Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бородин, А. В. Косточка, А. Распо, Э. Сопена, К оценке минимального числа цветов в ациклической k -сильной раскраске карт на поверхностях, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 1, 35–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:48:48

УДК 519.174

К ОЦЕНКЕ МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ЦВЕТОВ В АЦИКЛИЧЕСКОЙ k -СИЛЬНОЙ РАСКРАСКЕ КАРТ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

О. В. Бородин, А. В. Косточка, А. Распо, Э. Сопена

Раскраска вершин графа называется ациклической, если концы каждого ребра окрашены в разные цвета и нет двухцветных циклов. Пусть каждая грань ранга не более k , где $k \geq 4$, карта на поверхности S^N заменена на клику с тем же множеством вершин. В [1] доказано, что тогда полученный псевдограф можно ациклически раскрасить в число цветов, линейно зависящее от N и от k . В настоящей заметке эта оценка улучшена до $55(-Nk)^{4/7}$ цветов при $k \geq 1$ и $-N \geq 5^7 k^{4/3}$.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Раскраска вершин графа, вложенного в поверхность, называется k -сильной раскраской, если каждые две вершины на границе одной и той же грани ранга не более k имеют разные цвета.

Раскраска вершин графа называется ациклической, если она правильная, т.е. концы каждого ребра окрашены в разные цвета, и нет двухцветных циклов. Ациклическая раскраска имеет ряд приложений к другим задачам раскраски, (см. [2]–[6]).

Назовем *картой* псевдограф, вложенный в поверхность так, что не образуется граней рангов 1 и 2. Заметим, что петля порождает одноцветное ребро, а два кратных ребра – двухцветный цикл. Будем считать раскраску вершин карты произвольной поверхности ациклической, если концы каждого ребра-непетли e имеют разные цвета и нет двухцветных циклов длины больше 2. Алон, Мохар и Сандерс [7] доказали следующую оценку.

ТЕОРЕМА 1. *Каждый граф, вложимый в произвольную поверхность S^N , ациклически $50(2-N)^{4/7}$ -раскрашиваем, и эта оценка отличается от точной не более чем в $c(\log(3-N))^{1/7}$ раз.*

При доказательстве они опирались на следующий результат Алона, МакДиармида и Рида [8].

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-01075, и фонда INTAS, грант № 97-1001. Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00581, и российско-голландского гранта NWO № 047-008-006. Работа третьего и четвертого авторов выполнена при частичной поддержке Совместного научного гранта НАТО № 97-1519.

ТЕОРЕМА 2 [8]. *Каждый граф с максимальной степенью вершин не более Δ ациклически $50\Delta^{4/3}$ -раскрашиваем.*

В [1] рассматривается раскраска, являющаяся и ациклической, и k -цикловой. А именно, ациклически раскрашивается псевдограф $G^{(k)}$, получающийся заменой каждой грани ранга не более k карты G на клику с тем же множеством вершин. То есть подразумевается, что каждая грань ранга не более k имеет все “невидимые диагонали”. При $k = 3$ такая раскраска совпадает с ациклической раскраской.

Основным результатом [1] является

ТЕОРЕМА 3. *Каждая карта на поверхности S^N допускает ациклическую k -сильную раскраску в $c_N k + d_N$ цветов для любых $k \geq 4$ и $N \leq 2$, где $c_N = \max\{999, 117 - 471N\}$ и $d_N = 39 - 156N$.*

Обозначим через $F(k, N)$ наименьшее число цветов, достаточное для ациклической k -сильной раскраски карты на поверхности S^N . По теореме 3 $F(k, N)$ растет не быстрее чем линейно по k и по $-N$. Легко показать, что $F(k, N)$ растет не медленнее чем линейно по k . А вот оценку по $-N$ можно улучшить. Цель данной заметки – доказать следующий факт.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $k \geq 4$ и*

$$-N \geq 5^7 k^{4/3}. \quad (1)$$

Тогда каждая карта на поверхности S^N допускает ациклическую k -сильную раскраску в $54(-Nk)^{4/7}$ цветов.

Из теоремы 1 следует, что при любом фиксированном k если эту оценку и можно улучшить, то не более чем в $c_k(\log(3 - N))^{1/7}$ раз.

Доказательство теоремы 4 почти полностью повторяет доказательство теоремы 3 в [1], а в конце мы применяем теорему 2. Чтобы избежать больших повторений, мы будем опираться на текст [1]. В следующем разделе мы сначала укажем (небольшие) предлагаемые изменения в доказательстве теоремы 3, а затем более детально опишем конец доказательства. Таким образом, следующий раздел надо читать, имея под рукой работу [1].

2. Доказательство теоремы 4. Повторяем доказательство теоремы 3 в [1] вплоть до (4) и пропускаем (5). Затем определяем $\text{ch}(f)$, как в [1], для каждой грани f и полагаем $\text{ch}(v) = d(v) - 4 - f_{3^*}(v)/3$ для каждой вершины v . Тогда вместо (6) имеем

$$\sum_{v \in V_{3^+}} \text{ch}(v) + \sum_{f \in F} \text{ch}(f) < -4N + 1. \quad (2)$$

Далее отбрасываем лемму 4 и замечаем, что с новым определением $\text{ch}(v)$ лемма 5 справедлива уже при $d(v) \geq 6$. Затем полагаем $\varepsilon = \xi = 0$ и перераспределяем вклады в точности как в [1]. Леммы 6–10 доказываются так же, как в [1], принимая во внимание, что у нас (согласно (1)) в запасе $54(-Nk)^{4/7} \geq 54 \cdot 5^4 k$ цветов. В частности, из этих лемм следует, что $\text{ch}^*(x) \geq 0$ для любой грани или вершины x . Более того, к утверждению леммы 9 можно добавить, что $\text{ch}^*(v) \geq d(v)/4$ для любой вершины v с $d(v) \geq 48$.

Пусть $L = \frac{17}{30}(-N)^{3/7} k^{-4/7}$ и B – множество вершин степени больше L . Покажем, что

$$|B| \leq \lfloor 30(-Nk)^{4/7} \rfloor. \quad (3)$$

Действительно, если $|B| > 30(-Nk)^{4/7}$, то согласно (2) и новой версии леммы 9 (напомним, что $L = \frac{17}{30}(-N)^{3/7}k^{-4/7} \geq \frac{17}{30}(5^7k^{4/3})^{3/7}k^{-4/7} > 48$)

$$\begin{aligned} -4N + 1 &> \sum_{v \in V_{3+}} \text{ch}(v) \geq \sum_{v \in B} \text{ch}^*(v) \geq \sum_{v \in B} \frac{d(v)}{4} \geq |B| \frac{L}{4} \\ &> 30(-N)^{4/7} \frac{17}{4 \cdot 30} (-N)^{3/7} \geq \frac{17}{4} (-N). \end{aligned}$$

Это невозможно при $-N \geq 4$, а из (1) следует, что $-N \geq 5^7$. Полученное противоречие доказывает (3).

По определению множества B максимальная степень в графе $G^{(k)} - B$ не превосходит Lk . Следовательно, согласно теореме 2 вершины $G^{(k)} - B$ можно ациклически раскрасить в $50\left(\frac{17}{30}(-Nk)^{3/7}\right)^{4/3} \leq 24(-Nk)^{4/7}$ цветов. Окрасим каждую вершину в B своим собственным цветом. Всего будет затрачено не более $|B| + 24(-Nk)^{4/7}$ цветов. Согласно (3) эта сумма на больше $54(-Nk)^{4/7}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бородин О. В., Косточка А. В., Распо А., Сопена Е. Ациклическая k -сильная раскраска карт на поверхностях // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 36–45.
- [2] Alon N., Marshall T. H. Homomorphisms of edge-colored graphs and Coxeter groups // J. Algebraic Combinatorics. 1998. V. 2. P. 277–289.
- [3] Grünbaum B. Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. 1973. V. 14. № 3. P. 390–408.
- [4] Jensen T. R., Toft B. Graph Coloring Problems. New York: Wiley, 1995.
- [5] Nešetřil J., Raspaud A. Colored Homomorphisms of Colored Mixed Graphs. KAM Series № 98-376: Prague, 1998.
- [6] Raspaud A., Sopena E. Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs // Inform. Processing Letters. 1994. V. 51. P. 171–174.
- [7] Alon N., Mohar B., Sanders D. P. On acyclic colorings of graphs on surfaces // Israel J. Math. 1996. V. 94. P. 273–283.
- [8] Alon N., McDiarmid C., Reed B. Acyclic colorings of graphs // Random Struct. Algorithms. 1991. V. 2. P. 277–288.

(О. В. Бородин, А. В. Косточка) Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск

Поступило
29.08.2001

(А. Распо, Э. Сопена) Университет Бордо I, Франция
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru