Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Портнягин, Шаудеровские оценки и полная регулярность решений эллиптической системы, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 89–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:50:55

Шаудеровские оценки и полная регулярность решений эллиптической системы

Д. В. Портнягин

Изучается полная регулярность решений недиагональной эллиптической системы нелинейных дифференциальных уравнений дивергентного вида, чьи коэффициенты являются достаточно медленно меняющимися функциями своих аргументов и чьи внедиагональные члены достаточно малы. Для этого применяется техника, основанная на последовательных приближениях к решению и применении на каждом шаге шаудеровских оценок.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Контрпример неограниченного решения, построенный ДеДжорджи в [1], показывает, что оценки ДеДжорджи–Нэша–Мозера несправедливы для эллиптической системы, поэтому регулярность слабых решений системы не может быть установлена таким же образом, как и для одного уравнения. Существует еще один пример Нечаса и Сучека нелинейной эллиптической системы с достаточно гладкими коэффициентами, но чье решение не принадлежит даже $W^{2,2}$. Эти примеры заставляют думать, что более высокая регулярность решений для системы может быть достигнута путем наложения дополнительных, помимо эллиптичности, условий на уравнения системы. Вопрос при каких условиях на матрицу коэффициентов слабые решения нелинейной эллиптической системы являются регулярными до сих пор остается открытым.

Моррей [2], Джустини и Миранда [3] и Пепе [4] показали, что слабые решения некоторых нелинейных эллиптических систем обладают частичной регулярностью, т.е. регулярностью на некотором открытом множестве $\Omega_0 \subset \Omega$ таком, что $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$. Для этого они применяют непрямой метод.

Объясним, почему случай системы, в отличие от случая одного уравнения, является таким сложным для изучения. Рассмотрим систему (2.1). Если мы попытаемся применить стандартную технику уровней и проинтегрируем каждое ее уравнение с пробными функциями $\text{sign } u(|u| - k)_+$ и $\text{sign } v(|v| - k)_+$ соответственно, то справа мы будем иметь интегралы по двум разным множествам: $\int_{\{|u|>k\}} b_1 \nabla v \nabla u$ и $\int_{\{|v|>k\}} a_2 \nabla u \nabla v$. И даже если a_2 и b_1 достаточно малы, то эти слагаемые не могут быть поглощены положительными членами $\int_{\{|u|>k\}} a_1 |\nabla u|^2$ и $\int_{\{|u|>k\}} b_2 |\nabla v|^2$ слева, чтобы получилась соответствующая оценка. Однако у нас есть идея, как обойти существующие трудности. Если мы оценим максимум модуля решения, используя технику уровней с помощью выражения, зависящего от производных решения, а затем применим оценки Шаудера, оценивающие $C^{2,\alpha}$ -нормы через максимум модуля,

то мы можем, так сказать, замкнуть получившиеся оценки. В настоящей работе шаг за шагом приближаясь к решению при помощи гладких функций и используя на каждом шаге шаудеровские оценки и оценки максимума модуля решения, мы устанавливаем $C^{2,\alpha}$ -решения эллиптической системы, чьи внедиагональные члены в матрице коэффициентов достаточно малы и чьи коэффициенты являются достаточно медленно меняющимися функциями своих аргументов. Эта малость определяется данными задачи: правыми частями уравнений, данными на границе и областью Ω .

2. Основные обозначения и предположения. Мы будем заниматься системой двух уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(u, v) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_1(x, u, v, u_x, v_x)\nabla u + b_1(x, u, v, u_x, v_x)\nabla v) = f_1(x), \\ \mathcal{L}_2(u, v) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_2(x, u, v, u_x, v_x)\nabla u + b_2(x, u, v, u_x, v_x)\nabla v) = f_2(x), \end{cases} \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

Задаются граничные условия типа Дирихле:

$$(u - g_1, v - g_2)(x) \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (2.2)$$

Здесь и далее принимаются следующие обозначения: Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей; $x \in \Omega$; $n \geq 2$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$; $\nu = 1, 2$ и по повторяющимся индексам предполагается суммирование; $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$; $W_0^{1,2}(\Omega)$ пространство функций из $W^{1,2}(\Omega)$ обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ в смысле следов.

Решение системы (2.1) с данными Дирихле (2.2) понимается в слабом смысле, как в [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Измеримая вектор-функция $(u_1, u_2) = (u, v)$ называется *слабым решением* задачи (2.1), (2.2), если $u_\nu \in W^{1,2}(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} a_1 u_{1x_i} \varphi_{1x_i} + b_1 u_{2x_i} \varphi_{1x_i} + a_2 u_{1x_i} \varphi_{2x_i} + b_2 u_{2x_i} \varphi_{2x_i} dx = - \int_{\Omega} (f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2) dx$$

для всех пробных функций

$$\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Граничное условие (2.2) понимается в слабом смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. В качестве условия эллиптичности системы дифференциальных уравнений (2.1) мы принимаем следующее условие (см. [5]):

$$\begin{aligned} \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad r_\nu \in \mathbb{R}^2, \quad s_\nu^i \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \nu = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n, \\ a_1(x, r, s) s_1^i s_1^i + b_1(x, r, s) s_2^i s_1^i + a_2(x, r, s) s_1^i s_2^i + b_2(x, r, s) s_2^i s_2^i \geq \lambda |s|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть $\alpha \in (0, 1)$,

$$H_{x, x_0}^\alpha[u; \Omega] = \frac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|^\alpha}.$$

Если $\sup_{x \in \Omega} |H_{x, x_0}^\alpha[u; \Omega]| < \infty$, то говорят, что u непрерывна по Гёльдеру в точке x_0 с показателем α . Введем полуномы

$$[u]_{0; \Omega} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad [u]_{\alpha; \Omega} = \sup_{x, x_0 \in \Omega} |H_{x, x_0}^\alpha[u; \Omega]|,$$

$$[u]_{k;\Omega} = \max_{|\mu|=k} [D^\mu u]_{0;\Omega}, \quad [u]_{k,\alpha;\Omega} = \max_{|\mu|=k} [D^\mu u]_{\alpha;\Omega},$$

где k – целое положительное число, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ – индекс, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $|\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i$, и $D^\mu = \partial^{|\mu|} u / \partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_n^{\mu_n}$. Функция $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, если $u \in C^k(\bar{\Omega})$ и $[u]_{k,\alpha;\Omega} < \infty$. Введем нормы в $C^k(\bar{\Omega})$:

$$|u|_{k;\Omega} = \sum_{m=0}^k [u]_{m;\Omega},$$

и в $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$:

$$|u|_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega}.$$

О функциях $g_{1,2}(x)$ и $f_{1,2}(x)$ в граничных условиях (2.2) и в уравнениях (2.1) предполагается следующее:

$$g_{1,2}(x) \in C^{2,\alpha_g}(\bar{\Omega}), \quad f_{1,2} \in C^{\alpha_f}(\bar{\Omega}),$$

и мы предполагаем, что $\alpha = \min[\alpha_g, \alpha_f]$. Для всех x , u , v , u_x , v_x коэффициенты системы (2.1), как функции этих переменных, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} & |b_1|, |a_2|, |a_{1x_i}|, |b_{1x_i}|, |a_{2x_i}|, |b_{2x_i}|, \\ & |a_{1u}|, |b_{1u}|, |a_{2u}|, |b_{2u}|, |a_{1v}|, |b_{1v}|, |a_{2v}|, |b_{2v}|, \\ & |a_{1u_{x_i}}|, |b_{1u_{x_i}}|, |a_{2u_{x_i}}|, |b_{2u_{x_i}}|, |a_{1v_{x_i}}|, |b_{1v_{x_i}}|, |a_{2v_{x_i}}|, |b_{2v_{x_i}}|, \\ & |a_{1x_ix_j}|, |b_{1x_ix_j}|, |a_{2x_ix_j}|, |b_{2x_ix_j}|, \\ & |a_{1u_{x_i}}|, |b_{1u_{x_i}}|, |a_{2u_{x_i}}|, |b_{2u_{x_i}}|, |a_{1v_{x_i}}|, |b_{1v_{x_i}}|, |a_{2v_{x_i}}|, |b_{2v_{x_i}}|, \\ & |a_{1u_{x_i}x_j}|, |b_{1u_{x_i}x_j}|, |a_{2u_{x_i}x_j}|, |b_{2u_{x_i}x_j}|, |a_{1v_{x_i}x_j}|, |b_{1v_{x_i}x_j}|, |a_{2v_{x_i}x_j}|, |b_{2v_{x_i}x_j}|, \\ & |a_{1uu}|, |b_{1uu}|, |a_{2uu}|, |b_{2uu}|, |a_{1vu}|, |b_{1vu}|, |a_{2vu}|, |b_{2vu}|, |a_{1vv}|, |b_{1vv}|, |a_{2vv}|, |b_{2vv}|, \\ & |a_{1u_{x_i}u_{x_j}}|, |b_{1u_{x_i}u_{x_j}}|, |a_{2u_{x_i}u_{x_j}}|, |b_{2u_{x_i}u_{x_j}}|, |a_{1v_{x_i}u_{x_j}}|, |b_{1v_{x_i}u_{x_j}}|, |a_{2v_{x_i}u_{x_j}}|, |b_{2v_{x_i}u_{x_j}}|, \\ & |a_{1v_{x_i}v_{x_j}}|, |b_{1v_{x_i}v_{x_j}}|, |a_{2v_{x_i}v_{x_j}}|, |b_{2v_{x_i}v_{x_j}}|, \\ & |a_{1uu_{x_i}}|, |b_{1uu_{x_i}}|, |a_{2uu_{x_i}}|, |b_{2uu_{x_i}}|, |a_{1vu_{x_i}}|, |b_{1vu_{x_i}}|, |a_{2vu_{x_i}}|, |b_{2vu_{x_i}}|, \\ & |a_{1uv_{x_i}}|, |b_{1uv_{x_i}}|, |a_{2uv_{x_i}}|, |b_{2uv_{x_i}}|, |a_{1vv_{x_i}}|, |b_{1vv_{x_i}}|, |a_{2vv_{x_i}}|, |b_{2vv_{x_i}}|, \\ & |a_{1u_{x_i}u_{x_j}}|, |b_{1u_{x_i}u_{x_j}}|, |a_{2u_{x_i}u_{x_j}}|, |b_{2u_{x_i}u_{x_j}}|, \\ & \leq \delta = 3^{-1}(C_7 + 1)^{-1}(1 + [g_1]_{0;\Omega}^3 + [g_2]_{0;\Omega}^3 + [f_1]_{\alpha;\Omega} + |g_1|_{2,\alpha;\Omega} + [f_2]_{\alpha;\Omega} \\ & \quad + |g_2|_{2,\alpha;\Omega} + [f_1]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{0;\Omega}^3)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где константа C_7 зависит только от данных: n , α , Ω , λ и (см. ниже) Λ_1 , Λ_2 ,

$$\exists \Lambda_1, \Lambda_2 > 2\delta \quad |\Lambda_1 - a_1| \leq \delta, \quad |\Lambda_2 - b_2| \leq \delta. \quad (2.5)$$

Мы предполагаем, что $\partial\Omega$ принадлежит $C^{2,\alpha}$.

3. Вспомогательные предложения.

ТЕОРЕМА 3.1 (Шаудеровские оценки [5; теорема 5.3, замечание 5.1, с. 31]). Пусть u – $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ -решение линейного эллиптического уравнения, удовлетворяющее $u = g$ на $\partial\Omega$ с $g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$,

$$\mathcal{L}u = -a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + cu = f \quad \text{для } x \in \Omega,$$

чьи коэффициенты удовлетворяют

$$\exists \Lambda \geq \lambda > 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \lambda |\xi|^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2;$$

$$a^{ij}, b^i, c \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1, \quad u$$

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \sum_{i,j} [a^{ij}]_{\alpha;\Omega} + \sum_i [b^i]_{\alpha;\Omega} + [c]_{\alpha;\Omega} \right\} \leq \Lambda_\alpha.$$

Тогда

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leq C(|u|_{0;\Omega} + [f]_{\alpha;\Omega} + |g|_{2,\alpha;\Omega}), \quad (3.1)$$

где константа C зависит только от n, α , постоянных Λ и λ в условии эллиптичности, Ω и Λ_α .

Мы используем следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. Пусть Ω – ограниченная область и $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$[u]_2 \leq \varepsilon [u]_{2,\alpha} + \tilde{C}_1 [u]_0, \quad (3.2)$$

$$[u]_1 \leq \varepsilon [u]_{2,\alpha} + \tilde{C}_2 [u]_0, \quad (3.3)$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ зависят от n, α, Ω и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [5; теорема 1.2, с. 18]. Также мы используем лемму (см. [5; лемма 1.1, с. 18]).

ЛЕММА 3.3. Пусть $u, v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$. Тогда

$$[uv]_\alpha \leq [u]_0 [v]_\alpha + [v]_0 [u]_\alpha \leq |u|_\alpha |v|_\alpha.$$

ТЕОРЕМА 3.4 (Ограниченность решения [5; теорема 4.2, с. 9]). Рассмотрим приближение решения (u, v) гладкими функциями $(u^m, v^m) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ такими, что $(u^m, v^m) \rightarrow (u, v)$ при $m \rightarrow \infty$ в $\bar{\Omega}$. Не уменьшая общности, можно считать:

$$\begin{aligned} |u^m|_{2,\alpha;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}, & |u^m|_{2;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{2;\Omega}, & |u^m|_{1,\alpha;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{1,\alpha;\Omega}, \\ |u^m|_{1;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{1;\Omega}, & |u^m|_{\alpha;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{\alpha;\Omega}, & |u^m|_\Omega &\geq |u^{m-1}|_\Omega, \\ |u^m - u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega} &\leq 1, & |u^m - u^{m-1}|_{2;\Omega} &\leq 1, \\ |v^m|_{2,\alpha;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}, & |v^m|_{2;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{2;\Omega}, & |v^m|_{1,\alpha;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{1,\alpha;\Omega}, \\ |v^m|_{1;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{1;\Omega}, & |v^m|_{\alpha;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{\alpha;\Omega}, & |v^m|_\Omega &\geq |v^{m-1}|_\Omega, \\ |v^m - v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega} &\leq 1, & |v^m - v^{m-1}|_{2;\Omega} &\leq 1. \end{aligned}$$

Каждое такое приближение удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_1(u^{m-1}, v^{m-1})(u_{x_i}^m - u_{x_i}^{m-1})) \\ \quad + (\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)) + f_1, \\ \mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) = \frac{\partial}{\partial x_i} (b_2(u^{m-1}, v^{m-1})(v_{x_i}^m - v_{x_i}^{m-1})) \\ \quad + (\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)) + f_2, \end{cases} \quad x \in \Omega, \quad (3.4)$$

где

$$\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_1(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^m) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_1(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^{m-1}),$$

$$\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_2(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^{m-1}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_2(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^m),$$

и $F(u^{m-1}, v^{m-1})$ обозначает $F(x, u^{m-1}, v^{m-1}, u_x^{m-1}, v_x^{m-1})$, а $\mathcal{L}(u^{m-1}, v^{m-1})$ получается из $\mathcal{L}(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m)$ подстановкой (u^{m-1}, v^{m-1}) вместо (u^m, v^m) в нем. Тогда

$$[u^m]_{0;\Omega} \leq [u^m]_{0;\partial\Omega} + \tilde{C}(\delta[|u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega} + |v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}] + [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{0;\Omega} + [f_1]_{0;\Omega})(\text{mes } \Omega)^{2/(n+2)}2^{(n+4)/4}, \quad (3.5)$$

$$[v^m]_{0;\Omega} \leq [v^m]_{0;\partial\Omega} + \tilde{C}(\delta[|u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega} + |v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}] + [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{0;\Omega} + [f_2]_{0;\Omega})(\text{mes } \Omega)^{2/(n+2)}2^{(n+4)/4}, \quad (3.6)$$

где $\tilde{C}$ зависит только от данных.

Доказывается эта теорема посредством выделения главной (по u^m или v^m) части в уравнениях (3.4) и рассмотрения всех оставшихся членов, как правых частей, с использованием свойств наших гладких приближений u^{m-1} и v^{m-1} , после чего применяется хорошо известная техника уровней для оценки максимума модуля решения.

4. Основной результат. Нашим основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Для каждой компоненты решения системы (2.1) с граничными данными (2.2) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |u|_{2,\alpha;\Omega} &\leq \tilde{C}_3(n, \alpha, \Omega, \Lambda_1, \Lambda_2, \lambda, \\ &\quad [f_1]_{0;\Omega}, [f_1]_{\alpha;\Omega}, [f_2]_{0;\Omega}, [f_2]_{\alpha;\Omega}, [g_1]_{0;\Omega}, [g_2]_{0;\Omega}, |g_1|_{2,\alpha;\Omega}, |g_2|_{2,\alpha;\Omega}), \\ |v|_{2,\alpha;\Omega} &\leq \tilde{C}_4(n, \alpha, \Omega, \Lambda_1, \Lambda_2, \lambda, \\ &\quad [f_1]_{0;\Omega}, [f_1]_{\alpha;\Omega}, [f_2]_{0;\Omega}, [f_2]_{\alpha;\Omega}, [g_1]_{0;\Omega}, [g_2]_{0;\Omega}, |g_1|_{2,\alpha;\Omega}, |g_2|_{2,\alpha;\Omega}), \end{aligned}$$

при условии, что справедливы предположения (2.5) и (2.4) о коэффициентах системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим приближения решения (u, v) гладкими функциями $(u^m, v^m) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ такие, что $(u^m, v^m) \rightarrow (u, v)$ при $m \rightarrow \infty$ в $\bar{\Omega}$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\begin{aligned} |u^m|_{2,\alpha;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}, & |u^m|_{2;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{2;\Omega}, & |u^m|_{1,\alpha;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{1,\alpha;\Omega}, \\ |u^m|_{1;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{1;\Omega}, & |u^m|_{\alpha;\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{\alpha;\Omega}, & |u^m|_{\Omega} &\geq |u^{m-1}|_{\Omega}, \\ |u^m - u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega} &\leq 1, & |u^m - u^{m-1}|_{2;\Omega} &\leq 1, \\ |v^m|_{2,\alpha;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}, & |v^m|_{2;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{2;\Omega}, & |v^m|_{1,\alpha;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{1,\alpha;\Omega}, \\ |v^m|_{1;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{1;\Omega}, & |v^m|_{\alpha;\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{\alpha;\Omega}, & |v^m|_{\Omega} &\geq |v^{m-1}|_{\Omega}, \\ |v^m - v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega} &\leq 1, & |v^m - v^{m-1}|_{2;\Omega} &\leq 1. \end{aligned}$$

Каждое такое приближение удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \Lambda_1 u_{x_i x_i}^m + [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) - \Lambda_1 u_{x_i x_i}^m] \\ \quad = a_1(u^{m-1}, v^{m-1})(u_{x_i x_i}^m - u_{x_i x_i}^{m-1}) + (\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)) + f_1, \\ \Lambda_2 v_{x_i x_i}^m + [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) - \Lambda_2 v_{x_i x_i}^m] \\ \quad = b_2(u^{m-1}, v^{m-1})(v_{x_i x_i}^m - v_{x_i x_i}^{m-1}) + (\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)) + f_2, \end{cases} \quad x \in \Omega,$$

где

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) \\ &= a_1(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i x_i}^m + b_1(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i x_i}^{m-1} \\ & \quad + a_{1x_i}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^{m-1} + b_{1x_i}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + a_{1u}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} + a_{1v}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + b_{1u}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^{m-1}v_{x_i}^{m-1} + b_{1v}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^{m-1}v_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + a_{1u_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i x_j}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} + a_{1v_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i x_j}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + b_{1u_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i x_j}^{m-1}v_{x_i}^{m-1} + b_{1v_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i x_j}^{m-1}v_{x_i}^{m-1}, \\ & \mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}, u^m, v^m) \\ &= a_2(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i x_i}^{m-1} + b_2(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i x_i}^m \\ & \quad + a_{2x_i}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^{m-1} + b_{2x_i}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + a_{2u}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} + a_{2v}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + b_{2u}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i}^{m-1}v_{x_i}^{m-1} + b_{2v}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i}^{m-1}v_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + a_{2u_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i x_j}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} + a_{2v_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i x_j}^{m-1}u_{x_i}^{m-1} \\ & \quad + b_{2u_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})u_{x_i x_j}^{m-1}v_{x_i}^{m-1} + b_{2v_{x_j}}(u^{m-1}, v^{m-1})v_{x_i x_j}^{m-1}v_{x_i}^{m-1}, \end{aligned}$$

а $F(u^{m-1}, v^{m-1})$ обозначает $F(x, u^{m-1}, v^{m-1}, u_x^{m-1}, v_x^{m-1})$. Мы раскрываем дивергенцию, выделяем главную диагональную часть $\Lambda_1 u_{x_i x_i}^m$ (или $\Lambda_2 v_{x_i x_i}^m$) и трактуем оставшиеся члены как правую часть. После этого мы применяем оценку (3.1) теоремы 3.1 к каждому уравнению системы (2.1) в отдельности. Потом мы используем (3.2), (3.3), леммы 3.2, 3.3, условия (2.4), (2.5) и неравенство Юнга. Таким образом, получается

$$\begin{aligned} |u^m|_{2,\alpha;\Omega} &\leq C_3(1 + [u^m]_{0;\Omega}^3 + [v^m]_{0;\Omega}^3 + [f_1]_{\alpha;\Omega} + |g_1|_{2,\alpha;\Omega} + \delta|u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + \delta|v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 \\ & \quad + [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} |v^m|_{2,\alpha;\Omega} &\leq C_4(1 + [u]_{0;\Omega}^3 + [v]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{\alpha;\Omega} + |g_2|_{2,\alpha;\Omega} + \delta|u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + \delta|v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 \\ & \quad + [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя в (4.1), (4.2) оценки (3.5), (3.6) теоремы 3.4 и слегка завышая правую часть, получим следующее:

$$\begin{aligned} |u^m|_{2,\alpha;\Omega} &\leq C_5(1 + [g_1]_{0;\Omega}^3 + [g_2]_{0;\Omega}^3 + [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{0;\Omega}^3 \\ & \quad + [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{0;\Omega}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [f_1]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{0;\Omega}^3 + [f_1]_{\alpha;\Omega} + |g_1|_{2,\alpha;\Omega} \\
& + \delta |u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + \delta |v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
|v^m|_{2,\alpha;\Omega} & \leq C_6 (1 + [g_1]_{0;\Omega}^3 + [g_2]_{0;\Omega}^3 + [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{0;\Omega}^3 \\
& + [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{0;\Omega}^3 \\
& + [f_1]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{\alpha;\Omega} + |g_2|_{2,\alpha;\Omega} \\
& + \delta |u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + \delta |v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Используя оценки (4.3), (4.4) рекуррентно и проведя некоторые оценки, получим

$$\begin{aligned}
& |u^m|_{2,\alpha;\Omega}, |v^m|_{2,\alpha;\Omega} \\
& \leq C_7 + \delta 3C_7^3 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} \\
& + C_7 [g_1]_{0;\Omega}^3 + C_7^3 \delta 3 [g_1]_{0;\Omega}^9 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [g_1]_{0;\Omega}^{3^{m-1}} \\
& + C_7 [g_2]_{0;\Omega}^3 + C_7^3 \delta 3 [g_2]_{0;\Omega}^9 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [g_2]_{0;\Omega}^{3^{m-1}} \\
& + C_7 |g_1|_{2,\alpha;\Omega} + C_7^3 \delta 3 |g_1|_{2,\alpha;\Omega}^3 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} |g_1|_{2,\alpha;\Omega}^{3^{m-2}} \\
& + C_7 |g_2|_{2,\alpha;\Omega} + C_7^3 \delta 3 |g_2|_{2,\alpha;\Omega}^3 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} |g_2|_{2,\alpha;\Omega}^{3^{m-2}} \\
& + C_7 [f_1]_{\alpha;\Omega} + C_7^3 \delta 3 [f_1]_{\alpha;\Omega}^3 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [f_1]_{\alpha;\Omega}^{3^{m-2}} \\
& + C_7 [f_2]_{\alpha;\Omega} + C_7^3 \delta 3 [f_2]_{\alpha;\Omega}^3 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [f_2]_{\alpha;\Omega}^{3^{m-2}} \\
& + C_7 [f_1]_{0;\Omega}^3 + C_7^3 \delta 3 [f_1]_{0;\Omega}^9 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [f_1]_{0;\Omega}^{3^{m-1}} \\
& + C_7 [f_2]_{0;\Omega}^3 + C_7^3 \delta 3 [f_2]_{0;\Omega}^9 + \dots + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [f_2]_{0;\Omega}^{3^{m-1}} \\
& + C_7 [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega} \\
& + C_7^3 \delta 3 [\mathcal{L}_1(u^{m-2}, v^{m-2}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega}^3 + \dots \\
& + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [\mathcal{L}_1(u^1, v^1) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega}^{3^{m-2}} \\
& + C_7 [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega} \\
& + C_7^3 \delta 3 [\mathcal{L}_2(u^{m-2}, v^{m-2}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}^3 + \dots \\
& + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [\mathcal{L}_2(u^1, v^1) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}^{3^{m-2}} \\
& + C_7 [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{0;\Omega}^3 \\
& + C_7^3 \delta 3 [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{0;\Omega}^9 + \dots \\
& + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{0;\Omega}^{3^{m-1}} \\
& + C_7 [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{0;\Omega}^3 \\
& + C_7^3 \delta 3 [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{0;\Omega}^9 + \dots \\
& + \delta^{3^{m-1}-1} C_7^{3^{m-1}-1} 3^{3^{m-1}-1} [\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{0;\Omega}^{3^{m-1}} \\
& + C_7^{3^{m-1}-1} \delta^{3^{m-1}-1} |u^1|_{2,\alpha;\Omega}^{3^{m-1}} + C_7^{3^{m-1}-1} \delta^{3^{m-1}-1} |v^1|_{2,\alpha;\Omega}^{3^{m-1}}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Выберем приближение (u^1, v^1) так, чтобы $[\mathcal{L}_1(u^1, v^1) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega}$ в этой сумме оценивалось сверху посредством $1 + [f_1]_{\alpha;\Omega}$ и $[\mathcal{L}_2(u^1, v^1) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}$ оценива-

лось сверху посредством $1 + [f_2]_{\alpha;\Omega}$. Приближение (u^2, v^2) еще ближе к (u, v) , поэтому $[\mathcal{L}_1(u^2, v^2) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega}$ и $[\mathcal{L}_2(u^2, v^2) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}$ оцениваются сверху посредством $1 + [f_1]_{\alpha;\Omega}$ и $1 + [f_2]_{\alpha;\Omega}$ соответственно. Однако, может случиться, что $[\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega}$ и $[\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}$ возрастают для некоторых приближений по мере того, как мы приближаемся к (u, v) . Покажем, что такая возможность исключается. Поскольку $[\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega}$ меньше, чем $1 + [f_1]_{\alpha;\Omega}$ как в начале, так и для больших значений m , то должен существовать экстремум для некоторого $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u^{\tilde{m}}, v^{\tilde{m}})$ с некоторым номером приближения $\tilde{m}$ в некоторых точках области Ω (x_0, x) (если они совпадают, то берем предел), т.е.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_{x,x_0}^\alpha[\mathcal{L}_1(\tilde{u}, \tilde{v}); \Omega]}{\partial H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_i}; \Omega]} \\ &= \frac{\partial}{\partial H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_i}; \Omega]} \{ a_1(x_0, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_x, \tilde{v}_x) H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_i}; \Omega] \\ &\quad + a_{1u_{x_k}}(x_0, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_x, \tilde{v}_x) u_{x_i} H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_k}; \Omega] \\ &\quad + b_{1u_{x_k}}(x_0, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_x, \tilde{v}_x) v_{x_i} H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_k}; \Omega] + \dots \} \\ &> a_1 - |a_{1u_{x_i}} u_{x_i}| - |b_{1u_{x_i}} v_{x_i}| > 0 \end{aligned}$$

в этих точках. Но, как видно из условий (2.4), (2.5), величина, стоящая справа, всегда отлична от нуля. Если $H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_i}; \Omega] \neq 0$ в (x_0, x) , то мы всегда можем выбрать приближения так, что $dH_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_i}; \Omega] \neq 0$ в (x_0, x) . Теперь рассмотрим наихудший случай, когда $H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_i}; \Omega] = 0$ в (x_0, x) и $H_{x,x_0}^\alpha[u_{x_i x_i}^m; \Omega] = 0$ в (x_0, x) для всех $m < \tilde{m}$, $i = 1, \dots, n$. Прежде всего можем выбрать приближения (u^m, v^m) , $m < \tilde{m}$ так, что $|H_{x,x_0}^\alpha[\mathcal{L}_1(\tilde{u}, \tilde{v}); \Omega]|$ достигает максимума в той же самой паре точек (x_0, x) . Подставляя $H_{x,x_0}^\alpha[\tilde{u}_{x_i x_i}; \Omega] = 0$ в $|H_{x,x_0}^\alpha[\mathcal{L}_1(\tilde{u}, \tilde{v}); \Omega]|$ и используя неравенства из лемм 3.2, 3.3 и неравенство Юнга, мы получаем, что

$$[\mathcal{L}_1(u^{\tilde{m}}, v^{\tilde{m}}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega} \leq \delta(1 + |u^{\tilde{m}}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + |v^{\tilde{m}}|_{2,\alpha;\Omega}^3) + [f_1]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{0;\Omega}^3.$$

Отсюда мы получаем, что для $m > \tilde{m}$ тем более

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_1(u^m, v^m) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega} &\leq \delta(1 + |u^m|_{2,\alpha;\Omega}^3 + |v^m|_{2,\alpha;\Omega}^3) + [f_1]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{0;\Omega}^3, \\ [\mathcal{L}_1(u^m, v^m) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{\alpha;\Omega} &\leq \delta(1 + |u^m|_{2,\alpha;\Omega}^3 + |v^m|_{2,\alpha;\Omega}^3) + [f_1]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{0;\Omega}^3 \end{aligned}$$

для $m < \tilde{m}$. Эта оценка подставляется в (4.3). В результате может измениться только постоянная C_7 в (4.5).

Аналогично рассуждаем для $[\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{\alpha;\Omega}$.

Таковыми же рассуждениями можно доказать, что $[\mathcal{L}_1(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_1(u, v)]_{0;\Omega}^3$ и $[\mathcal{L}_2(u^{m-1}, v^{m-1}) - \mathcal{L}_2(u, v)]_{0;\Omega}^3$ оцениваются сверху при помощи $1 + [f_1]_{0;\Omega}^3$ и $1 + [f_2]_{0;\Omega}^3$ соответственно, или при помощи

$$\delta(1 + |u^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3 + |v^{m-1}|_{2,\alpha;\Omega}^3) + [f_1]_{0;\Omega}^3 + [f_2]_{0;\Omega}^3.$$

Согласно (2.4) суммы в (4.5) образуют сходящиеся ряды при $m \rightarrow \infty$.

Выбирая первое приближение таким, что $|u^1|_{2,\alpha;\Omega} + |v^1|_{2,\alpha;\Omega} \leq 1$ и переходя к пределу в (4.5), получаем искомые оценки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. De Giorgi, “Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico”, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **1** (1968), 135–137.
- [2] C.B. Morrey, jr., “Partial regularity results for non-linear elliptic systems”, *J. Math. Mech.*, **17** (1968), 649–670.
- [3] E. Guisti, M. Miranda, “Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasi-lineari”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **31** (1968), 173–184.
- [4] L. Pepe, “Risultati di regolarità parziale per le soluzioni $\mathcal{H}^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < 2$, di sistemi ellittici quasi-lineari”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **16** (1971), 129–148.
- [5] Y.-Z. Chen, L.-C. Wu, *Second Order Elliptic Equations and Elliptic Systems*, Transl. Math. Monogr., **174**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

Д. В. Портнягин

Институт физики конденсированных систем НАН Украины

E-mail: port@icmp.lviv.ua

Поступило

16.08.2007

Исправленный вариант

01.03.2008