Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Лебедева, В. Ю. Протасов, Всплески Мейера с наименьшей константой неопределенности, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 5, 732–740

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:29:24

Всплески Мейера с наименьшей константой неопределенности

Е. А. Лебедева, В. Ю. Протасов

В работе построена система всплесков Мейера, имеющая наименьшую возможную константу неопределенности. Минимизация константы неопределенности сведена к выпуклой вариационной задаче, решение которой удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Численное решение данного уравнения дает искомую систему всплесков.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Всплеск Мейера, один из первых примеров всплесковых базисов, построен Мейером в 1986 г. [1]. В настоящее время это семейство всплесков и его модификации находят многочисленные применения в теории функций, численных методах решения дифференциальных уравнений, обработке сигналов и т.д. (см., например, обширную библиографию в [2], [3]). Системы всплесков Мейера строятся следующим образом. Пусть $\theta(\omega)$ – нечетная абсолютно непрерывная функция, равная $\pi/4$ при $\omega \geq \pi/3$ и λ – четная функция такая, что

$$\lambda(\omega)|_{[0,\infty]} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \theta(\omega - \pi), & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right], \\ \frac{\pi}{4} - \theta\left(\frac{\omega}{2} - \pi\right), & \omega \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right], \\ 0, & \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, +\infty\right). \end{cases} \quad (1)$$

Всплеск-функция Мейера ψ и ее Фурье-образ $\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-it\omega} dt$ задаются как

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \sin(\lambda(\omega)) d\omega, \quad \hat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \sin(\lambda(\omega)). \quad (2)$$

Константой неопределенности функции ψ называется величина $J = \Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}}$, где

$$\Delta_{\psi} = \frac{1}{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt, \quad \Delta_{\hat{\psi}} = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega, \\ t_0 = \frac{1}{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt, \quad \omega_0 = \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega.$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00208), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3233.2008.1) и гранта МД-2195.2008.1.

Константа неопределенности служит количественным показателем в задачах, связанных с принципом неопределенности, используемом в квантовой механике, в гармоническом анализе, в задачах время-частотной локализации [4]. Константа неопределенности характеризует локализованность функции во временной (множитель Δ_ψ) и в частотной (множитель $\Delta_{\hat{\psi}}$) областях. Чем меньше каждый из данных множителей, тем лучше функция локализована в соответствующей области. Так, для системы Хаара (см., например, [5]) $\Delta_\psi = \sqrt{5/6}$, $\Delta_{\hat{\psi}} = \infty$, поэтому система Хаара лучше локализована по времени, чем по частоте. Система всплесков Мейера является самым ранним примером ортонормированного базиса пространства $L^2(\mathbb{R})$, элементы которого при достаточной гладкости имеют конечные константы неопределенности и очень хорошую локализованность во временной (если $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, то всплеск убывает на бесконечности быстрее любой степени) и в частотной областях ($\hat{\psi}$ финитна). Хорошая время-частотная локализация – одно из основных преимуществ всплесков Мейера. В данной работе будет найдена оптимальная система всплесков Мейера, имеющая наименьшую константу неопределенности $J(\psi)$, и в этом смысле обладающая наилучшей время-частотной локализацией. В следующем разделе мы сведем задачу минимизации константы неопределенности к выпуклой вариационной задаче и покажем, что решение этой задачи существует и удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению (теорема 1). В разделе 3 мы предъявим численное решение этого уравнения, получив, тем самым, функцию $\theta(\omega)$ для построения оптимального всплеска Мейера по формулам (1) и (2). По той же схеме решается аналогичная задача о минимизации величины Δ_ψ при данном значении $\Delta_{\hat{\psi}}$ (т.е. о наилучшей локализации во временной области при данной локализации в частотной области), и наоборот. Всплеск-функции Мейера, оптимальные в данном смысле, находятся с помощью той же вариационной задачи и такого же дифференциального уравнения (замечание 2).

2. Основные результаты. В работе [6] получено следующее упрощенное выражение для константы неопределенности семейства всплесков Мейера:

$$J(\theta) = \left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega \right) \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega, \quad (3)$$

при этом функция θ выбирается из множества

$$\left\{ \theta \in C^1 \left[0, \frac{\pi}{3} \right], \theta(0) = \theta' \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0, \theta \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Представление функционала в виде (3) остается справедливым, если выбирать функции θ не из пространства $C^1[0, \pi/3]$, а из пространства Соболева

$$W_2^1 \left[0, \frac{\pi}{3} \right] = \left\{ f - \text{абсолютно непрерывна, } f' \in L^2 \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \right\}.$$

Действительно, условие $\theta \in C^1[0, \pi/3]$ было использовано при получении формулы (3) для применения свойства преобразования Фурье производной $\hat{f}'(w) = iw\hat{f}(w)$, которое справедливо и в пространстве W_2^1 .

Используя обозначение $x(t) = 2\theta(w)$, приведем функционал (3) к виду

$$I(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} t \sin x(t) dt \right) \int_0^{\pi/3} (x'(t))^2 dt, \quad (4)$$

где

$$x \in W_2^1 \left[0, \frac{\pi}{3} \right], \quad x(0) = 0, \quad x \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. *Существует функция $x(t)$, доставляющая абсолютный минимум функционала (4) при условиях (5). Она является аналитической возрастающей вогнутой функцией на отрезке $[0, \pi/3]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$x''(t) = -pt \cos x(t) \quad (6)$$

при некотором значении параметра $p \geq 0$.

Доказательство теоремы разобьем на несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Если при некотором $p \geq 0$ возрастающая функция $\hat{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(\pi/3) = \pi/2$, то она доставляет абсолютный минимум в вариационной задаче*

$$\begin{cases} F(x) = - \int_0^{\pi/3} t \sin x(t) dt \rightarrow \min, \\ x \in W_2^1 \left[0, \frac{\pi}{3} \right], \quad x(0) = 0, \quad x \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{2}, \\ G(x) = \int_0^{\pi/3} (x'(t))^2 dt = a, \end{cases} \quad (7)$$

где $a = G(\hat{x})$, причем данная точка минимума единственна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функционал $\int_a^b (x'(t))^2 dt$ при заданных значениях функции $x(t)$ на концах отрезка достигает своего минимума на линейной функции [7; с. 93]. Так, минимум функционала $G(x)$ достигается при $x(t) = (3/2)t$. Следовательно, $G(x) \geq 3\pi/4$, причем равенство выполнено только для линейной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Если $p = 0$, то $\hat{x}(t) = (3/2)t$, $a = 3\pi/4$, при этом область определения в задаче (7) состоит из одной точки $\hat{x}$ (замечание 1). Поэтому в данном случае утверждение леммы тривиально, и далее считаем, что $p > 0$.

Заменив последнее равенство в задаче (7) аналогичным неравенством $G(x) \leq a$, получаем новую вариационную задачу (7'). Покажем, что $\hat{x}$ является единственной точкой абсолютного минимума в задаче (7'), из чего будет следовать лемма. Заметим сначала, что достаточно ограничиться функциями x такими, что $x(t) \in [0, \pi/2]$ при всех $t \in [0, \pi/3]$. В самом деле, если $x(t_0) \notin [0, \pi/2]$ при некотором t_0 , то существует функция $\tilde{x}$, удовлетворяющая всем условиям задачи (7') и условию $0 \leq \tilde{x}(t) \leq \pi/2$, $t \in [0, \pi/3]$, для которой $F(\tilde{x}) < F(x)$:

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x(t) \leq -\frac{3\pi}{2} \text{ или } x(t) \geq \frac{\pi}{2}, \\ x(t), & 0 \leq x(t) \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & -\pi \leq x(t) \leq 0, \\ -x(t) - \pi, & -\frac{3\pi}{2} \leq x(t) \leq -\pi. \end{cases}$$

На каждом выделенном множестве $G(\tilde{x}) \leq G(x)$ и $\sin \tilde{x}(t) \geq \sin x(t)$. Поэтому $F(\tilde{x}) \leq F(x)$, причем это неравенство строгое, если только $\tilde{x} \neq x$. Таким образом, достаточно минимизировать функционал F на выпуклом множестве

$$M_a = \left\{ x \in W_2^1 \left[0, \frac{\pi}{3} \right], G(x) \leq a, x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}, 0 \leq x(t) \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

На этом множестве F является строго выпуклым (т.е. $F((x+y)/2) < (F(x)+F(y))/2$ для всех x, y таких, что $x \neq y$), поскольку функция $f(x) = -\sin x$ строго выпукла на отрезке $[0, \pi/2]$. Поэтому точка минимума F на множестве M_a (если существует) единственна. Необходимые условия того, что функция $\hat{x}$ доставляет локальный минимум в задаче (7') следующие: существуют множители $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$ не обращающиеся в нуль одновременно, для которых лагранжиан $L(x', x, t) = -\lambda_0 t \sin x + \lambda_1 (x')^2$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа $(d/dt)L_{x'} = L_x$ на экстремали $x(t) = \hat{x}(t)$ и условию дополняющей нежесткости $\lambda_1(G(\hat{x}) - a) = 0$. Если при этом $\lambda_0 > 0$, то эти условия также достаточны для того, чтобы $\hat{x}$ доставляла абсолютный минимум. Это следует из выпуклости функционала F и множества M_a (см., например, [8; с. 51–52]). В нашем случае условие дополняющей нежесткости выполнено автоматически, а уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид $2\lambda_1 x'' = -\lambda_0 t \cos x$. Положив $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_0 = p > 0$, и воспользовавшись уравнением (6), получаем требуемое. Таким образом, функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче (7'), а значит, и в задаче (7).

ЛЕММА 2. При любом $p \geq 0$ уравнение (6) имеет единственное решение $x(t)$ такое, что $x(0) = 0$, $x(\pi/3) = \pi/2$. Это решение является аналитической возрастающей вогнутой функцией, непрерывно зависящей от параметра p .

При $p \rightarrow +0$ имеем $G(x) \rightarrow 3\pi/4$, а при $p \rightarrow +\infty$ имеем $G(x) \rightarrow +\infty$. Для любого $a \geq 3\pi/4$ существует единственное значение параметра $p \geq 0$, при котором соответствующее решение (6) удовлетворяет равенству $G(x) = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полулоосу $\Pi = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0, 0 \leq y \leq \pi/2\}$. Для произвольного $b > 0$ обозначим через $y_b(t)$ решение уравнения $y''(t) = -t \cos y(t)$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = b$, выходящее из точки $(0, 0)$ и продолженное до пересечения с границей Π . Функция $y_b(t)$ однозначно продолжается в Π либо до бесконечности, либо до пересечения с прямой $y = 0$, либо до пересечения с прямой $y = \pi/2$ в некоторой точке $t = t_b$. В последнем случае сжатием аргумента получаем решение уравнения (6): функция $x(t) = y_b(3t_b t/\pi)$ есть решение (6) при $p = p(b) = (3t_b/\pi)^3$ и $x(0) = 0$, $x(\pi/3) = \pi/2$.

Если $b_1 > b_2$, то $y_{b_1}(t) > y_{b_2}(t)$ при любом t , для которого обе функции определены. В противном случае найдется $u > 0$, для которого $y_{b_1}(u) = y_{b_2}(u)$ и $y_{b_1}(t) > y_{b_2}(t)$ при всех $t \in (0, u)$. Тогда, как следует из дифференциального уравнения, $y_{b_1}''(t) > y_{b_2}''(t)$ при всех $t \in (0, u)$, что делает невозможным равенство $y_{b_1}(u) = y_{b_2}(u)$. Итак, величина t_b убывает от b ; следовательно, и функция $p(b) = (3t_b/\pi)^3$ убывает. Покажем, что $p(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$. Для этого заметим, что так как $\cos y_b < 1$ внутри полулоосы Π , то $y_b(t)$ мажорирует решение $z_b(t)$ уравнения $z'' = -t$ с начальными условиями $z(0) = 0$, $z'(0) = b$. Таким образом, $y_b(t) > -(1/6)t^3 + bt$, поэтому t_b меньше положительного корня уравнения $-(1/6)t^3 + bt = \pi/2$, который, как легко проверить, стремится к нулю при $b \rightarrow \infty$. Следовательно, $t_b \rightarrow 0$ и $p(b) \rightarrow 0$ при

$b \rightarrow \infty$. Так же показываем, что функция $x(t) = y_b(3t_b t/\pi)$ стремится к линейной функции $(3/2)t$ равномерно на отрезке $[0, \pi/3]$ при $b \rightarrow \infty$.

Обозначим через l луч $\{(t, \pi/2), t \geq 0\}$ и через r – точную нижнюю грань значений $b \geq 0$, для которых график решения y_b пересекает l . Из монотонной зависимости решения от параметра b следует, что y_b пересекает l при любом $b > r$ и не пересекает при любом $b < r$. Рассмотрим пограничный случай $b = r$.

Случай 1. Пусть график функции y_r пересекает луч l в некоторой точке $t = s$. Из вогнутости y_r следует, что $y'_r(s) \geq 0$. Если $y'_r(s) = 0$, то через точку $t = s$ пройдут два решения уравнения $y''(t) = -t \cos y$ с начальными условиями $y(s) = \pi/2$, $y'(s) = 0$ (первое $y \equiv \pi/2$, второе $y = y_r$), что невозможно. Если же $y'_r(s) > 0$, то решение y_r продолжается за точку s , и найдется $\varepsilon > 0$, для которого $y_r(s + \varepsilon) > \pi/2$. В силу непрерывной зависимости решения от начальных данных для достаточно малого $\delta > 0$ по-прежнему будем иметь $y_{r-\delta}(s + \varepsilon) > \pi/2$. Значит, решение $y_{r-\delta}$ также пересекает l , что противоречит выбору r . Итак, y_r не пересекает l . Поскольку эта функция вогнута, возможны два случая.

Случай 2. Максимум функции y_r достигается в некоторой точке $s \geq 0$. При этом $y_r(s) < \pi/2$. Тогда $y'_r(s) = 0$ и $y'_r(s + \varepsilon) < 0$ при $\varepsilon > 0$. Тогда выберем достаточно малое $\delta > 0$, для которого $y'_{r+\delta}(s + \varepsilon) < 0$ и $y_{r+\delta}(t) < \pi/2$ при всех $t \in [0, s + \varepsilon]$. Так как решение $y_{r+\delta}$ вогнуто, оно не пересечет l , что противоречит выбору r .

Случай 3. Решение y_r продолжается на весь луч $[0, +\infty)$, монотонно возрастает и ограничено сверху константой $\pi/2$. Если при этом $h = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_r(t) < \pi/2$, то $y''_r(t) \leq -t \cos h$ для всех $t \geq 0$. Следовательно, $y_r(t) \leq rt - (\cos h/6)t^3$, что противоречит возрастанию y_r на луче $[0, +\infty)$. Таким образом, $h = \pi/2$. Тогда $t_b \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow r + 0$. В самом деле, поскольку $y_r(N) < \pi/2$ для любого $N > 0$, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $y_{r+\varepsilon} < \pi/2$ на отрезке $[0, N]$, и, значит, $t_{r+\varepsilon} > N$. Следовательно, $p(b) = (3t_b/\pi)^3 \rightarrow +\infty$ при $b \rightarrow r + 0$.

Итак, уравнение (6) при любом $p \geq 0$ имеет единственное решение, и это решение вогнуто и возрастает. В силу непрерывной зависимости решения от начальных данных величина t_b и функции y_b и x_b непрерывно зависят от b . Следовательно, решение x_b непрерывно зависит от t_b , а значит, и от p , поскольку $t_b = \pi p^{1/3}/3$. Следовательно, решение x непрерывно зависит от p . При $p \rightarrow 0$, как было показано, решение равномерно стремится к функции $(3/2)t$. При $p \rightarrow +\infty$ оно стремится к константе $\pi/2$ равномерно на каждом отрезке $[\varepsilon, \pi/3]$, $\varepsilon > 0$. Действительно, для любого $t \in [\varepsilon, \pi/3]$ имеем $x_b(t) = y_b(3t_b t/\pi) > y_r(3t_b t/\pi)$. Так как $b \rightarrow r + 0$ и $t_b \rightarrow \infty$ при $p(b) \rightarrow \infty$, величина $y_r(3t_b t/\pi)$ стремится к $y_r(+\infty) = \pi/2$.

Далее, так как $x \rightarrow (3/2)t$ при $p \rightarrow 0$, то $G(x) \rightarrow 3\pi/4$. С другой стороны, при $p \rightarrow \infty$ имеем $x \rightarrow \pi/2$ и, следовательно, $G(x) \rightarrow \infty$. В самом деле, поскольку минимум функционала $\int_a^b (x'(t))^2 dt$ достигается на линейной функции (замечание 1), для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$G(x) > \int_0^\varepsilon (x'(t))^2 dt \geq \left(\frac{x(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 \cdot \varepsilon = \frac{x^2(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Так как $x(\varepsilon) \rightarrow \pi/2$ при $p \rightarrow \infty$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} G(x) \geq \pi^2/(4\varepsilon)$. В силу произвольности ε этот предел равен $+\infty$. Поскольку величина $G(x)$ непрерывно зависит от параметра p , $G(x)$ принимает все значения от $3\pi/4$ до $+\infty$. В силу леммы 1 каждому значению $G(x)$ соответствует единственное p .

Объединяя леммы 1 и 2, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При любом $a \geq 3\pi/4$ для вариационной задачи (7) существует единственная функция $x \in W_2^1[0, \pi/3]$, доставляющая абсолютный минимум. Она является решением уравнения (6) для некоторого значения параметра $p = p(a)$, при этом функция $p(a)$ непрерывная и возрастающая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. При фиксированном значении $a = G(x)$ минимум функционала $F(x)$ достигается на решении уравнения (6) для некоторого параметра $p = p(a)$, непрерывно зависящего от a (предложение 1). Следовательно, значение функционала $I(x) = (1/4)(14\pi/3 + (21/\pi)F(x))G(x)$ также непрерывно зависит от a . В силу леммы 2 имеем $G(x) \rightarrow +\infty$ и $F(x) \rightarrow F(\pi/2) = -\pi^2/18$ при $a \rightarrow \infty$. Поэтому $I(x) \rightarrow +\infty$ при $a \rightarrow \infty$. Следовательно, минимальное значение функционала $I(x)$ достигается при некотором a и соответствующих p и $x(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По той же схеме решаются две аналогичные задачи на поиск оптимальных всплесков Мейера: найти минимальное значение Δ_ψ при данном значении $\Delta_{\hat{\psi}} = A$, и наоборот: найти минимальное значение $\Delta_{\hat{\psi}}$ при данном значении $\Delta_\psi = B$. Решения дают всплески Мейера с наилучшей локализацией во временной области при данной локализации в частотной области и, соответственно, наоборот. Из предложения 1 следует, что для любых допустимых значениях A и B оптимальный всплеск Мейера строится с помощью решений уравнения (6) при условиях (5) и дополнительном условии $\Delta_{\hat{\psi}} = A$ (соответственно $\Delta_\psi = B$).

Рис. 1

3. Численное нахождение параметра p и минимизирующей функции $x(t)$. Теорема 1 и предложение 1 дают способ численного нахождения параметра p и функции x , для которых функционал $I(x)$, заданный формулой (4), принимает наименьшее значение. Для каждого $p \geq 0$ решение $x(t)$ соответствующего уравнения (6) с граничными условиями $x(0) = 0$, $x(\pi/3) = \pi/2$ подставляется в функционал $I(x)$, а затем ищется минимальное значение функционала по всем $p \in [0, +\infty)$. Численное решение с помощью пакета MathCAD 14, проверенное с помощью пакета Mathematica 5.0, проведено по следующей схеме. В начале для уравнения (6)

Рис. 2

Рис. 3

получено решение при $p = 20$. Далее уравнение (6) численно решено как уравнение с частными производными, считая параметр p аргументом неизвестной функции $\bar{x}(t, p)$. Затем на полученном семействе решений $\bar{x}_p(t) = \bar{x}(t, p)$ найдены значения функционала $I(\bar{x}_p)$. График зависимости значений функционала I от значений параметра p представлен на рис. 1 сплошной линией, пунктирная линия соответствует значению константы неопределенности на функции $x(t) = (3/2)t$. Данное значение равно 6.886. Минимальное значение функционала $I(x)$ с точностью 0.001 равно 6.874 и достигается при $p = 0.676$. На рис. 2 и 3 изображены графики прямой $x(t) = (3/2)t$ (пунктирная линия) и решения уравнения (6) при $p = 0.676$ (сплошная линия). Рис. 3 является фрагментом рис. 2 на участке $0,4 \leq x \leq 0,6$.

В качестве приближения к искомой функции можно предложить полином

$$\tilde{x}(t) = 1.580t - 0.113t^3 + 0.042t^5 - 7.037 \cdot 10^{-3}t^7 + 1.582 \cdot 10^{-3}t^9,$$

полученный рекуррентным вычислением коэффициентов разложения функции $x(t)$ в ряд Тейлора в точке $t_0 = 0$. Значение константы неопределенности для $\tilde{x}$ равно 6.875, а максимальное отклонение от искомой функции $\max_{t \in [0, \pi/3]} |\tilde{x}(t) - x(t)|$ не превосходит $1.091 \cdot 10^{-3}$.

Рис. 4

Рис. 5

4. Выводы. Оптимальные всплески Мейера. Система всплесков Мейера с наименьшей константой неопределенности строится следующим образом. В начале ищется решение $x(t)$ уравнения (6) при $p = 0.676$ с граничными условиями $x(0) = 0$, $x(\pi/3) = \pi/2$. Затем всплеск-функция Мейера ψ и ее преобразование Фурье $\hat{\psi}$ вычисляется по формулам (1) и (2), где $\theta(w) = (1/2)x(t)$. Функция ψ порождает систему всплесков Мейера с наименьшей константой неопределенности $J = 6.874$. Графики функций ψ и $\hat{\psi}$ представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

Авторы выражают благодарность профессору И. Я. Новикову за постановку задачи. Мы также признательны С. В. Конягину, А. С. Кочурову, А. В. Рождественскому и К. С. Рютину за ценные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Meyer, "Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs", *Seminaire Bourbaki*, 1985/86, Astérisque, **145–146**, Soc. Math. France, Paris, 1987, 209–223.
- [2] I. M. Johnstone, G. Kerkycharian, D. Picard, M. Raimondo, "Wavelet deconvolution in a periodic setting", *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, **66**:3 (2004), 547–573.

- [3] Kumarayapa Ajith, Zhang Ye, “More efficient ground truth ROI image coding technique: implementation and wavelet based application analysis”, *J. Zhejiang Univ. Sci. A*, **8**:6 (2007), 835–840.
- [4] G. B. Folland, A. Sitaram, “The uncertainty principle: a mathematical survey”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **3**:3 (1997), 207–238.
- [5] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [6] Е. А. Лебедева, “Минимизация константы неопределенности семейства всплесков Мейера”, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 553–560.
- [7] В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров, *Сборник задач по оптимизации*, Наука, М., 1984.
- [8] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.

Е. А. Лебедева

Курский государственный университет

E-mail: ealebedeva2004@mail.ru

Поступило

28.08.2007

В. Ю. Протасов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v-protassov@yandex.ru