случае элементы множества x , где $x = (x_1, \dots, x_N) \in Q_{m_0}$, обладают следующими свойствами: во-первых,

$$(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \in \widetilde{W}^0, \quad \text{если } |u_j| \leq \delta^0, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

во-вторых, в силу определения множеств $\widehat{W}_{x_s x_t}$ (17) и $\widehat{W}$ (18), $s < t$, $s, t \in M \setminus J_k$, имеем для любых $y_1, \dots, y_{s-1}, y_{s+1}, \dots, y_{t-1}, y_{t+1}, \dots, y_N \in [-2\pi, 2\pi]$:

$$(y_1, \dots, y_{s-1}, x_s + u_s, y_{s+1}, \dots, y_{t-1}, x_t + u_t, y_{t+1}, \dots, y_N) \in \widehat{W}_{x_s x_t}, \quad (23)$$

если $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t} \cap Q'_{m_0}$ и $|u_s|, |u_t| \leq \delta^0$, $s < t$, $s, t \in M \setminus J_k$, где Q'_{m_0} – проекция куба Q_{m_0} на плоскость (x_s, x_t) , а $\Omega_{x_s x_t}$ – открытое множество в плоскости (x_s, x_t) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $x \in Q_{m_0}$; тогда существует вектор δ с положительными координатами $\delta_j = \delta^0 = \text{diam } Q_{m_0}$, $j = 1, \dots, N-k$, такой, что $B_{n(\alpha)}^{(2)}(\delta, x, f) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $B_{n(\alpha)}^{(2)}(\delta, x, f)$. В силу (10) имеем

$$B_{n(\alpha)}^{(2)}(\delta, x, f) = \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ 2 \leq v \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} B_{n(\alpha)}^{(r,v,l)}(\delta, x, f). \quad (24)$$

Докажем, что все слагаемые в сумме (24) равны нулю при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N-k$. Фиксируем произвольные r_0, v_0, l_0 : $0 \leq r_0, l_0 \leq N-k$, $2 \leq v_0 \leq N-k$, $r_0 + v_0 + l_0 = N-k$, и рассмотрим, учитывая (9),

$B_{n(\alpha)}^{(r_0, v_0, l_0)}(\delta, x, f)$. В силу (9)

$$B_{n(\alpha)}^{(r_0, v_0, l_0)}(\delta, x, f) = \sum_{m \in \mathfrak{A}(r_0, v_0, l_0)} A_{n(\alpha)}^{(r_0, v_0, l_0)}(m; \delta, x, f), \quad (25)$$

где множество $\mathfrak{A}(r_0, v_0, l_0)$ определено в (7).

Докажем, что все слагаемые в сумме (25) равны нулю при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k})$, $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N-k$. Рассмотрим произвольное слагаемое в сумме (25) при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N-k$. Имеем в силу (8)

$$\begin{aligned} & A_{n(\alpha)}^{(r_0, v_0, l_0)}(m; \delta, x, f) \\ &= \frac{1}{\pi^N} \int_{\delta^0}^{\pi} \cdots \int_{\delta^0}^{\pi} \left(\int_{-\delta^0}^{\delta^0} \cdots \int_{-\delta^0}^{\delta^0} \right. \\ & \quad \left. \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta^0} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta^0} \left[\int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) D_{n(\alpha)}(u) du_{N-k+1} \dots du_N \right] du_{m_1} \dots du_{m_{r_0}} \right\} \right. \\ & \quad \left. \times du_{m_{r_0+1}} \dots du_{m_{r_0+v_0}} \right) du_{m_{r_0+v_0+1}} \dots du_{m_{r_0+v_0+l_0}}, \end{aligned}$$

где $m = (m_1, \dots, m_{N-k}) \in \mathfrak{A}(r_0, v_0, l_0)$ (см. (7)).

Рассмотрим вектор $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{T}^N$ с координатами, удовлетворяющими следующим условиям:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq u_j \leq -\delta^0 && \text{при } j = m_1, \dots, m_{r_0}; \\ -\delta^0 &\leq u_j \leq \delta^0 && \text{при } j = m_{r_0+1}, \dots, m_{r_0+v_0}; \\ \delta^0 &\leq u_j \leq \pi && \text{при } j = m_{r_0+v_0+1}, \dots, m_{r_0+v_0+l_0}; \\ -\pi &\leq u_j \leq -\pi && \text{при } j = N-k+1, \dots, N; \end{aligned} \quad (26)$$

$0 \leq r_0, l_0 \leq N-k$, $2 \leq v_0 \leq N-k$, $r_0 + v_0 + l_0 = N-k$. Если $v_0 \geq 2$, а $x \in Q_{m_0}$, то в силу свойства (23) существует множество $\widehat{W}_{x_s x_t}$ (17), $1 \leq s < t \leq N-k$, такое, что

$$x + u = (x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \in \widehat{W}_{x_s x_t}. \quad (27)$$

Действительно, если $v_0 \geq 2$, то вектор u в (26) имеет (по крайней мере) две компоненты u_s и u_t с номерами s, t : $m_{r_0+1} \leq s < t \leq m_{r_0+v_0}$ такие, что $|u_s|, |u_t| \leq \delta^0$; с другой стороны, так как $x \in Q_{m_0}$, то компоненты вектора x с номерами s и t удовлетворяют следующему условию: $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t} \cap Q'_{m_0}$ (где Q'_{m_0} – проекция куба на плоскость (x_s, x_t)); следовательно, в силу (23) получаем (27).

В таком случае, так как $f(x) = 0$ на $\widehat{W}_{x_s x_t}$ при любых $s < t$ и $s, t = 1, \dots, N-k$ (что следует из равенства нулю функции на $\widehat{W}$ (см. (19))), из (27) мы получаем, что если $x \in Q_{m_0}$, а вектор u удовлетворяет условию (26), где $v_0 \geq 2$, то $f(x+u) = 0$ и, следовательно,

$$A_{n(\alpha)}^{(r_0, v_0, l_0)}(m; \delta, x, f) = 0. \quad (28)$$

Таким образом, из (28) и (25) следует, что при $x \in Q_{m_0}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0$, $j = 1, \dots, N-k$, $B_{n(\alpha)}^{(r_0, v_0, l_0)}(\delta, x, f) = 0$, а в таком случае, в силу (24) и в силу произвольности выбора чисел r_0, v_0, l_0 ($0 \leq r_0, v_0 \leq N-k$, $2 \leq v_0 \leq N-k$,

$r_0 + v_0 + l_0 = N - k$) при тех же предположениях на x и δ получаем

$$B_{n(\alpha)}^{(2)}(\delta, x, f) = 0, \quad x \in Q_{m_0}, \quad \delta_j = \delta^0, \quad j = 1, \dots, N - k,$$

что и доказывает предложение 3.

Рассмотрим произвольный куб Q_m из (22). Пусть $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k})$, где $\delta_j = \delta^0 = \text{diam } Q_m$, $j = 1, \dots, N - k$; используя разложение (10) для этого δ , можем записать

$$S_{n(\alpha)}(x; f) = B_{n(\alpha)}^{(0)}(\delta, x, f) + B_{n(\alpha)}^{(1)}(\delta, x, f) + B_{n(\alpha)}^{(2)}(\delta, x, f).$$

В таком случае, в силу предложений 1, 2 и 3 получаем

$$\begin{aligned} S_{n(\alpha)}(x; f) &\rightarrow 0 && \text{при } \alpha_j \rightarrow \infty, \quad j \in J_k, \\ n_j &\rightarrow \infty, \quad j \in M \setminus J_k && \text{для п.в. } x \in Q_m. \end{aligned} \quad (29)$$

Так как соотношение (29) справедливо для любого куба Q_m в множестве $\widetilde{W}^0$, то оно справедливо и для п.в. $x \in \widetilde{W}^0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Carleson, “On convergence and growth of partial sums of Fourier series”, *Acta Math.*, **116**:1 (1966), 135–157.
- [2] R. Hunt, “On the convergence of Fourier series”, *Proc. Conf., Edwardsville, Ill.*, 1967, Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., 1968, 235–255.
- [3] А. Н. Колмогоров, “Une serie de Fourier–Lebesgue divergente partout”, *Compt. Rend. Acad. Sci., Paris*, **183** (1926), 1327–1329.
- [4] C. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77**:2 (1971), 191–195.
- [5] А. Н. Колмогоров, “Une contribution à l’étude de la convergence des séries de Fourier”, *Fund. Math.*, **5** (1924), 96–97.
- [6] J. Littlewood, R. Paley, “Theorems on Fourier series and power series”, *Studia Math.*, **1** (1929), 87–121.
- [7] V. Totik, “On the divergence of Fourier series”, *Publ. Math. Debrecen*, **29**:3–4 (1982), 251–264.
- [8] П. Л. Ульянов, “А. Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье”, *УМН*, **38**:4 (1983), 51–90.
- [9] P. Sjölin, “Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series”, *Ark. Mat.*, **9**:1 (1971), 65–90.
- [10] Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе, “О сходимости и расходимости кратных рядов Фурье–Уолша”, *Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГССР*, **55** (1977), 93–106.
- [11] Л. В. Жижиашвили, “О сходимости и расходимости тригонометрических рядов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **225**:3 (1975), 495–496.
- [12] M. Kojima, “On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series”, *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, **22**:2 (1977), 163–177.
- [13] Л. В. Жижиашвили, *Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа*, Изд-во Тбилисск. ун-та, 2005.
- [14] И. Л. Блошанский, “Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье”, *Матем. заметки*, **18**:2 (1975), 153–168.
- [15] И. Л. Блошанский, “Обобщенная локализация почти всюду и сходимость двойных рядов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **242**:1 (1978), 11–13.

- [16] И. Л. Блошанский, “О критериях слабой обобщенной локализации в N -мерном пространстве”, *Докл. АН СССР*, **271**:6 (1983), 1294–1298.
- [17] И. Л. Блошанский, “Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p , $p \geq 1$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:2 (1985), 243–282.
- [18] И. Л. Блошанский, “О геометрии измеримых множеств в N -мерном пространстве, на которых справедлива обобщенная локализация для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p , $p > 1$ ”, *Матем. сб.*, **121**:1 (1983), 87–110.
- [19] И. Л. Блошанский, “О максимальных множествах сходимости и неограниченной расходимости кратных рядов Фурье функций из L_1 , равных нулю на данном множестве”, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1040–1044.
- [20] И. Л. Блошанский, О. Н. Иванова, “Слабая обобщенная локализация для тригонометрических рядов Фурье функций из классов Орлича”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Тез. докл. 12-й Саратов. зимней шк. (Саратов, 27 апр.–3 февр. 2004 г.), Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, Саратов, 2004, 28–29.
- [21] И. Л. Блошанский, “Структура и геометрия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций из L_1 , равных нулю на данном множестве”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:4 (1989), 675–707.
- [22] И. Л. Блошанский, Т. А. Мадеевич, “Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье непрерывных функций с некоторым модулем непрерывности”, *Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа*, Сб. статей, Изд-во АФЦ, М., 1999, 37–56.
- [23] I. L. Bloshanskii, “Structural and geometric characteritics of sets of convergence and divergence of multiple Fourier series of functions which equal zero on some set”, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **2**:2 (2004), 187–195.

И. Л. Блошанский

Московский государственный областной университет
E-mail: i.bloshn@g23.relcom.ru

Поступило

14.06.2007

О. В. Лифанцева

Московский государственный областной университет
E-mail: olga-lif@yandex.ru