Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Шамоян, О нулях аналитических в круге функций с заданной мажорантой вблизи его границы, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 300–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 09:31:42

О нулях аналитических в круге функций с заданной мажорантой вблизи его границы

Ф. А. Шамоян

Пусть λ – произвольная положительная функция из $C[0, 1)$, $\lambda(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 1 - 0$, удовлетворяющая некоторым условиям регулярности роста, $A(\lambda)$ – множество всех голоморфных в единичном круге функций f , для которых $\ln|f(z)| \leq c \cdot \lambda(|z|)$, $|z| < 1$. В статье установлено, что существует $f \in A(\lambda)$ с корневым множеством $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такая, что последовательность $\{|z_k|\}_{k=1}^{+\infty}$ является множеством единственности для класса $A(\lambda)$.

Библиография: 19 названий.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех голоморфных в D функций, λ – монотонно растущая положительная непрерывная функция на $[0, 1)$. Положим

$$A(\lambda) = \{f \in H(D) : \ln|f(z)| \leq C_f \lambda(|z|), z \in D\},$$

где C_f – положительное число, зависящее только от f .

Хорошо известно, что во многих классах голоморфных в D функций с ограничениями на рост характеристики Неванлинны

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi, \quad 0 \leq r < 1,$$

где $f \in H(D)$, $\ln^+ |f| = \max(\ln|f|, 0)$, корневые множества полностью характеризуются в терминах считающей функции

$$n(r) = \{\text{card } z_k : |z_k| < r\}, \quad r \in [0, 1),$$

$\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность точек из D (см. [1]–[4]). В таких же терминах описываются корневые множества целых функций конечного порядка и нормального типа, когда порядок функций не является целым числом (см. [5; гл. 2]).

В данной работе мы докажем, что в отличие от указанных классов в классах $A(\lambda)$ характеристика корневых множеств существенно зависит от их расположения по аргументам. Поэтому в терминах функции $n(r)$ нельзя охарактеризовать корневые множества класса $A(\lambda)$ при $\lambda(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 1 - 0$ (в отличие от случая $\lambda(r) = 1$, $r \in [0, 1)$). В статье при некоторой регулярности роста $\lambda(r)$: $\lambda(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 1 - 0$, мы построим функцию $f \in A(\lambda)$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ такие, что

$f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \not\equiv 0$, в то же время, для произвольного $g \in A(\lambda)$ такого, что $g(|z_k|) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено $g(z) = 0$ при всех $z \in D$.

Кроме того, мы устанавливаем, что в отличие от классов мероморфных в конечной плоскости функций в круге существуют функции конечного порядка и нормального типа, не представимые в виде отношения двух голоморфных функций из того же класса.

Свойства корневых множеств классов $A(\lambda)$ при $\lambda(r) = \ln(2/(1-r))$, $r \in [0, 1)$, были исследованы впервые Джрбашьяном еще в работе [7], доказавшим при указанных λ , что если

$$f \in A(\lambda), \quad f(r_k) = 0, \quad r_k \in (0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad f(z) \not\equiv 0, \quad z \in D,$$

то $\{r_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Бляшке: $\sum_1^\infty (1 - r_k) < +\infty$. В дальнейшем, в работе Шапиро и Шильдса (см. [8]) установлено такое же утверждение при

$$\lambda(r) = \frac{1}{(1-r)^\alpha}, \quad r \in [0, 1), \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

При $\alpha = 1$ очевидно, что условие Бляшке уже не является необходимым (см. [9], [10]). В последние десятилетия отмечен определенный прогресс в исследованиях свойств корневых множеств классов $A(\lambda)$. Основные результаты в указанном направлении изложены в работах [11]–[13]. Эти исследования посвящены, в основном, классам $A(\lambda)$ при $\lambda(r) = \ln(2/(1-r))$, $r \in [0, 1)$, и классам Бергмана. Методы, разработанные в этих статьях, не применимы даже для классов $A(\lambda)$ при $\lambda(r) = 1/((1-r)^\alpha)$, $\alpha > 0$, или $\lambda(r) = \exp\{\ln^\gamma 1/(1-r)\}$, $r \in [0, 1)$, $\gamma > 1$ (см. [13]).

Результаты этой работы были получены автором еще в начале 90-х годов прошлого столетия и впервые докладывались на Всесоюзной конференции по теории функций в Одессе (1991 г.), а также на международной конференции “Теория функций и ее приложения” (Ереван, 1995 г.) и анонсированы без доказательства в работе [14].

1. Формулировка и доказательство вспомогательных утверждений. Следующая теорема, установленная автором в работах [14], [15], играет существенную роль при доказательстве основного результата статьи.

ТЕОРЕМА А. Пусть λ – логарифмическая выпуклая функция на $[0, 1)$, т.е. функция $\lambda(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$, причем $\lambda(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow 1 - 0$. Тогда можно построить функцию $f \in A(\lambda)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$1) \lim_{r \rightarrow 1-0} \ln M(r, f)/\lambda(r) = 1,$$

$$2) \lim_{r \rightarrow 1-0} T(r, f)/\lambda(r) = 1,$$

$$3) \varliminf_{r \rightarrow 1-0} N(r, f)/\lambda(r) \geq 1/3,$$

где $M(r, f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$, $0 < r < 1$, $T(r, f)$ – характеристика Неванлинны функции f ,

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt,$$

$n(t, f)$ – число нулей функции f в круге $D_t = \{z : |z| \leq t\}$.

В дальнейшем нам потребуются следующие обозначения: $\mathbb{C}_+$ – верхняя полуплоскость; $C_\rho = \{z : z \in \mathbb{C}_+, |z| \geq \rho\}$; $C(\cdot)$ будем обозначать положительные константы, зависящие только от $\cdot$; $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$; если f – голоморфна в некоторой области G , т.е. $f \in H(G)$, то $Z_f = Z_f(G)$ – множество нулей функции f в G .

ЛЕММА 1. Пусть $f \in H(C_\rho)$, при этом f непрерывна вплоть до граничных точек $z = \pm\rho$; $f(z) \neq 0$ на полуокружности $|z| = \rho$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Предположим, что

$$\ln|f(z)| \leq C_f \varphi(|z|), \quad z \in C_\rho, \quad (1)$$

где φ – монотонно растущая положительная и непрерывная функция на $(0, +\infty)$. Тогда, если $\tilde{n}(R)$ – число мнимых нулей функции f на отрезке $[i\rho, iR]$, то

$$\tilde{n}(R) \leq \tilde{C}_f \left(\varphi(2R) + R \int_\rho^{2R} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta > 0$, $f_\eta(z) = f(z + i\eta)$. Очевидно, что f_η голоморфна на множестве $C_{\eta, \rho} = \{z : |z| \geq \rho, \operatorname{Im} z > -\eta\}$, поэтому по формуле Карлемана (см. [5; с. 19] или [6; с. 291]):

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \leq \tilde{r}_k \leq R} \left(\frac{1}{\tilde{r}_k} - \frac{\tilde{r}_k}{R^2} \right) \sin \tilde{\theta}_k &= \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \ln|f_\eta(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_\rho^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \ln|f(i\eta + t)| |f(i\eta - t)| dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e^{-i\theta}}{\rho} - \frac{\rho e^{i\theta}}{R^2} \right) \cdot \ln f(\rho e^{i\theta} + i\eta) \right] d\theta, \end{aligned}$$

$\tilde{z}_k = \tilde{r}_k e^{i\tilde{\theta}_k}$ – нули функции f_η в полукольце $K_{\rho, R} = \{z \in C_\rho : |z| < R\}$. Заметим, что все слагаемые в левой части равенства неотрицательны. Отсюда, учитывая неравенство (1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \leq \tilde{r}_k \leq R} \left(\frac{1}{\tilde{r}_k} - \frac{\tilde{r}_k}{R^2} \right) \sin \tilde{\theta}_k &\leq \frac{C_f}{R} \varphi(\eta + R) + \frac{C_f}{\pi} \int_\rho^R \frac{\varphi(\eta + t)}{t^2} dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e^{-i\theta}}{\rho} - \frac{\rho e^{i\theta}}{R^2} \right) \cdot \ln f(\rho e^{i\theta} + i\eta) \right] d\theta. \end{aligned}$$

В условиях леммы можно перейти к пределу при $\eta \rightarrow 0+$. В итоге мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \leq r_k \leq R} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} \right) \sin \theta_k &\leq C_f \frac{\varphi(R)}{R} + \frac{C_f}{\pi} \int_\rho^R \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{Im} \left[\left(\frac{e^{-i\theta}}{\rho} - \frac{\rho e^{i\theta}}{R^2} \right) \cdot \ln f(\rho e^{i\theta}) \right] d\theta, \quad (3) \end{aligned}$$

где $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ – нули функции f в $K_{\rho, R}$. Положив $\theta_k = \pi/2$, приходим к оценке

$$\sum_{\rho \leq r_k \leq R/2} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} \right) \leq \tilde{C}_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int_\rho^R \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right). \quad (4)$$

Поскольку

$$\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} = \frac{R^2 - r_k^2}{R^2 r_k} \geq \frac{3}{2R} \quad \text{при} \quad r_k \leq \frac{R}{2},$$

из (4) получаем

$$\frac{3}{2R} \tilde{n}\left(\frac{R}{2}\right) = \sum_{\rho \leq r_k \leq R/2} \frac{3}{2R} \leq \tilde{C}_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int_{\rho}^R \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right),$$

$$\tilde{n}(R) \leq C_0(f) \left(\varphi(2R) + R \int_{\rho}^{2R} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right),$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt < +\infty, \quad (5)$$

f — удовлетворяет условиям леммы 1, $f(iy_k) = 0$, $y_k \geq \rho$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \neq 0$, то

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{y_k} < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из условия (5), поскольку φ — монотонно растущая функция, следует, что

$$\sup_{R \in [1, +\infty)} \frac{\varphi(R)}{R} < +\infty.$$

Поэтому из условия $r_k \leq R/2$ имеем

$$\frac{r_k}{R^2} \leq \frac{1}{4r_k}.$$

Тогда из неравенства (4) получим

$$\sum_{\rho < r_k \leq R/2} \frac{1}{r_k} \leq \tilde{C}_f \left(\frac{\varphi(R)}{R} + \int_{\rho}^R \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right) \leq C(f).$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$, учитывая, что $y_k = r_k$, получим нужное утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\varphi(R) = R^{\alpha}$, то в условиях леммы 1 справедлива оценка

$$\tilde{n}(R) \leq C_f \begin{cases} R^{\alpha}, & \text{если } \alpha > 1, \\ R \ln R, & \text{если } \alpha = 1, \\ R, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из оценки (2).

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda \in C^2[0, 1)$, при этом $\psi(x) = \ln \lambda(1 - e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, удовлетворяет условиям: ψ -выпукла, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi'(x) = +\infty$ и существует такое $\delta \in (0, 1)$, что

$$\frac{\psi''(x)}{[\psi'(x)]^{2-\delta}} = O(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тогда если $f \in A(\lambda)$, $f \neq 0$, и если $\tilde{n}_f(r)$ — количество вещественных нулей функции f на отрезке $[0, r]$, $0 < r < 1$, то справедлива оценка

$$\tilde{n}_f(r) \leq C_f \lambda(r), \quad 0 < r < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$s(t) = \frac{1}{\pi\psi'(t)}, \quad t > 0, \quad \Omega = \{\zeta = t + i\tau : |\tau| < s(t)\}.$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\psi'(0) > 3$. Положим $F(\zeta) = f(1 - e^{-\zeta})$, $\zeta \in \Omega$. Докажем, что в условиях леммы справедлива оценка

$$\ln |F(t + i\tau)| \leq \tilde{C}_f \exp \psi(t), \quad \zeta = t + i\tau \in \Omega. \quad (6)$$

Действительно, на основании $f \in A(\lambda)$ имеем

$$\ln |F(t + i\tau)| = \ln |f(1 - e^{-t-i\tau})| \leq \tilde{C}_f \lambda(|1 - e^{-t-i\tau}|).$$

Докажем, что если $t + i\tau \in \Omega_{t_0}$, где $\Omega_{t_0} = \{t + i\tau \in \Omega : t \geq t_0\}$, t_0 – фиксированное достаточно большое положительное число, то при $C \geq 2$ справедлива оценка

$$|1 - e^{-t-i\tau}| \leq 1 - e^{-t-C\tau^2}. \quad (7)$$

Очевидно, что неравенство (7) эквивалентно оценке

$$1 - 2e^{-t} \cos \tau + e^{-2t} \leq 1 - 2e^{-t-C\tau^2} + e^{-2t-2C\tau^2},$$

что в свою очередь равносильно оценке

$$\cos \tau \geq e^{-C\tau^2} + e^{-t} \left(\frac{1 - e^{-2C\tau^2}}{2} \right).$$

Разлагая $\cos \tau$ и $e^{-C\tau^2}$ в ряд Тейлора, нетрудно убедиться, что последнее неравенство выполняется при всех $C \geq 2$, $t + i\tau \in \Omega_{t_0}$. Используя эту оценку и тот факт, что функция F ограничена на множестве $\Omega \setminus \Omega_{t_0}$, получим

$$\ln |F(t + i\tau)| \leq C_f \lambda(1 - e^{-t-C\tau^2}), \quad t + i\tau \in \Omega,$$

т.е. $\ln |F(t + i\tau)| \leq C_f e^{\psi(t+C\tau^2)}$. Положив $C = 3$ и учитывая $|\tau| < s(t)$, получим $\psi(t + 3\tau^2) \leq \psi(t + 3s^2(t))$. Докажем, что в условиях леммы

$$\psi(t + 3s^2(t)) = \psi(t) + o(1), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Пусть $\Delta = 3s^2(t)$, t – фиксированное число из $\mathbb{R}_+$. Тогда, применяя формулу Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\psi(t + \Delta) = \psi(t) + \psi'(t + \zeta)\Delta, \quad 0 \leq \zeta \leq \Delta.$$

Заметим теперь, что

$$\psi'(t + \zeta)\Delta = \psi'(t)\Delta \frac{\psi'(t + \zeta)}{\psi'(t)}.$$

Положим $\chi(t) = 1/\psi'(t)$. Снова применяя формулу Лагранжа, приходим к равенству

$$\frac{\psi'(t + \zeta)}{\psi'(t)} = \frac{\chi(t)}{\chi(t + \zeta)} = \frac{\chi(t)}{\chi(t) + \zeta\chi'(t + \tilde{\zeta})} = \frac{1}{1 + (\zeta\chi'(t + \tilde{\zeta}))/\chi(t)},$$

где $0 \leq \tilde{\zeta} \leq \zeta \leq \Delta$. Ввиду того, что

$$\chi'(t + \tilde{\zeta}) = -\frac{\psi''(t + \tilde{\zeta})}{\psi'(t + \tilde{\zeta})^2},$$

получаем

$$\frac{\zeta \chi'(t + \tilde{\zeta})}{\chi(t)} = -\frac{\zeta}{\chi(t)} \frac{\psi''(t + \tilde{\zeta})}{\psi'^2(t + \tilde{\zeta})} = o\left(\frac{\zeta}{\chi(t)}\right).$$

Но учитывая неравенство $0 \leq \zeta \leq \Delta \leq 1/(\psi'^2(t))$, приходим к оценке

$$\frac{\zeta}{\chi(t)} \leq \frac{\psi'(t)}{\psi'^2(t)} = \frac{1}{\psi'(t)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Используя указанное соотношение, получим (8). Следовательно, в Ω справедлива оценка

$$\ln|F(t + i\tau)| \leq \tilde{C}_f \exp \psi(t), \quad t + i\tau \in \Omega. \quad (9)$$

Пусть теперь $w = u + iv = Z_+(t + i\tau)$ отображает конформно

$$\Omega_+ = \{\zeta = t + i\tau : t > 0, 0 < \tau < s(t)\}$$

на

$$\Pi_+ = \left\{ w = u + iv : 0 < v < \frac{\pi}{2}, 0 < u < +\infty \right\},$$

$s(t) = 1/(\psi'(t)\pi)$, $t \geq 0$, причем таким образом, чтобы

$$Z_+\left(\frac{i}{\pi\psi'(0)}\right) = i\frac{\pi}{2}, \quad Z_+(0) = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} Z_+(\sigma) = +\infty.$$

По принципу симметрии Римана–Шварца $Z_+(\zeta)$ имеет аналитическое продолжение на всю полосу

$$\tilde{\Omega} = \{\zeta = t + i\tau : |\tau| < s(|t|), t \in \mathbb{R}\}.$$

Если указанное продолжение обозначить через $Z(\zeta)$, то $Z(\zeta)$ конформно отображает $\tilde{\Omega}$ на $\Pi = \{w = u + iv : |v| < \pi/2\}$.

Оценим вещественную часть $Z(t + i\tau)$. Исходя из теоремы Варшавского (см. [16]), где $s(t) = 1/(\pi\psi'(t))$, $t > 0$, $\psi(t) = \ln \lambda(1 - e^{-t})$, $t > 0$, получим

$$u = \operatorname{Re} Z(\sigma + i\tau) = \frac{\pi}{2} \int_0^\sigma \frac{dt}{s(t)} + o(1), \quad o(1) \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Из последнего равенства следует

$$u = \operatorname{Re} Z(\sigma + i\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\sigma \psi'(t) dt + o(1) = \frac{1}{2} \psi(\sigma) + O(1).$$

Заметив теперь, что $\operatorname{Im} Z(\sigma + i\tau) = O(1)$, получаем

$$\exp Z(\sigma + i\tau) = (1 + O(1)) \exp \frac{\psi(\sigma)}{2}, \quad \sigma > 0. \quad (10)$$

Очевидно, что все условия теоремы Варшавского выполняются, поскольку

$$\begin{aligned} \int^{+\infty} \frac{s'^2(t)}{s(t)} dt &= \frac{1}{\pi} \int^{+\infty} \frac{\psi''(t)^2}{\psi'^3(t)} dt = \frac{1}{\pi} \int^{+\infty} \frac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^{2-\delta}} \frac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^{1+\delta}} dt \\ &\leq C \int^{+\infty} \frac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^{1+\delta}} dt \leq C_1. \end{aligned}$$

Учитывая оценки (9) и (10), имеем

$$\ln|F(\sigma + i\tau)| \leq \tilde{c}_f |\exp 2Z(\sigma + i\tau)|. \quad (11)$$

Пусть теперь $Z^{-1}(u + iv)$ – обратное к Z отображение Π на $\tilde{\Omega}$. Тогда очевидно, что функция

$$G(z) = F\left(Z^{-1}\left(\ln z - \frac{i\pi}{2}\right)\right), \quad (12)$$

принадлежит множеству $H(C_\rho)$, где ρ – произвольное число, $\rho \geq 1$. Оценим функцию G в C_ρ . Ясно, что

$$\ln|G(x + iy)| = \ln\left|F\left(Z^{-1}\left(\ln z - \frac{i\pi}{2}\right)\right)\right| \leq c_f \left|\exp 2Z\left(Z^{-1}\left(\ln z - \frac{i\pi}{2}\right)\right)\right| \leq \tilde{c}_f |z|^2.$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $f(z) \neq 0$, $|z| < r_0$, где r_0 – произвольное фиксированное число из интервала $(0, 1)$. Учитывая также, что Z и Z^{-1} являются непрерывными вплоть до границ областей Ω и Π_+ соответственно, убедимся, что G удовлетворяет всем условиям леммы 1. Применяя следствие 2 леммы 1 при $\varphi(x) = x^2$, оценим количество нулей функции G . Согласно этому следствию, если $G(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $y_k \geq \rho$, то

$$\tilde{n}(R) = \{\text{card } y_k : \rho < y_k \leq R\} \leq c_1 R^2.$$

Теперь выясним связь между нулями функций G и f . Пусть $\{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность вещественных нулей функции f . Ввиду того, что

$$G(z) = f(1 - e^{-Z^{-1}(\ln z - i\pi/2)}), \quad z \in C_\rho, \quad (13)$$

имеем

$$G(iy_k) = f(1 - e^{-Z^{-1}(\ln y_k)}) = 0.$$

Поскольку $\{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – множество всех вещественных положительных нулей функции f , а $Z_+^{-1}(t) = Z^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, то $Z^{-1}(\ln y_k) = \ln(1/(1 - r_k))$, т.е.

$$\ln y_k = Z\left(\ln \frac{1}{1 - r_k}\right), \quad y_k = e^{Z(\ln(1/(1 - r_k)))}.$$

Учитывая лемму 1, имеем

$$\tilde{n}(R) = \{\text{card } y_k : \rho \leq y_k \leq R\} \leq cR^2$$

или

$$\tilde{n}(R) = \{\text{card } y_k : \ln \rho \leq \ln y_k \leq \ln R\} \leq cR^2.$$

Отсюда получаем

$$\left\{ \text{card } r_k : Z\left(\ln \frac{1}{1-r_k}\right) \leq \ln R \right\} \leq cR^2.$$

Учитывая, что функция $t \rightarrow Z_+(t)$ монотонно растёт на $\mathbb{R}_+$, из последней оценки выводим

$$\left\{ \text{card } r_k : \ln \frac{1}{1-r_k} \leq Z^{-1}(\ln R) \right\} \leq cR^2.$$

Положим

$$t = Z^{-1}(\ln R), \quad \ln R = Z(t), \quad R = e^{Z(t)},$$

т.е.

$$\left\{ \text{card } r_k : \ln \frac{1}{1-r_k} \leq t \right\} \leq ce^{2Z(t)},$$

или, используя оценку (10), получим

$$\{\text{card } r_k : r_k \leq 1 - e^{-t}\} \leq \tilde{c}e^{\psi(t)}, \quad t > 0.$$

Пусть $r = 1 - e^{-t}$, тогда

$$n_R(r) = \{\text{card } r_k : r_k \leq r\} \leq \tilde{c}\lambda(r).$$

Лемма 2 доказана.

Для изложения дальнейших вспомогательных результатов введём обозначения: пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $l = -2^k, -2^k + 1, \dots, 2^k$,

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^k} < |z| \leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{\pi l}{2^{k+1}} < \arg z \leq \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}.$$

Положим, как и прежде, $\psi(x) = \ln \lambda(1 - e^{-x}) \in C^1(0; +\infty)$. Следующая теорема установлена в работе автора [17].

ТЕОРЕМА Б. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi'(x) = \alpha_\lambda < +\infty$. Тогда

- 1) если $1 < \alpha_\lambda < +\infty$, то последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset D$ можно представить в виде $Z_f(D)$, $f \in A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $n_{k,l} = \{\text{card } z_m : z_m \in \Delta_{k,l}\}$ удовлетворяет оценке

$$n_{k,l} \leq c\varphi(2^k), \quad (14)$$

где $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $-2^k \leq l \leq 2^k - 1$, где $\varphi(x) = e^{\psi(\ln x)}$, $x > 1$;

- 2) если $0 < \alpha_\lambda < +\infty$, а последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{+\infty}$ удовлетворяет оценке (14), то при $\beta > \alpha_\lambda + 1$ бесконечное произведение Джэробашяна (см. [7]) $\pi_\beta(z, z_m)$ сходится равномерно внутри D , при этом $\pi_\beta(z, z_m) \in A(\lambda)$; здесь $\pi_\beta(z, z_m)$ определяется следующим образом:

$$\pi_\beta(z, z_m) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\frac{\beta+1}{\pi} \int_D \frac{\ln|1 - \frac{\zeta}{z_k}|(1 - |\zeta|^2)^\beta}{(1 - \bar{\zeta}z)^\beta} dm_2(\zeta)\right),$$

где m_2 — мера Лебега на D .

Следующее утверждение установлено в работе [18] (см. также [19; с. 35]).

ТЕОРЕМА В. Пусть φ – положительная измеримая функция на $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, φ ограничена на каждом отрезке $[0, a]$, $a > 0$. Тогда для данного $K > 1$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $x_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$, такая, что

$$\varphi(x) < K\varphi(x_n) \quad (15)$$

при всех x удовлетворяющих оценке

$$x_n \leq x \leq x_n + \frac{1}{[\ln^+ \varphi(x_n)]^K} + \frac{1}{\varphi(x_n)}.$$

2. Формулировка и доказательство основных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ – монотонно растущая и непрерывная функция на $[0, 1)$, причем $\lambda(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$, $\psi(x) = \ln \lambda(1 - e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, при этом существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi'(x) = \alpha_\lambda$. Если $\alpha_\lambda = +\infty$, то будем предполагать, что ψ – выпуклая функция из $C^2(\mathbb{R}_+)$ и существует $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$\frac{\psi''(x)}{(\psi'(x))^{2-\delta}} = O(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тогда существуют функция $f \in A(\lambda)$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ такие, что $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $f(z) \neq 0$, $z \neq z_k$, в то же время для произвольной $g \in A(\lambda)$ удовлетворяющей условию $g(|z_k|) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$, выполнено $g(z) = 0$, $z \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $\alpha_\lambda = +\infty$. Пусть f и $N(r, f) = N(r)$ – функции, построенные в теореме А. Положим

$$\varphi(x) = \frac{N'_+(1 - e^{-x})e^{-x}}{N(1 - e^{-x})}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где N'_+ – правая производная функции N . Очевидно, что $N'_+ = n(r)/r$, $r \in (0, 1)$, где $n(r) = \{\text{card } z_m : |z_m| \leq r\}$. Пусть далее $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность из $\mathbb{R}_+$, построенная в теореме В. Применяя эту теорему, имеем

$$\varphi(x) < K\varphi(x_n), \quad (16)$$

при

$$x_n \leq x \leq x_n + \frac{1}{[\ln^+ \varphi(x_n)]^K} + \frac{1}{\varphi(x_n)}.$$

Учитывая эту оценку и равенство

$$\ln \frac{N(1 - e^{-x'_n})}{N(1 - e^{-x_n})} = \int_{x_n}^{x'_n} \frac{N'_+(1 - e^{-t})e^{-t}}{N(1 - e^{-t})} dt, \quad \text{где } x'_n = x_n + \frac{1}{\varphi(x_n)},$$

получим

$$\ln \frac{N(1 - e^{-x'_n})}{N(1 - e^{-x_n})} \leq K\varphi(x_n)(x'_n - x_n) = K, \quad (17)$$

т.е.

$$N(1 - e^{-x'_n}) < e^K N(1 - e^{-x_n}). \quad (18)$$

Теперь, учитывая, что ψ – выпуклая функция на $\mathbb{R}_+$, получаем

$$\lambda'(1 - e^{-x_n})e^{-x_n} \leq \frac{1}{x'_n - x_n} \int_{x_n}^{x'_n} \lambda'(1 - e^{-t})e^{-t} dt,$$

отсюда

$$\lambda'(1 - e^{-x_n})e^{-x_n} \leq \frac{1}{x'_n - x_n} (\lambda(1 - e^{-x'_n}) - \lambda(1 - e^{-x_n})) < \frac{1}{x'_n - x_n} \lambda(1 - e^{-x'_n}).$$

В свою очередь

$$\frac{1}{x'_n - x_n} \lambda(1 - e^{-x'_n}) = \varphi(x_n) \lambda(1 - e^{-x'_n}).$$

Используя теорему А, получим

$$\varphi(x_n) \lambda(1 - e^{-x'_n}) \leq c\varphi(x_n)N(1 - e^{-x'_n}).$$

Учтем теперь оценку (18), тогда $\lambda'(1 - e^{-x_n})e^{-x_n} \leq ce^K \varphi(x_n)N(1 - e^{-x_n})$, т.е.

$$\lambda'(1 - e^{-x_n})e^{-x_n} \leq ce^K \frac{N'_+(1 - e^{-x_n})e^{-x_n}}{N(1 - e^{-x_n})} \cdot N(1 - e^{-x_n}),$$

или $\lambda'(1 - e^{-x_n}) \leq ce^K N'_+(1 - e^{-x_n})$. Положив $r_n = 1 - e^{-x_n}$, получим

$$\lambda'(r_n) \leq ce^K N'_+(r_n). \quad (19)$$

Теперь, учитывая лемму 2, имеем: если $g \in A(\lambda)$, то количество вещественных нулей $\tilde{n}(r, g)$ функции g на отрезке $[0, r]$ удовлетворяет оценке $\tilde{n}(r, g) \leq c_g \lambda(r)$, $r \in (0, 1)$. Из последней оценки и из (19) следует, что если $g(|z_k|) = 0$, $r_k = |z_k|$, $k = 1, 2, \dots$, то $\lambda'(r_n) \leq c(k)n(r_n)$, при этом $\tilde{n}(r_n, g) \leq c\lambda(r_n)$. Поэтому

$$\frac{\lambda'(r_n)}{\lambda(r_n)} \leq c(K), \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Очевидно, что $r_n \rightarrow 1 - 0$, когда $n \rightarrow +\infty$. Поэтому оценка (20) противоречит условию теоремы. Таким образом, теорема доказана при $\alpha_\lambda = +\infty$.

Приступим к доказательству теоремы при $0 \leq \alpha_\lambda < +\infty$.

Случай $1 < \alpha_\lambda < +\infty$ непосредственно следует из теоремы Б. Действительно, пусть $\{z_m\}_{m=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность из D такая, что

$$\{\text{card } z_m : z_m \in \Delta_{k,l}\} = [\varphi(2^k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad l = -2^k, \dots, 2^k - 1,$$

где $[a]$ – целая часть числа a , $a \in \mathbb{R}_+$. Тогда по теореме Б можно построить функцию f (в частности, $f(z) = \pi_\beta(z)$, $\beta > \alpha_\lambda + 1$) такую, что $f(z_m) = 0$, $m = 1, 2, \dots$, $f(z) \neq 0$, $z \neq z_m$, $f \in A(\lambda)$. Тогда, если $r_k = |z_k|$, $k = 1, 2, \dots$, и $\tilde{n}_{k,0} = \{\text{card } r_m : r_m \in \Delta_{k,0}\}$, то $\tilde{n}_{k,0} \geq c_0 2^k [\varphi(2^k)] > c_1 \varphi(2^k) 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Если $g \in A(\lambda)$ и $g(r_k) = 0$, то по теореме Б $g(z) = 0$ для всех $z \in D$. При $0 \leq \alpha_\lambda < 1$ доказательство непосредственно следует из теоремы А и вышеуказанного результата Шапиро и Шильдса (см. [8]). Но поскольку доказательства теоремы в указанном случае и в случае $\alpha_\lambda = 1$ ничем не отличаются, то мы проведем доказательство одновременно при всех $0 < \alpha_\lambda \leq 1$. Пусть снова $F(\zeta) = f(1 - e^{-\zeta})$, $\zeta \in \Omega_\delta$, $\Omega_\delta = \{\zeta = \sigma + it : |t| < (\pi/2)(1 - \delta)\}$,

где $\sigma > \ln(2/\delta)$, δ – произвольное число из $(0, 1)$. При этом нетрудно доказать, что $F \in H(\Omega_\delta)$. В этой области, так как $0 \leq \alpha_\lambda < +\infty$, то справедлива оценка

$$\ln|F(\sigma + it)| \leq C_{f,\delta} \varphi(e^\sigma), \quad (21)$$

где φ определяется как и выше. Положим

$$G(z) = F((1 - \delta) \ln z) = f\left(1 - \frac{1}{z^{1-\delta}}\right),$$

где выбрана главная ветвь логарифма. Из (21) следует

$$\ln|G(x + iy)| \leq C_\delta \varphi(|z|^\gamma), \quad z \in C_{R_0}, \quad (22)$$

где $\gamma = 1 - \delta$, $C_{R_0} = \{z : |z| \geq R_0, -\pi/2 < \arg z < \pi/2\}$, $R_0 = (2/\delta)^{1/(1-\delta)}$. Применяя лемму 1 к функции $\tilde{G}(z) = G(-iz)$, $z \in \mathbb{C}_+$, $|z| \geq R_0$, получаем

$$\tilde{n}(R) \leq c \left\{ \varphi((2R)^\gamma) + R \int_{R_0}^{2R} \frac{\varphi(t^\gamma)}{t^2} dt \right\},$$

где, как и выше, $\tilde{n}(R)$ – число вещественных нулей функции G на отрезке $[R_0, R]$. Пусть далее $G(\rho_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, тогда $G(\rho_k) = f(1 - 1/\rho_k^{1-\delta}) = 0$, следовательно, если $f(r_k) = 0$, то $\rho_k = 1/(1 - r_k)^{1/(1-\delta)}$. Имеем

$$\tilde{n}(R) = \{\text{card } \rho_k : R_0 \leq \rho_k \leq R\} \leq c \left\{ \varphi(R^\gamma) + R \int_{R_0}^{2R} \frac{\varphi(t^\gamma)}{t^2} dt \right\}.$$

Ввиду того, что в круге

$$D_{r_0} = \{z : |z| \leq r_0\}, \quad r_0 = 1 - \frac{1}{R_0^{1-\delta}},$$

существует только конечное число нулей функции f , из последней оценки выводим

$$\tilde{n}(R) = \left\{ \text{card } r_k : \frac{1}{(1 - r_k)^{1/(1-\delta)}} \leq R \right\} \leq c \left\{ \varphi(R^\gamma) + R \int_{R_0}^{2R} \frac{\varphi(t^\gamma)}{t^2} dt \right\}.$$

Отсюда, положив $r = 1 - 1/R^{1-\delta}$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r) &= \{\text{card } r_k : r_k \leq r\} \\ &\leq c \left\{ \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right) + \frac{1}{(1-r)^{1/(1-\delta)}} \int_{R_0}^{1/(1-r)} \frac{\varphi(u)}{u^{(2-\delta)/(1-\delta)}} du \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\tilde{n}(r)$ – количество вещественных нулей функции $f \in A(\lambda)$ на отрезке $[0, r]$. Теперь учтем, что

для любого $\varepsilon > 0$ существует $u_0(\varepsilon)$ такое, что при $u > u_0$ $\varphi(u) \leq C_\varepsilon u^{\alpha_\lambda + \varepsilon}$.

Предполагаем, что $0 < \varepsilon < \delta/(1 - \delta) < \alpha_\lambda/2$. Тогда интеграл в неравенстве (23) будет ограничен при всех $0 < r < 1$, поскольку $0 < \alpha_\lambda \leq 1$. Поэтому из (22) и (23) получим оценку

$$\tilde{n}(r) \leq \frac{C_f}{(1-r)^{1/(1-\delta)}} \quad \text{для всех } f \in A(\lambda). \quad (24)$$

Снова используем теорему Б. Выберем функцию $f \in A(\lambda)$, $\{z_m\}_{m=1}^{+\infty}$, $f(z_m) = 0$, $m = 1, 2, \dots$, $f(z) \not\equiv 0$, таким образом, чтобы в каждом криволинейном квадрате $\Delta_{k,l}$ количество точек $\{z_m\}$ равнялось $[\varphi(2^k)]$, т.е. $n_{k,l} = [\varphi(2^k)]$, $-2^k \leq l \leq 2^{k-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда после кругового проектирования множества $\{z_m\}$ на $[0, 1)$ получим: $\tilde{n}(r) = \{\text{card } r_k : r_k = |z_k|, r_k \leq r\}$, $0 \leq r < 1$, или при $\rho_k = 1 - 1/2^k$,

$$\tilde{n}(\rho_k) \geq n_{k,0} \geq c_0 \varphi(2^k) 2^k \geq c_1 2^{k(\alpha_\lambda - \varepsilon + 1)}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались оценкой $\varphi(u) \geq c_1(\varepsilon) u^{\alpha_\lambda - \varepsilon}$ при $u \geq u_1(\varepsilon)$. Положив в оценке (24) $r = \rho_k$, будем иметь $\tilde{n}(\rho_k) \leq c_f 2^{k/(1-\delta)}$. Из этих оценок выводим, что если $g \in A(\lambda)$, $g(r_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$2^{k/(1-\delta)} \geq c_1 2^{k(\alpha_\lambda - \varepsilon + 1)}, \quad k \geq k_0.$$

Очевидно, что при таких соотношениях между α_λ , ε , δ такая оценка невозможна. Поэтому $g(z) = 0$ для всех $z \in D$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно проверить, что мажоранты вида

$$\lambda(r) = \frac{1}{(1-r)^\alpha}, \quad \lambda_n(r) = \overbrace{\exp \dots \exp}^n \frac{1}{(1-r)^\alpha}, \quad r \in [0, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяют всем условиям теоремы, поэтому условия теоремы 1 накладывают ограничения только на регулярность роста мажоранты.

Из теоремы 1 и теоремы 2 работы [4] следует интересное, на наш взгляд, утверждение. Хорошо известно, что *классом функций ограниченного вида* или *классом Неванлинны* называется класс мероморфных в D функций, для которых $\sup_{0 < r < 1} T(r, f) < +\infty$. По теореме Неванлинны–Смирнова каждую функцию $f \in \mathbb{N}$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}, \quad z \in D, \quad h_j \in H^\infty(D), \quad j = 1, 2.$$

Пусть λ – монотонно растущая положительная функция на $[0, 1)$, $\lambda(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 1 - 0$. Обозначим через $M(\lambda)$ класс мероморфных в D функций f , для которых $T(r, f) \leq c_f \lambda(r)$, $r \in [0, 1)$. Естественно, возникает вопрос: верен ли аналог вышеуказанного утверждения для классов $M(\lambda)$ и $A(\lambda)$? Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ удовлетворяет условиям теоремы 1, $0 < \alpha_\lambda < +\infty$. Тогда существует функция $f \in M(\lambda)$ такая, что ни при каких $h_j \in A(\lambda)$, $j = 1, 2$, невозможно представление

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}, \quad z \in D.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в случае мероморфных функций в конечной плоскости имеет место совершенно иная картина: любую мероморфную функцию с оценкой $T(r, f) \leq c_f r^\rho$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, можно представить в виде отношения двух целых функций порядка ρ нормального типа (см. [5; гл. 2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции*, Гостехиздат, М., 1941.
- [2] М. М. Джрбашян, “Теория факторизации функций, мероморфных в круге”, *Матем. сб.*, **79**:4 (1969), 517–615.
- [3] Ф. А. Шамоян, “Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:6 (1999), 1422–1440.
- [4] F. A. Shamoyan, E. N. Shubabko, “Parametrical representations of some classes of holomorphic functions in the disc”, *Complex Analysis, Operators, and Related Topics*, Oper. Theory Adv. Appl., **113**, Birkhäuser, Basel, 2000, 331–338.
- [5] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970.
- [6] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [7] М. М. Джрбашян, “К проблеме представимости аналитических функций”, *Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР*, **2** (1948), 3–40.
- [8] H. S. Shapiro, A. L. Shields, “On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related functions spaces”, *Math. Z.*, **80**:1 (1962), 217–229.
- [9] Ф. А. Шамоян, “О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи его границы”, *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **18**:1 (1983), 15–27.
- [10] A. E. Djrbashyan, F. A. Shamoyan, *Topics in the Theory of A_α^p Spaces*, Teubner-Texte Math., **105**, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1988.
- [11] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Grad. Texts in Math., **199**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [12] K. Seip, “Beurling type density theorems in the unit disk”, *Invent. Math.*, **113**:1 (1993), 21–39.
- [13] K. Seip, “An extension of the Blaschke condition”, *J. London Math. Soc.* (2), **51**:3 (1995), 545–558.
- [14] F. A. Shamoyan, “On some properties of zero sets of analytic functions with a given majorant”, *Theory of Functions and Applications*, Yerevan Publ. House, Yerevan, 1995, 169–171.
- [15] Ф. А. Шамоян, “Построение аналитических в круге функций с заданными асимптотическими свойствами”, *Вестн. БГУ. Сер. естеств. науки*, 2006, № 4, 222–233.
- [16] С. О. Варшавский, “О конформных отображениях бесконечных полос”, *Математика. Сб. пер.*, **2**, 4, 1958, 66–116.
- [17] Ф. А. Шамоян, “Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка”, *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **13**:5–6 (1978), 405–422.
- [18] W. K. Hayman, F. M. Stewart, “Real inequalities with applications to function theory”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50** (1954), 250–260.
- [19] У. К. Хейман, *Мероморфные функции*, Мир, М., 1966.

Ф. А. Шамоян

Брянский государственный университет

E-mail: shamoyanfa@yandex.ru

Поступило

23.01.2007

Исправленный вариант

28.04.2008