Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Салтыков, О связи топологической энтропии и энтропийной размерности, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 280–289

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4007>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:00:21

О связи топологической энтропии и энтропийной размерности

П. С. Салтыков

Для липшицева отображения метрического компакта в себя имеется классическая верхняя оценка на топологическую энтропию – произведение энтропийной размерности компакта на логарифм константы Липшица. Гипотеза Жиса состоит в том, что, варьируя метрику, можно сколь угодно точно приблизить верхнюю оценку к точному значению топологической энтропии. В настоящей работе получен критерий выполнения гипотезы Жиса для индивидуального отображения. Применяв этот критерий, мы доказываем гипотезу Жиса для гиперболических отображений.

Библиография: 5 названий.

1. Введение

Топологическая энтропия была введена в 1965 г. в работе [1] как один из способов измерять “сложность” отображения. Для гладких отображений компактных многообразий ее конечность была установлена теоремой Кушнеренко (см. [2; с. 37–38]), дающей эффективную оценку для $f: M \rightarrow M$ как

$$h_{\text{top}}(f) \leq \dim M \cdot \ln \|f'\|.$$

Эта оценка обобщается до следующей:

$$h_{\text{top}}(f) \leq \dim_E X \cdot \ln L(f), \quad (1)$$

где $f: X \rightarrow X$ – липшицево отображение метрического компакта в себя, $\dim_E X$ – энтропийная размерность, а через $L(f)$ обозначена константа Липшица отображения f . (Определения топологической энтропии и энтропийной размерности напоминаются в разделе 2.)

Рассмотрим на компакте X класс метрик, порождающих одну и ту же топологию. Обозначим этот класс через $\mathbf{D}$. Топологическая энтропия, как следует из ее названия, определяется исключительно топологией на X (впрочем, зачастую оказывается удобнее работать с использующим метрику определением, которое мы напоминаем ниже; независимость результата от выбора метрики из $\mathbf{D}$ доказывается, например, в [3; с. 121]). В результате оценка (1) может быть улучшена следующим образом:

$$h_{\text{top}}(f) \leq \inf_{d \in \mathbf{D}} \dim_E(X, d) \cdot \ln L_d(f). \quad (2)$$

В связи с этим Э. Жисом была сформулирована следующая гипотеза.

Работа выполнена при поддержке совместного гранта Российского фонда фундаментальных исследований и фонда CNRS (грант № 05-01-02801).

ГИПОТЕЗА. Пусть $f: X \rightarrow X$ – липшицево отображение метрического компакта X с конечной энтропийной размерностью в себя. В этом случае неравенство в (2) можно заменить на равенство.

Настоящая работа посвящена исследованию необходимых и достаточных условий того, что для отображения f выполняется гипотеза Жиса. Показано, что для гиперболических отображений гипотеза Жиса верна. При доказательстве мы используем следующий критерий.

ТЕОРЕМА 1 (см. определение 5 в разделе 3). Гипотеза Жиса выполняется тогда и только тогда, когда сходимость в определении h_{top} экспоненциальная.

Затем мы проверяем, что гиперболические отображения удовлетворяют этому критерию.

2. Обозначения и определения

Пусть

- $f: X \rightarrow X$ – липшицево отображение метрического компакта X в себя;
- d – метрика на компакте X ;
- $L_d(f)$ – константа Липшица для f в метрике d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим метрику

$$d_N(x, y) = \max_{0 \leq k < N-1} d(f^k(x), f^k(y))$$

на X . Тогда ε -сеть для метрики d_N называется (N, ε) -сетью для метрики d .

Обозначим через $\Sigma(N, \varepsilon)$ мощность минимальной (N, ε) -сети.

Введем функцию

$$h(\varepsilon) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \Sigma(n, \varepsilon)}{n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Топологической энтропией называется число

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} h(\varepsilon).$$

Пусть $S(r)$ – мощность минимальной r -сети в метрике d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Энтропийная размерность метрического пространства X определяется как

$$\dim_E X = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\ln S(r)}{|\ln r|}.$$

Будем ее также обозначать через $\dim_E(X, d)$, явно указывая зависимость от метрики.

3. Основной результат

3.1. Формулировка результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Сходимость в определении $h_{\text{top}}(f)$ экспоненциальная, если для любого $\delta > 0$ существуют метрика d_δ , топологически эквивалентная исходной мет-

рике d , и константы C и $\varepsilon_\delta > 0$ такие, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ для $N > C \cdot |\ln \varepsilon|$ верно неравенство

$$\frac{\ln(\Sigma_{d_\delta}(N, \varepsilon))}{N} \leq h_{\text{top}}(f) + \delta. \quad (3)$$

Поскольку на протяжении данной работы отображение f варьироваться не будет, для краткости мы зачастую будем писать просто L_d вместо $L_d(f)$ и h_{top} вместо $h_{\text{top}}(f)$.

ТЕОРЕМА 2 (критерий сходимости для гипотезы Жиса). *Для выполнения равенства*

$$h_{\text{top}}(f) = \inf_{d \in \mathbf{D}} \dim_E(X, d) \cdot \ln L_d(f) \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходимость в определении h_{top} была экспоненциальной.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для гиперболических отображений гипотеза Жиса верна.*

3.2. План доказательства теоремы и следствия. Для доказательства достаточности (п. 4.1) мы в явном виде предъявим семейство метрик m_λ такое, что

$$\ln(L_{m_\lambda}(f)) \cdot \dim_E(X, m_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} h_{\text{top}}(f).$$

При построении этого семейства мы будем использовать расстояния $d(f^k(x), f^k(y))$. Липшицевость будет получаться автоматически, а экспоненциальная сходимость в определении топологической энтропии обеспечит нужную оценку на энтропийную размерность.

Необходимость (п. 4.2) доказывается рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы Кушнеренко, и явным построением константы C , требуемой в определении экспоненциальной сходимости.

В разделе 5 доказывается, что для гиперболических (а на самом деле и для внутренне-гиперболических, см. определение там же) отображений условие экспоненциальной сходимости в определении топологической энтропии выполнено. Значит, такие отображения удовлетворяют гипотезе Жиса. Экспоненциальная сходимость следует из явной оценки на мощность $\Sigma(N, \varepsilon)$ -сети.

4. Доказательство основного результата

Случай $L_d = 1$ или $\dim_E(X, d) = 0$ очевиден, поэтому далее будем предполагать, что $L_d > 1$ и $\dim_E(X, d) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\text{diam } X = 1$.

4.1. Достаточность. Фиксируем $d \in \mathbf{D}$. Напомним, что $\Sigma(N, \varepsilon)$ – мощность минимальной (N, ε) -сети. Для любого $\lambda > 0$ рассмотрим метрику

$$m_\lambda(x, y) = \sum_{k \geq 0} \lambda^k \cdot d(f^k(x), f^k(y)).$$

Легко видеть, что при любом $\lambda \in (0, 1)$ ряд сходится.

ЛЕММА 1. *Для любого $\lambda \in (0, 1)$ метрика m_λ топологически эквивалентна исходной метрике d .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из неравенств $m_\lambda \geq d$, $\text{diam } X < \infty$ и непрерывности f .

ЛЕММА 2. Константа Липшица для f в метрике m_λ допускает следующую оценку:

$$L_{m_\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем прямые вычисления. Имеем

$$\begin{aligned} m_\lambda(f(x), f(y)) &= \sum_{k \geq 0} (\lambda^k \cdot d(f^{k+1}(x), f^{k+1}(y))) \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot (m_\lambda(x, y) - d(x, y)) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot m_\lambda(x, y). \end{aligned}$$

Значит,

$$L_{m_\lambda} = \sup_{x, y \in X} \frac{m_\lambda(f(x), f(y))}{m_\lambda(x, y)} \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{m_\lambda(x, y)}{m_\lambda(x, y)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Пусть $S_\lambda(r)$ – мощность минимальной r -сети в метрике m_λ .

ЛЕММА 3. Рассмотрим (N, ε) -сеть для f в метрике d (состоящую из $\Sigma(N, \varepsilon)$ точек). Тогда она одновременно является r_δ -сетью в метрике m_λ , где

$$r_\delta := r_\lambda(N, \varepsilon) = \frac{\varepsilon + \lambda^N}{1 - \lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку x , пусть y – ближайшая к ней точка (N, ε) -сети согласно метрике d_N . Оценим расстояние между ними в метрике m_λ :

$$\begin{aligned} m_\lambda(x, y) &\leq \sum_{k \geq 0}^{N-1} \lambda^k \cdot d(f^k(x), f^k(y)) + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda^k \cdot d(f^k(x), f^k(y)) \\ &\leq \sum_{k \geq 0}^{N-1} \lambda^k \cdot \varepsilon + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda^k \cdot 1 \leq \frac{1 - \lambda^N}{1 - \lambda} \cdot \varepsilon + \frac{\lambda^N}{1 - \lambda} \leq \frac{\varepsilon + \lambda^N}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $r > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$ положим

$$\varepsilon_\lambda(r) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (1 - \lambda), \quad N_\lambda(r) = \left\lceil \frac{|\ln(\varepsilon_\lambda(r))|}{|\ln \lambda|} \right\rceil + 1, \quad (5)$$

где $[x]$ – целая часть числа x . Тогда

$$S_\lambda(r) \leq \Sigma(N_\lambda(r), \varepsilon_\lambda(r)). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из леммы 3,

$$S(r_\lambda(N, \varepsilon)) \leq \Sigma(N, \varepsilon), \quad \text{где} \quad r_\lambda(N, \varepsilon) = \frac{\varepsilon + \lambda^{-N}}{1 - \lambda}. \quad (7)$$

Но функции $\varepsilon_\lambda(r)$ и $N_\lambda(r)$ были выбраны так, что $r_\lambda(N_\lambda(r), \varepsilon_\lambda(r)) \leq r$ (что легко проверяется прямой выкладкой). Подставляя $\varepsilon = \varepsilon_\lambda(r)$ и $N = N_\lambda(r)$ в (7), получаем требуемое заключение.

Утверждения, сформулированные и доказанные выше, верны для любой метрики d из **D**. Далее мы будем пользоваться условием экспоненциальной сходимости.

ЛЕММА 4. Пусть сходимость в определении h_{top} экспоненциальная. Для любого $\delta > 0$ рассмотрим соответствующую ему метрику d_δ в смысле определения 4. Тогда существуют λ, r_0 такие, что для всех $r < r_0$ выполнено

$$1) \quad \frac{\ln \Sigma(N_\lambda(r), \varepsilon_\lambda(r))}{N_\lambda(r)} \leq h_{\text{top}} + \delta, \quad (8)$$

$$2) \quad \frac{N_\lambda(r)}{|\ln r|} \leq \frac{1 + \delta}{|\ln \lambda|}, \quad (9)$$

где N_λ и ε_λ выбираются согласно (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (8). Неравенство (8) – это неравенство (3) при $N = N_\lambda(r)$ и $\varepsilon = \varepsilon_\lambda(r)$. По определению 1 для его выполнения достаточно неравенства

$$N_\lambda(r) \geq C \cdot |\ln \varepsilon_\lambda(r)|. \quad (10)$$

Введем величину

$$N_\lambda^1(r) = \frac{|\ln(\varepsilon_\lambda(r))|}{|\ln \lambda|}.$$

Учитывая, что $N_\lambda^1 \leq N_\lambda$, для (10) достаточно выполнения неравенства $1/|\ln \lambda| \geq C$. По данному C всегда можно выбрать λ , столь близкое к 1, что последнее неравенство выполнено. Таким образом, (8) доказано.

Фиксируем какое-либо λ , удовлетворяющее (8). Тогда

$$\frac{N_\lambda(r)}{|\ln r|} = \frac{N_\lambda^1(r)}{|\ln r|} \cdot \frac{N_\lambda(r)}{N_\lambda^1(r)} = \left| \frac{\ln(r \cdot (1 - \lambda)/2)}{\ln r \cdot \ln \lambda} \right| \cdot \frac{N_\lambda(r)}{N_\lambda^1(r)}$$

(второе равенство следует из (5)).

Подставим это выражение в (9), получим

$$\left| \frac{\ln(r \cdot (1 - \lambda)/2)}{\ln r} \right| \cdot \frac{N_\lambda(r)}{N_\lambda^1(r)} \leq 1 + \delta. \quad (11)$$

Ясно, что при $r \rightarrow +0$ левая часть в (11) стремится к 1. Значит, существует $r_0 > 0$ такое, что выполнено (9).

Лемма 4 доказана.

Окончание доказательства достаточности. По заданному δ находим метрику d_δ и константу C по определению 4. По этому C , используя следствие 1 и лемму 4, находим λ такое, что выполнены (8) и (9) для $r < r_0$, где $N_\lambda(r)$ и $\varepsilon_\lambda(r)$ выбираются согласно (5). Применяя последовательно следствие 2 и лемму 4, получим

$$\begin{aligned} \frac{\ln S_\lambda(r)}{|\ln r|} &\leq \frac{\ln \Sigma(N_\lambda(r), \varepsilon_\lambda(r))}{N_\lambda(r)} \cdot \frac{N_\lambda(r)}{|\ln r|} \\ &\leq (h_{\text{top}} + \delta) \cdot \frac{1 + \delta}{|\ln \lambda|} \leq \frac{1}{|\ln \lambda|} \cdot (h_{\text{top}} + \delta \cdot (1 + h_{\text{top}} + \delta)). \end{aligned}$$

Обозначим $\delta \cdot (1 + h_{\text{top}} + \delta)$ через δ^1 . Тогда $\delta^1 \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Домножим левую часть последнего неравенства на $\ln L_{m_\lambda}$, а правую на $\ln(1/\lambda)$. При этом по лемме 2 неравенство сохранится. Получим

$$\frac{\ln S_\lambda(r)}{|\ln r|} \cdot \ln L_{m_\lambda} \leq h_{\text{top}} + \delta^1.$$

Это неравенство верно для всех $r < r_0$. Перейдем в нем к пределу при $r \rightarrow +0$. Получим необходимое неравенство

$$\dim_E(X, m_\lambda) \cdot \ln L_{m_\lambda} \leq h_{\text{top}} + \delta^1. \quad (12)$$

Для каждого $\delta^1 > 0$ мы предъявили метрику m_λ такую, что выполнено неравенство (12). Перейдем к точной нижней грани по δ^1 при $\delta^1 \rightarrow +0$. Получим

$$\inf_\lambda (\dim_E(X, m_\lambda) \cdot \ln L_{m_\lambda}) \leq h_{\text{top}}, \quad (13)$$

что вместе с (1) завершает доказательство достаточности.

4.2. Необходимость. Пусть выполнено равенство (4). Тогда для любого $\delta > 0$ существует метрика $d(\delta)$ из $\mathbf{D}$ такая, что

$$\ln L_{d(\delta)} \cdot \dim_E(X, d(\delta)) < h_{\text{top}} + \delta. \quad (14)$$

Будем считать без ограничения общности, что $\delta < 1$. Фиксируем произвольное $\delta \in (0, 1)$ и метрику $d(\delta)$ из $\mathbf{D}$, удовлетворяющую (14). Обозначим $L_{d(\delta)}$ через L .

Приведенные ниже рассуждения аналогичны доказательству теоремы Кушниренко о конечности энтропии. Заметим, что

$$\Sigma(N, \varepsilon) \leq S(L^{-N} \varepsilon). \quad (15)$$

Поскольку $\ln S(r)/|\ln r| \rightarrow \dim_E(X, d(\delta))$ и верно (14), то, начиная с некоторого r_0 , имеем для всех $r \leq r_0$

$$\frac{\ln S(r)}{|\ln r|} \cdot \ln L < h_{\text{top}} + \delta.$$

Подставим в последнее неравенство оценку (15). Тогда для любого N такого, что $L^{-N} \varepsilon \leq r_0$, выполнено

$$\frac{\ln \Sigma(N, \varepsilon)}{N \ln L + \ln \varepsilon^{-1}} \cdot \ln L = \frac{\ln \Sigma(N, \varepsilon)}{N} \cdot \frac{1}{1 + (1/N) \ln(L/\varepsilon)} < h_{\text{top}} + \delta.$$

Следовательно, при выполнении условий

$$L^{-N} \varepsilon \leq r_0, \quad 1 + \frac{1}{N} \ln \frac{L}{\varepsilon} < \frac{h_{\text{top}} + 2\delta}{h_{\text{top}} + \delta}$$

имеем

$$\frac{\ln \Sigma(N, \varepsilon)}{N} < h_{\text{top}} + 2\delta. \quad (16)$$

Первое из условий равносильно

$$N \geq \frac{\ln r_0 + \ln \varepsilon^{-1}}{\ln L} = C_1 + C_2 \ln \varepsilon^{-1},$$

а второе –

$$N > \frac{h_{\text{top}} + \delta}{\delta} \cdot \ln \frac{L}{\varepsilon} = C_3 + C_4 \ln \varepsilon^{-1}.$$

Оба условия выполняются, начиная с $N_0 = C_5 \ln \varepsilon$. Получаем, что для любого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1/2$, для всех $N > N_0 = C_5 \ln \varepsilon^{-1}$ верно (16). В силу произвольности δ по определению имеем экспоненциальную сходимость в определении топологической энтропии.

Теорема доказана полностью.

4.3. Пример. В этом пункте мы приведем пример отображения с нулевой топологической энтропией, для которого в определении энтропии относительно стандартной метрики сходимость неэкспоненциальная. Однако, так как заменой метрики она может быть сделана экспоненциальной, контрпримером к гипотезе Жиса этот пример не является.

Рассмотрим пространство Бернулли двоичных последовательностей

$$\Sigma_2^+ = \{x_1, x_2, x_3, \dots \mid x_I \in \{0, 1\}\}, \quad d(x, y) = 2^{-\min_i (x_i \neq y_i)}.$$

Выберем (очень быстрорастущую последовательность) b_j , $j \in \mathbb{N}$, и пусть $s_j = 1 + \sum_{l=1}^{j-1} b_l$. Заметим, что Σ_2^+ – компакт с конечной энтропийной размерностью.

На этом множестве введем отображение f следующим образом. На каждом j -м участке длиной b_j действует левый сдвиг, а выпадающие справа символы заменяются нулями. Более точно:

$$\underbrace{x_1 \dots x_{b_1}}_{b_1} \underbrace{x_{s_2} \dots x_{s_2+b_2-1}}_{b_2} x_{s_3} \dots \mapsto \underbrace{x_2 \dots x_{b_1} 0}_{b_1} \underbrace{x_{s_2+1} \dots x_{s_2+b_2-1} 0}_{b_2} x_{s_3+1} \dots$$

Легко видеть, что для этого отображения $h_{\text{top}} = 0$, так как все точки стремятся к нулевой последовательности. Выберем какое-то натуральное j и рассмотрим $\varepsilon = 2^{-s_j}$. Тогда $\Sigma(N, \varepsilon) = 2^{s_j} \cdot 2^N$ при $0 \leq N < b_j$. Значит, при $N \leq b_j$

$$\frac{\ln \Sigma(N, \varepsilon)}{N} = \frac{s_j + N}{N} \cdot \ln 2.$$

Теперь зафиксируем выбор последовательности b_j : потребуем, чтобы $b_j/s_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Например, рассмотрим $b_j = e^{j^2}$.

Легко видеть, что для любой заданной наперед константы C при $\varepsilon = 2^{-s_j}$ и $N \sim C |\ln \varepsilon| \sim C' s_j$ имеем $N \leq b_j$ и, значит,

$$\frac{\ln \Sigma(N, \varepsilon)}{N} = \frac{s_j + 2C \cdot s_j - 1}{2C \cdot s_j} \cdot \ln 2 \geq \ln 2.$$

Это и означает, что сходимость в пределе для энтропии (равной 0) неэкспоненциальная в смысле исходной метрики. Однако добиться выполнения условия экспоненциальной сходимости в этом примере можно. По заданной последовательности b_j выберем достаточно быстрорастущую последовательность k_j , например, положив $k_j = s_{j+1}^2$. По этой последовательности построим отображение “вписывания нулей” $x \mapsto \tilde{x}$, определяемое так:

$$x_1 \dots x_{b_1} x_{s_2} \dots x_{s_2+b_2-1} x_{s_3} \dots \mapsto x_1 \dots x_{b_1} \underbrace{0 \dots 0}_{k_1} x_{s_2+k_1} \dots x_{s_2+b_2+k_1-1} \underbrace{0 \dots 0}_{k_2} x_{s_3+k_1+k_2} \dots$$

Положим $\tilde{d}(x, y) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$. Нетрудно доказать, что метрики d и $\tilde{d}$ топологически эквивалентны. Прямыми вычислениями устанавливается, что при подходящем выборе констант $k_1, k_2, \dots$, например, таком, как указано выше, условие экспоненциальной сходимости выполняется.

5. Доказательство гипотезы Жиса для гиперболических гомеоморфизмов

Во всем разделе предполагаем, что компакт X с метрикой d и отображение f фиксированы. Поэтому для упрощения обозначений мы не будем явно указывать зависимости переменных от них. Будем предполагать, что $\dim_E X > 0$, так как случай $\dim_E X = 0$ тривиален.

5.1. Подготовительные сведения из гиперболической теории. Мы напомним несколько определений и известных фактов из теории гиперболических отображений, которые могут быть найдены, например, в [3] и [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Гомеоморфизм метрического компакта X с метрикой d называется *разделяющим*, если существует константа $\delta_0 > 0$ такая, что для любых точек x, y из условия

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \delta_0 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}$$

следует, что $x = y$. Верхняя грань таких чисел δ_0 называется *постоянной разделяния*.

Пусть (Λ, d) – компактное метрическое пространство, $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ – липшицеморфизм (т.е. f – гомеоморфизм, f и f^{-1} липшицевы). Определим два отношения эквивалентности $\sim_u$ и $\sim_s$ на Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} x \sim_u y &\iff d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ x \sim_s y &\iff d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Определим также локально устойчивое и неустойчивое множества:

$$\begin{aligned} W_\epsilon^s(x) &= \{z | z \sim_s x \text{ и } d(f^n(x), f^n(z)) \leq \epsilon \text{ для всех } n \in \mathbb{N}^+\}, \\ W_\epsilon^u(x) &= \{z | z \sim_u x \text{ и } d(f^{-n}(x), f^{-n}(z)) \leq \epsilon \text{ для всех } n \in \mathbb{N}^+\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Липшицеморфизм f компактного метрического пространства (Λ, d) называется *внутренне-гиперболическим*, если для некоторых $\vartheta > 0$, $\epsilon > 0$, выполнено следующее:

- 1) если $d(x, y) < \vartheta$, то существует единственная точка

$$w(x, y) = W_\epsilon^u(x) \cap W_\epsilon^s(y) \in \Lambda;$$

отображение $(x, y) \mapsto w(x, y)$ непрерывно;

- 2) существуют константы $C > 0$, $0 < \nu < 1$, $0 < \xi < 1$, не зависящие от точки, такие, что для всех точек компакта X выполнено

$$\begin{aligned} y \in W_\epsilon^s(x) &\implies d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\nu^n d(x, y), \quad n \in \mathbb{N}, \\ y \in W_\epsilon^u(x) &\implies d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C\xi^n d(x, y), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(Определение внутренне-гиперболического отображения впервые появилось в работе Алексеева и Якобсона [5], а данная формулировка взята из [4; с. 404].)

Следующая лемма легко выводится из компактности множества.

ЛЕММА 5. Пусть $f: X \rightarrow X$ – разделяющий гомеоморфизм с константой разделения δ_0 . Выберем и зафиксируем $\gamma < \delta_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $K = K(\varepsilon)$ такое, что из условия

$$d(f^k(x), f^k(y)) < \gamma \quad \text{при } k = -K(\varepsilon), \dots, K(\varepsilon)$$

следует, что $d(x, y) < \varepsilon$.

Из этой леммы мгновенно выводится утверждение, позволяющее оценить мощности (N, ε) -сетей при всех ε через мощности сетей только вида (N', γ) .

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеет место оценка

$$\Sigma(N, \varepsilon) \leq \Sigma(N + 2K(\varepsilon), \gamma).$$

5.2. Применение критерия сходимости для гиперболического случая.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (Λ, d) – компактное метрическое пространство и $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ – внутренне-гиперболическое отображение. Тогда для f выполняется гипотеза Жиса, а именно,

$$h_{\text{top}} = \inf_d \dim_E(\Lambda, d) \cdot \ln L_d(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что мы зафиксировали константу $\gamma_0 < \vartheta$. В силу непрерывной зависимости $w(x, y)$ от x и y найдется такое $\varepsilon_0 < \gamma_0/2C$, что при $d(x, y) < \varepsilon_0$ расстояния $d(x, w(x, y))$ и $d(y, w(x, y))$ не превосходят $\gamma_0/2C$. Нам потребуется следующая

ЛЕММА 6. Если выполнены условия теоремы 3, то f является разделяющим отображением с некоторой постоянной разделения $\delta_0 > \gamma_0$; более того, существует константа D такая, что в качестве $K(\varepsilon)$ можно взять $[D|\ln \varepsilon|]$ для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $d(x, y) > \varepsilon$ (и при этом $d(x, y) < \gamma_0$). Тогда определена точка $w = w(x, y)$. Одно из расстояний $d(x, w)$ и $d(w, y)$ не меньше $\varepsilon/2$. Если это $d(x, w)$, то не более чем за $[\log_\xi C^{-1}d(x, y)/2\gamma_0] + 1$ итераций точки x и w разойдутся на расстояние, большее γ_0 . При этом расстояние между образами w и y увеличится не более, чем в C раз. Значит, в этот момент

$$d(f^k(x), f^k(y)) \geq d(f^k(x), f^k(w)) - d(f^k(w), f^k(y)) \geq \gamma_0 - \frac{C\gamma_0}{2C} \geq \frac{\gamma_0}{2}$$

вследствие выбора ε_0 и условия $\varepsilon < \varepsilon_0$. Аналогично разбирается случай, когда большим оказывается $d(w, y)$ (при этом итерируется f^{-1}). В каждом из случаев нам требуется не более, чем $D \ln \varepsilon^{-1}$ итераций.

Для доказательства теоремы 3 покажем, что выполняется условие теоремы 1, т.е. что сходимость экспоненциальная. В силу леммы 6 выполнено заключение следствия 3, следовательно,

$$\Sigma(N, \varepsilon) \leq \Sigma(N + 2K(\varepsilon), \gamma).$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\ln \Sigma(N, \varepsilon)}{N} \leq \frac{\ln \Sigma(N + 2K(\varepsilon), \gamma)}{N + 2K(\varepsilon)} \cdot \frac{N + 2K(\varepsilon)}{N} \leq \frac{\ln \Sigma(N + 2K(\varepsilon), \gamma)}{N + 2K(\varepsilon)} \cdot \left(1 + \frac{C_1 |\ln \varepsilon|}{N}\right).$$

Поскольку предел по ε в определении топологической энтропии на самом деле берется от монотонно неубывающей функции, легко видеть, что для любого $\delta > 0$ найдется N_0 такое, что при всех $N > N_0$ выполнено неравенство

$$\frac{\ln \Sigma(N, \gamma)}{N} \leq h_{\text{top}} + \delta. \quad (17)$$

Тогда из $N > N_0$ и

$$\left(1 + \frac{C_1 |\ln \varepsilon|}{N}\right) < \frac{h_{\text{top}} + 2\delta}{h_{\text{top}} + \delta} \quad (18)$$

следует, что

$$\frac{\ln \Sigma(N, \varepsilon)}{N} \leq (h_{\text{top}} + \delta) \cdot \left(\frac{h_{\text{top}} + 2\delta}{h_{\text{top}} + \delta}\right) = h_{\text{top}} + 2\delta. \quad (19)$$

Условие (18) переписывается как

$$N \geq \frac{D |\ln \varepsilon| \cdot (h_{\text{top}} + \delta)}{\delta} = D_1 |\ln \varepsilon|,$$

и в силу произвольности $\delta > 0$ неравенство (19) доказывает экспоненциальную скорость сходимости в определении топологической энтропии.

Теорема 3 доказана.

Автор благодарен Э. Жису за постановку задачи и интерес к работе; также автор выражает свою признательность Ю. С. Ильяшенко, Т. И. Голенищевой-Кутузовой и В. А. Клепцыну за полезные обсуждения и помощь в подготовке настоящей статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew, "Topological entropy", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 309–319.
- [2] А. Г. Кушниренко, "Оценка сверху энтропии классической динамической системы", *Докл. АН СССР*, **161**:3 (1965), 37–38.
- [3] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [4] Ю. С. Ильяшенко, В. Ли, *Нелокальные бифуркации*, Новые математические дисциплины, МЦНМО, М., 1999.
- [5] V. M. Alekseev, M. V. Yakobson, "Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems", *Phys. Rep.*, **75**:5 (1981), 287–325.

П. С. Салтыков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: p_saltykov@pochta.ru

Поступило

24.10.2006

Исправленный вариант

12.05.2008