Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Аг. Х. Ханмамедов, Обратная задача рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 456–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:58:16

Обратная задача рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла

Аг. Х. Ханмамедов

Рассматривается обратная задача рассеяния для разностного аналога возмущенного уравнения Хилла. По периодическим коэффициентам и по данным рассеяния восстанавливаются коэффициенты возмущения.

Библиография: 12 названий.

Введение. Рассмотрим разностное уравнение

$$(\hat{a}_{n-1} + a_{n-1})y_{n-1} + (\hat{b}_n + b_n)y_n + (\hat{a}_n + a_n)y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

в котором вещественные коэффициенты $\hat{a}_n$, a_n , $\hat{b}_n$, b_n удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n+N} &= \hat{a}_n > 0, \quad \hat{b}_{n+N} = \hat{b}_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ M_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|a_n| + |b_n|) < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где $N \geq 2$ – натуральное число. Уравнение (1) является обобщенным разностным аналогом возмущенного уравнения Хилла

$$-y'' + p(x)y + q(x)y = \lambda y, \quad p(x+1) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В работах [1], [2] изучалась обратная задача рассеяния для последнего уравнения. Как следует из [2], даже для примесных потенциалов $q(x)$ из класса

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)|q(x)| dx < \infty$$

при решении обратной задачи на данные рассеяния налагаются более сильные условия, чем в случае $p(x) = 0$ (см. также [3]). С другой стороны, в работе [4] исследовались некоторые спектральные свойства уравнения (1). Однако обратная задача рассеяния для такого уравнения не изучалась.

В настоящей работе изучается обратная задача рассеяния для уравнения (1). Более того, в отличие от непрерывного случая [2], обратная задача решается в классе (2), т.е. для коэффициентов с конечными первыми моментами $M_1 < \infty$. В п. 1 построены специальные решения соответствующего невозмущенного уравнения (см.

также [5], [6]). В п. 2 изложена теория рассеяния для уравнения (1), т.е. построены данные рассеяния, изучены их свойства. Здесь мы следуем схеме, восходящей к работам [7]–[9], где обратная задача решена при $N = 1$. Два последних пункта посвящены решению обратной задачи, т.е. задаче восстановления коэффициентов a_n , b_n по невозмущенным коэффициентам $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ и по данным рассеяния. Наличие периодических коэффициентов приводит к ухудшению свойств ядер операторов преобразования (см. [6]). Это обстоятельство и отсутствие аддитивных свойств у функции рассеяния потребовали значительной модификации классических рассуждений, приведенных в работах [7]–[9] для случая $N = 1$.

1. Через $\varphi_n = \varphi_n(\lambda)$ и $\theta_n = \theta_n(\lambda)$ обозначим решения невозмущенного уравнения

$$\hat{a}_{n-1}y_{n-1} + \hat{b}_ny_n + \hat{a}_ny_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

удовлетворяющие условиям $\varphi_0 = \theta_1 = 0$, $\varphi_1 = \theta_0 = 1$. Обозначим

$$\Delta(\lambda) = 2^{-1}[\varphi_{N+1} + \theta_N].$$

Известно, что [10] корни многочлена $\Delta^2(\lambda) - 1$ могут быть пронумерованы в невозрастающем порядке:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 > \lambda_4 > \dots > \lambda_{2N-2} \geq \lambda_{2N-1} > \lambda_{2N}.$$

При этом множество

$$\sigma = \{\lambda : |\Delta(\lambda)| \leq 1\} = \bigcup_{r=1}^N \sigma_r, \quad \text{где } \sigma_r = [\lambda_{2r}, \lambda_{2r-1}], \quad r = 1, \dots, N,$$

является непрерывным спектром задачи (3). Многочлен $\Delta(\lambda)$ монотонно убывает от 1 до -1 на четных компонентах спектра σ_{2r} и возрастает от -1 до 1 на нечетных компонентах σ_{2r-1} . Только отрезки $[\lambda_{2r+1}, \lambda_{2r}]$, $r = 1, \dots, N-1$, которые мы назовем *лакунами*, могут вырождаться в точку, давая двукратно вырожденные корни. В каждой лакуне лежит [5], [10] по одному (простому) нулю ν_r , $r = 1, \dots, N-1$, многочлена $\varphi_N(\lambda)$.

Пусть Γ – комплексная λ -плоскость с разрезами по отрезкам σ_r , $r = 1, 2, \dots, N$. В плоскости Γ рассмотрим функцию

$$z = z(\lambda) = \Delta(\lambda) + \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1},$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1} < 0$ при $\lambda > \lambda_1$. Тогда функция $z = z(\lambda)$ непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$ и обладает свойством

$$\begin{aligned} |z| < 1 \quad \text{при } \lambda \in \Gamma, \quad |z| = 1 \quad \text{при } \lambda \in \partial\Gamma, \\ z = \frac{A}{\lambda^N} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad A = \hat{a}_1\hat{a}_2 \cdots \hat{a}_N. \end{aligned} \quad (4)$$

Как следует из [5], [6], уравнение (3) имеет решения $\Psi_n^\pm = \Psi_n^\pm(\lambda)$, представимые в виде $\Psi_{nN+j}^\pm = E_{j+1}^\pm z^n$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, где

$$\begin{aligned} E_1^\pm &\equiv 1, \\ E_m^\pm &= \chi^{-1}(1, N-1; \lambda) [\hat{a}_{m-1}\hat{a}_m \cdots \hat{a}_{N-1}\chi(1, m-2; \lambda)z^{\pm 1} \\ &\quad + \hat{a}_0\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_{m-2}\chi(m, N-1; \lambda)], \quad m = 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

причем $\chi(1, 0; \lambda) = \chi(N, N-1; \lambda) \equiv 1$,

$$\chi(m, s; \lambda) = (-1)^{s-m+1} \begin{vmatrix} \widehat{b}_m - \lambda & \widehat{a}_m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{a}_m & \widehat{b}_{m+1} - \lambda & \widehat{a}_{m+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \widehat{a}_{s-2} & \widehat{b}_{s-1} - \lambda & \widehat{a}_{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \widehat{a}_{s-1} & \widehat{b}_s - \lambda \end{vmatrix}.$$

Решения $\Psi_n^\pm(\lambda)$ регулярны в Γ , за исключением, быть может, нулей ν_r многочлена $\chi(1, N-1; \lambda) \equiv \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \cdots \widehat{a}_{N-1} \varphi_N(\lambda)$. Более того, в точках ν_r одно из двух решений конечно, другое имеет простой полюс.

Представим теперь многочлен $\chi(1, N-1; \lambda)$ в виде произведения трех многочленов:

$$\chi(1, N-1; \lambda) = D^+(\lambda) D(\lambda) D^-(\lambda), \quad (6)$$

где корни многочлена $D^\pm(\lambda)$ совпадают с полюсами решения $\Psi_n^\pm(\lambda)$, а корни многочлена $D(\lambda)$ состоят из двукратных корней функции $\Delta^2(\lambda) - 1$.

Введем обозначения

$$e_m^\pm = D^\pm(\lambda) E_m^\pm, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Тогда при $\lambda \in \partial\Gamma$ имеют место равенства

$$D^-(\lambda) \overline{e_m^+} = D^+(\lambda) e_m^-, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Ввиду однородности уравнения (3) заметим, что это уравнение имеет решения $\psi_n^\pm = \psi_n^\pm(\lambda)$, регулярные в Γ , непрерывные вплоть до $\partial\Gamma$ и представимые в виде

$$\psi_{nN+j}^\pm(\lambda) = e_{j+1}^\pm z^{\pm n}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$\rho(\lambda) = D(\lambda) [A(z - z^{-1})]^{-1}. \quad (10)$$

ЛЕММА 1. *Справедливо условие ортогональности*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) \psi_n^+(\lambda) \psi_m^-(\lambda) d\lambda = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

где $i = \sqrt{-1}$, δ_{nm} – символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (8) можно считать, что $n \geq m$. К тому же при $n \geq m$ в силу (4)–(7) имеем

$$\rho(\lambda) \psi_n^+(\lambda) \psi_m^-(\lambda) = -\frac{\delta_{nm}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Тогда по теореме о вычетах получим формулы (11) при $n \geq m$.

Лемма доказана.

2. Рассмотрим решения $f_n^\pm(\lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} [f_n^\pm(\lambda) - \psi_n^\pm(\lambda)] = 0.$$

Как следует из [10], такие решения существуют и справедливы представления

$$f_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \left(\psi_n^\pm(\lambda) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m) \psi_m^\pm(\lambda) \right), \quad (13)$$

причем имеют место соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \alpha_n^\pm = 1, \quad |K^\pm(n, m)| \leq C^\pm(n) \xi^\pm \left(\left[\frac{n+m}{2} \right] \right), \quad (14)$$

где $\xi^\pm(n) = \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} (|a_k| + |b_k|)$, $[x]$ – целая часть x , $\pm C^\pm(n)$ здесь и далее – невозрастающая функция от n .

Подставляя решения (13) в уравнение (1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{a}_n + a_n}{\hat{a}_n} &= \frac{\alpha_{n+\theta_1^\pm}^\pm}{\alpha_{n-\theta_{-1}^\pm}^\pm}, \quad b_n = \pm(\hat{a}_n K^\pm(n, n+1) - \hat{a}_{n-1} K^\pm(n-1, n)) = \tau_n^\pm, \\ \frac{(\hat{a}_n + a_n)^2}{\hat{a}_n} - \hat{a}_n &= \pm(\hat{a}_{n+1} K^\pm(n, n+2) - \hat{a}_{n-1} K^\pm(n-1, n+1)) \\ &\quad + (\hat{b}_{n+\theta_1^\pm} - \hat{b}_{n-\theta_{-1}^\pm} - \hat{b}_{n-\theta_1^\pm}) K^\pm(n, n+1) = \mathfrak{x}_n^\pm, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\theta_j^\pm = [(j \pm 1)/2]$, а при $m > n$ под записью $K^-(n, m)$ подразумевается $K^-(m, n)$.

Установим теперь связь между решениями $f_n^+(\lambda)$ и $f_n^-(\lambda)$. Очевидно, что при $\lambda \in \partial\Gamma$ решениями уравнения (1) являются также

$$\tilde{f}_n^\pm(\lambda) = \frac{D^\mp(\lambda)}{D^\pm(\lambda)} \overline{f_n^\pm(\lambda)}.$$

Используя (8) и (13), получим

$$\tilde{f}_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \left(\psi_n^\mp(\lambda) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m) \psi_m^\mp(\lambda) \right), \quad \lambda \in \partial\Gamma. \quad (16)$$

Пусть множество $\omega = \{\lambda_j\}$ состоит из простых корней многочлена $\Delta^2(\lambda) - 1$ и $'\partial\Gamma = \partial\Gamma \setminus \omega$. Тогда при $\lambda \in '\partial\Gamma$ пары $\{f_n^\pm(\lambda), \tilde{f}_n^\pm(\lambda)\}$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (1), так как согласно (5), (7), (9), (13), (14) их вронскиан $W[f_n^\pm, \tilde{f}_n^\pm] = (\hat{a}_n + a_n)(f_n^\pm \tilde{f}_{n+1}^\pm - f_{n+1}^\pm \tilde{f}_n^\pm)$ равен $\mp \rho^{-1}(\lambda)$. Следовательно, при $\lambda \in '\partial\Gamma$ справедливы разложения

$$\frac{f_n^\mp(\lambda)}{a(\lambda)} = \tilde{f}_n^\pm(\lambda) + r^\pm(\lambda) f_n^\pm(\lambda), \quad (17)$$

где

$$r^+(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad r^-(\lambda) = - \left(\frac{D^+(\lambda)}{D^-(\lambda)} \right)^2 \frac{\overline{b(\lambda)}}{a(\lambda)}, \quad (18)$$

$$a(\lambda) = \rho(\lambda) W[f_n^-(\lambda), f_n^+(\lambda)], \quad b(\lambda) = \rho(\lambda) W[\tilde{f}_n^+(\lambda), f_n^-(\lambda)].$$

Очевидно, что $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ непрерывны при $\lambda \in {}'\partial\Gamma$. Кроме того, из (17), (18) следует, что

$$\begin{aligned} a(\lambda - i0) &= \overline{a(\lambda + i0)}, \quad b(\lambda - i0) = \overline{b(\lambda + i0)}, \quad \lambda \in \sigma \setminus \omega, \\ |a(\lambda)|^2 - \left| \frac{D^+(\lambda)}{D^-(\lambda)} b(\lambda) \right|^2 &= 1, \quad \lambda \in {}'\partial\Gamma, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \rho^{-1}(\lambda) \left(a(\lambda) + \frac{D^+(\lambda)}{D^-(\lambda)} b(\lambda) \right) &= 0, \quad \lambda_j \in \omega. \end{aligned} \quad (19)$$

С другой стороны, ввиду (13) и (18) функция $a(\lambda)$ допускает регулярное продолжение в Γ , а функция $\rho^{-1}(\lambda)a(\lambda)$ непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$. Далее, стандартным методом, как и в случае $N = 1$ (см. [8]) доказывается, что функция $a^{-1}(\lambda)$ ограничена вблизи точек λ_j , $\lambda_j \in \omega$, и может иметь конечное число простых собственных полюсов μ_k , $k = 1, \dots, \tilde{N}$, лежащих вне $\partial\Gamma$.

Положим

$$C_k = \frac{f_n^+(\mu_k)}{f_n^-(\mu_k)}, \quad (m_k^\pm)^{-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n^\pm(\mu_k)|^2. \quad (20)$$

ЛЕММА 2. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(\lambda) &= \alpha_n^+ \alpha_n^-, \\ \rho^{-1}(\mu_k) \dot{a}(\mu_k) &= -C_k^{-1} (m_k^+)^{-2} = -C_k (m_k^-)^2, \end{aligned} \quad (21)$$

где точкой сверху обозначается производная по λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5), (7) и (13) следует, что

$$f_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \psi_n^\pm(\lambda) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Учитывая эти соотношения в формуле (18), получим первое из требуемых равенств.

Суммируем теперь соотношения

$$u_n v_n = W[\dot{u}_{n-1}, v_{n-1}] - W[\dot{u}_n, v_n] = W[\dot{v}_{n-1}, u_{n-1}] - W[\dot{v}_n, u_n]$$

при $u_n = f_n^+(\lambda)$, $v_n = f_n^-(\lambda)$, $\lambda = \mu_k$. Используя (20), имеем

$$\begin{aligned} W[\dot{f}_n^+(\mu_k), f_n^-(\mu_k)] &= C_k^{\pm 1} \sum_{m=n+1}^{\infty} |f_n^\mp(\mu_k)|^2, \\ W[f_n^+(\mu_k), \dot{f}_n^-(\mu_k)] &= C_k^{\pm 1} \sum_{m=-\infty}^n |f_n^\mp(\mu_k)|^2. \end{aligned}$$

Складывая эти соотношения и учитывая (18), получим (21).

Лемма доказана.

Воспользовавшись (22) заметим, что

$$(m_k^+)^2 (m_k^-)^2 = \rho^2(\mu_k) (\dot{a}(\mu_k))^{-2}, \quad k = 1, \dots, \tilde{N}. \quad (23)$$

Выпишем некоторые из установленных свойств в виде условия, которое нам понадобится.

УСЛОВИЕ I. Функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ непрерывны при $\lambda \in \partial\Gamma$, удовлетворяют соотношениям (19). Функция $a(\lambda)$ регулярно продолжима в Γ , имеет простые нули в точках μ_k , $k = 1, \dots, \tilde{N}$, а функция $\rho^{-1}(\lambda)a(\lambda)$ непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$. Функция $a^{-1}(\lambda)$ ограничена вблизи точек λ_j , $\lambda_j \in \omega$, и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a^{-1}(\lambda) = d^{-1} > 0.$$

Нормировочные числа $m_k^\pm$ связаны соотношениями (23).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Набор величин

$$\{a(\lambda), b(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma; \mu_k; m_k^\pm > 0, k = 1, \dots, \tilde{N}\}$$

назовем *данными рассеяния* для уравнения (1).

Обратная задача рассеяния для уравнения (1) заключается в восстановлении коэффициентов a_n , b_n этого уравнения по невозмущенным коэффициентам $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ и по данным рассеяния.

3. Введем для нашей задачи уравнения, связывающие данные рассеяния с ядрами $K^\pm(n, m)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} M^\pm(n, m) &= \sum_{k=1}^{\tilde{N}} (m_k^\pm)^2 \psi_n^\pm(\mu_k) \psi_m^\pm(\mu_k), \\ S^\pm(n, m) &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) r^\pm(\lambda) \psi_n^\pm(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda) d\lambda, \\ F^\pm(n, m) &= M^\pm(n, m) + S^\pm(n, m). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *Имеют место соотношения*

$$F^\pm(n, m) + K^\pm(n, m) + \sum_{s=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, s) F^\pm(s, m) = 0, \quad \pm m \geq \pm(n \pm 1), \quad (24)$$

$$(\alpha_n^\pm)^{-2} = 1 + F^\pm(n, n) + \sum_{s=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, s) F^\pm(s, n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части равенства (17) на

$$\frac{(\alpha_n^\pm)^{-1}}{2\pi i} \rho(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda), \quad \pm m \geq \pm n,$$

и подставляя вместо $f_n^\pm(\lambda)$, $\bar{f}_n^\pm(\lambda)$ их представления в виде (13), (16), проведем интегрирование по $\partial\Gamma$. Используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_n^\pm)^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) f_n^\mp(\lambda) a^{-1}(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda) d\lambda \\ &= \delta_{nm} + (1 - \delta_{nm}) K^\pm(n, m) + S^\pm(n, m) + \sum_{r=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, r) S^\pm(r, m). \end{aligned}$$

С другой стороны, применяя теорему о вычетах и учитывая (12), (22), а также используя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_n^\pm)^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) f_n^\mp(\lambda) a^{-1}(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda) d\lambda \\ &= (\alpha_n^\pm)^{-2} \delta_{nm} - M^\pm(n, m) - \sum_{r=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, r) M^\pm(r, m). \end{aligned}$$

Сравнивая первое и последнее равенства, приходим к соотношениям (24), (25).

Лемма доказана.

Используем теперь уравнение (24) для уточнения свойств величины $F^\pm(n, m)$. Полагая

$$\begin{aligned} e(\lambda; j) &= (e_1^+, \dots, e_j^+, e_{j+1}^+ z^{-1}, \dots, e_N^+ z^{-1}), \\ A_{nm}^{sj} &= \begin{cases} K^+(nN + s - 1, (n + m)N + j - 1) & \text{при } 1 \leq j \leq s, \\ K^+(nN + s - 1, (n + m - 1)N + j - 1) & \text{при } s < j \leq N, \end{cases} \end{aligned}$$

в силу (9), (13), (14) получим

$$\begin{aligned} f_{nN+j}^+ &= \alpha_{nN+j} z^n \left(e_j^+ + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm}^{j1}, \dots, A_{nm}^{jN}) e^*(\lambda, j) z^m \right), \\ |A_{nm}^{sj}| &\leq C_{sj}(n) \xi^+ \left(nN + \left\lceil \frac{m-1}{2} N \right\rceil \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где $e^*(\lambda, j)$ – транспонированный вектор, $C_{sj}(n)$ – невозрастающая функция от n . При таких обозначениях уравнение (24) для случая “+” видоизменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & (F_{2n+m}^{s1}(s), \dots, F_{2n+m}^{sN}(s)) + (A_{nm}^{s1}, \dots, A_{nm}^{sN}) \\ &+ \sum_{k=m+1}^{\infty} (A_{n,k-m}^{s1}, \dots, A_{n,k-m}^{sN}) F_{2n+k}(s) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где матрица $F_n(s)$ определяется формулой

$$F_n(s) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} (m_j^+)^2 e^*(\mu_j; s) e(\mu_j; s) z^n(\mu_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) r^+(\lambda) e^*(\lambda; s) e(\lambda; s) d\lambda.$$

Обозначим $\|F_n\| = \max_{1 \leq s \leq N} \max_{(i,j)} |F_n^{ij}(s)|$. Из определения $F_n(s)$ следует, что при любых s_1 и s_2 , $s_1 < s_2$, существует такое l , $l = 0, 1, 2$, что $F_n^{ij}(s_2) = F_{n+l}^{ij}(s_1)$. Учитывая это и используя (26) из последних уравнений находим, что при $n > a$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \|F_{2n+m}\| &\leq C \left(\xi^+ \left(nN + \left\lceil \frac{m-1}{2} N \right\rceil \right) + \xi^+(nN) \right) \\ &+ C \sum_{k=m+1}^{\infty} \xi^+ \left(nN + \left\lceil \frac{k-m-1}{2} N \right\rceil \right) \|F_{2n+k}\|, \end{aligned}$$

где $C > 0$ не зависит от n . Полагая

$$\xi(n, k) = \xi^+ \left(nN + \left[\frac{k-1}{2} N \right] \right) + \xi^+(nN),$$

имеем

$$\begin{aligned} & \|F_{2n+m}\| \xi^{-1}(n, m) \\ & \leq C + C \xi^{-1}(n, m) \sum_{k=m+1}^{\infty} \xi^+ \left(nN + \left[\frac{k-m-1}{2} N \right] \right) \xi(n, k) \{ \|F_{2n+k}\| \xi^{-1}(n, k) \}. \end{aligned}$$

Так как последовательности

$$\gamma_k = C \xi^{-1}(n, m) \xi^+ \left(nN + \left[\frac{k-m-1}{2} N \right] \right) \xi(n, k) \quad \text{и} \quad \|F_{2n+k}\| \xi^{-1}(n, k) \gamma_k$$

суммируемы по m при $m \geq k+1$, в силу разностного аналога леммы Гронуолля (см. [8; с. 52]) получим

$$\|F_{2n+m}\| \xi^{-1}(n, m) \leq C \exp \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_k \right),$$

согласно которому

$$\|F_{2n+m}\| \leq C_1 \xi(n, m), \quad C_1 > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$|F_n^{ij}(s)| < C^+ \xi^+ \left(\left[\frac{nN}{2} \right] \right).$$

Поэтому, если $n = n_1 N + n_2$, $k = k_1 N + k_2$, $n_2, k_2 = 0, 1, \dots, N-1$, то

$$|F^+(n, n+k)| < C^+ \xi^+ \left(n_1 N + \left[\frac{k_1 N}{2} \right] \right) < C^+ \xi^+ \left(n + \left[\frac{k}{2} \right] - 2N \right).$$

Таким образом, при $n > a$ для всех $m \geq n$ верно неравенство

$$|F^+(n, m)| < C^+ \xi^+ \left(\left[\frac{n+m}{2} \right] - 2N \right).$$

Аналогично, при $n < a$, $a \neq \pm\infty$ для всех $m \leq n$ справедливо неравенство

$$|F^-(n, m)| < C^- \xi^- \left(\left[\frac{n+m}{2} \right] + 2N \right).$$

Так как $F^\pm(n, m) = F^\pm(m, n)$, из последних неравенств вытекает следующее свойство.

УСЛОВИЕ II. При любом $a \neq \pm\infty$ величина $F^\pm(n, m)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\pm(n-a)>0} \sup_{\pm(m-a)>0} |F^\pm(n, m)| < \infty.$$

Займемся теперь разрешимостью уравнения (24).

ТЕОРЕМА 1. Пусть для данных рассеяния выполнены условия I, II. Тогда при каждом n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, уравнение (24) имеет единственное решение в пространстве $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$, $p = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись критерием компактности в $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$ (см. [11; с. 248]) заметим, что при выполнении свойства II оператор $\mathcal{F}_{(n)}^\pm$, действующий по формуле

$$(\mathcal{F}_{(n)}^\pm h)_m = \sum_{k=n+1}^{+\infty} F^\pm(k, m) h_k, \quad \pm(m - n) \geq 1,$$

вполне непрерывен в $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$, $p = 1, 2$. В силу альтернативы Фредгольма уравнение (24) имеет единственное решение из $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$, если у однородного уравнения отсутствуют нетривиальные решения из $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$h_m^\pm + \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} F^\pm(k, m) h_k^\pm = 0, \quad \pm(m - n) \geq 1. \quad (27)$$

В силу вещественности $F^\pm(m, k)$ можно считать, что все $h_m^\pm$ вещественны. Кроме того, поскольку каждое решение уравнения (26) из $l^1(n \pm 1, \pm\infty)$ принадлежит и $l^2(n \pm 1, \pm\infty)$, достаточно доказать, что уравнение имеет в $l^2(n \pm 1, \pm\infty)$ только тривиальное решение. Пользуясь представлением (9) и свойствами класса функций H_2 (см. [12]), заметим, что функция

$$H^\pm(\lambda) = \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} h_m^\pm \psi_m^\pm(\lambda),$$

регулярная в Γ , имеет почти всюду на $\partial\Gamma$ конечные угловые граничные значения, причем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) |H^\pm(\lambda)|^2 d\lambda < \infty.$$

Согласно (8), (9) при $\lambda \in \partial\Gamma$ имеем

$$\overline{H^\pm(\lambda)} = \frac{D^\pm(\lambda)}{D^\mp(\lambda)} \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} h_m^\pm \psi_m^\mp(\lambda).$$

Поэтому из (11) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) |H^\pm(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |h_m^\pm|^2, \quad (28)$$

где

$$\rho_0(\lambda) = \frac{\chi(1, N-1; \lambda)}{(D^+(\lambda))^2 A(z - z^{-1})}.$$

Умножим теперь обе части равенства (28) на $h_m^\pm$ и просуммируем по m в пределах от $n \pm 1$ до $\pm\infty$:

$$\sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |h_m^\pm|^2 + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} h_m^\pm \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} F^\pm(m, k) h_k^\pm = 0.$$

Пользуясь определениями величин $H^\pm(\lambda)$, $F^\pm(m, k)$ и предпоследним равенством, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{\rho}_0(\lambda) \{ 2|H^\pm(\lambda + i0)|^2 + R^\pm(\lambda)(H^\pm(\lambda + i0))^2 + \overline{R^\pm(\lambda)}(\overline{H^\pm(\lambda + i0)})^2 \} d\lambda \\ & + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} (m_j^\pm)^2 (H^\pm(\mu_j))^2 = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\tilde{\rho}_0(\lambda) = -i\rho_0(\lambda + i0), \quad R^\pm(\lambda) = \frac{D^\pm(\lambda)}{D^\mp(\lambda)} r^\pm(\lambda + i0), \quad \lambda \in \sigma \setminus \omega.$$

Легко проверить, что $\tilde{\rho}_0(\lambda) > 0$ при $\lambda \in \sigma \setminus \omega$. Кроме того, так как в силу (18), (19) $|R^\pm(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in \sigma \setminus \omega$, то

$$\begin{aligned} & 2|H^\pm(\lambda + i0)|^2 + R^\pm(\lambda)(H^\pm(\lambda + i0))^2 + \overline{R^\pm(\lambda)}(\overline{H^\pm(\lambda + i0)})^2 \\ & \geq |\overline{H^\pm(\lambda + i0)} + R^\pm(\lambda)H^\pm(\lambda + i0)|^2, \end{aligned}$$

согласно которому для выполнения равенства (29) необходимо, чтобы $H^\pm(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda \in \partial\Gamma$. В силу (28) получим $h_m^\pm \equiv 0$, т.е. однородное уравнение (27) имеет только тривиальное решение.

Теорема доказана.

В силу доказанной теоремы существует ограниченный в $l^1(n \pm 1, \pm\infty)$ обратный оператор $(I + \mathcal{F}_{(n)}^\pm)^{-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Более того, согласно свойству II

$$\|\mathcal{F}_{(n)}^\pm\|_{l^1(n\pm 1, \pm\infty)} \leq \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} \sup_{\pm(k-n) \geq 1} |F^\pm(m, k)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \pm\infty,$$

откуда следует, что семейство операторов $(I + \mathcal{F}_{(n)}^\pm)^{-1}$ равномерно ограничено в пространстве $l^1(n \pm 1, \pm\infty)$ при $\pm(n - a) > 0$:

$$\|(I + \mathcal{F}_{(n)}^\pm)^{-1}\|_{l^1(n\pm 1, \pm\infty)} \leq C^\pm(a).$$

Тогда из уравнения (24) с учетом последнего равенства имеем

$$\sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |K^\pm(n, m)| \leq C^\pm(n) \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |F^\pm(m, n)|,$$

согласно которому

$$|K^\pm(n, m)| \leq |F^\pm(n, m)| + C^\pm(n) \sup_{\pm(k-n) \geq 1} |F^\pm(m, k)|. \quad (30)$$

Помимо этого, на основании формулы (15) выделим еще одно свойство данных рассеяния.

УСЛОВИЕ III. Величины $\tau_n^\pm$ и $\varkappa_n^\pm$, определенные по формулам (15), удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} |n|(|\tau_n^\pm| + |\varkappa_n^\pm|) < \infty,$$

где $K^\pm(n, m)$ есть решение уравнения (24).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если данные рассеяния удовлетворяют условиям I, II и $K^\pm(n, m)$ – решение уравнения (24), то имеет место неравенство

$$(\alpha_n^\pm)^{-2} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + F^\pm(n, n) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m)F^\pm(m, n) > 0. \quad (31)$$

Действительно, если $H_n^\pm(\lambda) = \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m)\psi_m^\pm(\lambda)$, то

$$\begin{aligned} (\alpha_n^\pm)^{-2} &> \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{\rho}_0(\lambda) \left| \overline{H_n^\pm(\lambda + i0)} + \overline{\psi_n^\pm(\lambda + i0)} \right. \\ &\quad \left. + R^\pm(\lambda)(H_n^\pm(\lambda + i0) + \psi_n^\pm(\lambda + i0)) \right|^2 d\lambda \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} (\mu_j^\pm)^2 |H_n^\pm(\mu_j) + \psi_n^\pm(\mu_j)|^2, \end{aligned}$$

которое доказывается аналогичными рассуждениями, приведенными по ходу доказательства теоремы 1.

4. В предыдущих пунктах были получены необходимые условия I–III на данные рассеяния. Докажем, что эти условия также достаточны, чтобы по невозмущенным коэффициентам $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ и по данным рассеяния можно было однозначно восстановить коэффициенты a_n, b_n , удовлетворяющие требованию $M_1 < \infty$.

Итак, пусть свойства I–III выполняются. Тогда уравнение (24) имеет единственное решение $K^\pm(n, m)$. Определим величины $b_n^\pm = \tau_n^\pm, \varkappa_n^\pm$ и $\alpha_n^\pm > 0$ по формулам (15), (31) соответственно. Определим также величины a_n^+ и a_n^- из соотношений

$$\frac{\hat{a}_n + a_n^+}{\hat{a}_n} = \frac{\alpha_{n+1}^+}{\alpha_n^+}, \quad \frac{\hat{a}_n + a_n^-}{\hat{a}_n} = \frac{\alpha_n^-}{\alpha_{n+1}^-}.$$

Положим

$$f_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \left(\psi_n^\pm(\lambda) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m)\psi_m^\pm(\lambda) \right). \quad (32)$$

ТЕОРЕМА 2. Величина $f_n^\pm = f_n^\pm(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n-[(1\pm 1)/2]} \frac{\alpha_n^\pm}{\alpha_{n\mp 1}^\pm} f_{n\mp 1}^\pm + (\hat{b}_n + b_n^\pm) f_n^\pm \\ + \frac{\alpha_n^\pm}{\alpha_{n\pm 1}^\pm} (\hat{a}_{n+[(1\pm 1)/2]} + \varkappa_{n+[(1\pm 1)/2]}^\pm) f_{n\pm 1}^\pm = \lambda f_n^\pm, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

где $[x]$ – целая часть x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для случая “+”. Так как $K^+(n, m)$ удовлетворяет оценке (30), достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n-1}K^+(n-, m) + (\hat{b}_n + b_n^+)K^+(n, m) + (\hat{a}_n + \mathfrak{a}_n^+)K^+(n+1, m) \\ = \hat{a}_{m-1}K^+(n, m-1) + \hat{b}_mK^+(n, m) + \hat{a}_mK^+(n, m+1), \quad m \geq n+2. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим разностное выражение

$$(\hat{H}y)_{nm} = \hat{a}_{n-1}y_{n-1,m} + \hat{a}_ny_{n+1,m} + \hat{b}_ny_{nm} - \hat{a}_{m-1}y_{n,m-1} - \hat{a}_my_{n,m+1} - \hat{b}_my_{nm}.$$

Ясно, что $\hat{H}F^+(n, m) = 0$. Тогда из (24) находим, что

$$(\hat{H}K^+)_{nm} + \hat{H} \left(\sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l)F^+(l, m) \right)_{nm} = 0.$$

Преобразуя второе слагаемое, имеем

$$\begin{aligned} (\hat{H}K^+)_{nm} + \sum_{l=n+2}^{\infty} (\hat{H}K^+)_{nl}F^+(l, m) \\ = b_n^+F^+(n, m) + \mathfrak{a}_n^+F^+(n+1, m) + b_n^+K^+(n, n+1)F^+(n+1, m). \end{aligned}$$

Определим теперь разностное выражение H , полагая

$$(Hy)_{nm} = (\hat{H}y)_{nm} + b_n^+y_{nm} + \mathfrak{a}_n^+y_{n+1,m}.$$

Согласно уравнению (24)

$$b_n^+F^+(n, m) = -b_n^+ \left(K^+(n, m) + K^+(n, n+1)F^+(n+1, m) + \sum_{l=n+2}^{\infty} K^+(n, l)F^+(n, l) \right),$$

а также

$$\mathfrak{a}_n^+F^+(n+1, m) = -\mathfrak{a}_n^+ \left(K^+(n+1, m) + \sum_{l=n+2}^{\infty} K^+(n+1, l)F^+(l, m) \right).$$

Три последних тождества приводят нас к соотношению

$$(HK^+)_{nm} + \sum_{l=n+2}^{\infty} (HK^+)_{nl}F^+(l, m) = 0.$$

Тогда $(HK^+)_{nm} \equiv 0$, так как в силу теоремы 1 последнее уравнение имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, имеет место равенство (33). Случай “−” рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Следуя теперь соответствующим рассуждениям Марченко [3; с. 275], как и в случае $N = 1$ (см. [8]) доказывается, что справедливы соотношения (17) и имеет место равенство $\alpha_n^+ \alpha_n^- = d$. Поэтому величины $f_n^\pm$ удовлетворяют уравнениям

$$\hat{a}_{n-[(1\pm 1)/2]} \frac{\alpha_n^\pm}{\alpha_{n\mp 1}^\pm} f_{n\mp 1}^\mp + (\hat{b}_n + b_n^\pm) f_n^\mp + \frac{\alpha_n^\pm}{\alpha_{n\pm 1}^\pm} (\hat{a}_{n+[(1\pm 1)/2]} + \mathfrak{a}_{n+[(1\pm 1)/2]}^\pm) f_{n\pm 1}^\mp = \lambda f_n^\mp.$$

Подставляя в этих уравнениях вместо $f_n^\pm$ их представления (32) и приравнявая коэффициенты при $\psi_n^\pm(\lambda)$, получим

$$\frac{\alpha_n^-}{\alpha_{n+1}^-} = \frac{\hat{a}_n + \mathfrak{a}_n^-}{\hat{a}_n} = \frac{\hat{a}_n + \mathfrak{a}_n^+}{\hat{a}_n} = \frac{\alpha_{n+1}^+}{\alpha_n^+}, \quad b_n^+ = b_n^-,$$

т.е. если мы решим обратную задачу, то формулы (15) приведут нас к одному и тому же разностному уравнению

$$(\hat{a}_{n-1} + a_{n-1})y_{n-1} + (\hat{b}_n + b_n)y_n + (\hat{a}_n + a_n)y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

где $a_n = a_n^+ = a_n^-$, $b_n = b_n^+ = b_n^-$. Кроме того, в силу свойства III

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Легко видеть, что построенное уравнение имеет собственные значения μ_k , где μ_k — нули функции $a(\lambda)$, и нормировочные коэффициенты

$$(m_k^\pm)^{-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n^\pm(\mu_k)|^2, \quad k = 1, \dots, \tilde{N}.$$

Тем самым верна

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы набор величин

$$\{\lambda(\lambda), b(\lambda), \lambda \in {}'\partial\Gamma; \mu_k; m_k^\pm > 0, k = 1, \dots, \tilde{N}\}$$

являлся данными рассеяния для некоторого уравнения вида (1) с коэффициентами из класса (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия I–III.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $N = 2$ приведенные результаты переносятся также на случай системы разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n} + a_{2,n-1}y_{2,n-1} + b_{1,n}y_{1,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n}y_{1,n} + a_{2,n}y_{1,n+1} + b_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{2,n}, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

являющуюся разностным аналогом одномерной системы Дирака.

Действительно, полагая в последней системе

$$y_{j,n} = y_{2n+j-1}, \quad a_{j,n} = \hat{a}_{j-1} + a_{2n+j-1}, \quad b_{j,n} = \hat{b}_{j-1} + b_{2n+j-1}, \quad j = 1, 2,$$

получим уравнение (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. G. Newton, “Inverse scattering by a local impurity in a periodic potential in one dimension”, *J. Math. Phys.*, **24**:8 (1983), 2152–2162.
- [2] Н. Е. Фирсова, “Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного возмущенного оператора Хилла”, *Матем. сб.*, **130**:3 (1986), 349–385.

- [3] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [4] J. S. Geronimo, W. Van Assche, “Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients”, *J. Approx. Theory*, **46**:3 (1986), 251–283.
- [5] Аг. Х. Ханмамедов, “К спектральной теории разностного уравнения с периодическими коэффициентами”, *Вестн. БГУ. Сер. физ.-матем. науки*, **1** (2001), 124–130.
- [6] А. Х. Ханмамедов, “Операторы преобразования для возмущенного разностного уравнения Хилла и их одно приложение”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:4 (2003), 926–937.
- [7] К. М. Case, М. Кас, “A discrete version of the inverse scattering problem”, *J. Math. Phys.*, **14**:5 (1973), 594–603.
- [8] Г. Ш. Гусейнов, *Обратные задачи теории рассеяния для самосопряженных разностных операторов второго порядка*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, М., МГУ, 1976.
- [9] G. Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*, Math. Surveys Monogr., **72**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [10] М. Toda, *Теория нелинейных решеток*, Мир, М., 1984.
- [11] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965.
- [12] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М., 1950.

Аг. Х. Ханмамедов

Бакинский государственный университет

E-mail: agil-khanmamedov@yahoo.com

Поступило

01.12.2003

Исправленный вариант

25.10.2006