Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Агафонова, С. С. Волосивец, Мультипликаторы сходимости по норме рядов по мультипликативным системам, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 483–494

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4017>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:31:15

Мультипликаторы сходимости по норме рядов по мультипликативным системам

Н. Ю. Агафонова, С. С. Волосивец

Доказаны аналоги критериев Теляковского и Почуева об мультипликаторах равномерной сходимости и сходимости в интегральной метрике для мультипликативных систем с ограниченной образующей последовательностью.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел такая, что $2 \leq p_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$, и пусть $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \cdots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \quad (1)$$

Это разложение единственно, если для $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Каждое число $k \in \mathbb{Z}_+$ представимо единственным образом в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}_j. \quad (2)$$

Если даны $x \in [0, 1)$ с разложением (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложением (2), то по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)\right).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0, 1)$ (см. [1; глава 1, § 1.5]). При $p_n \equiv 2$ $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ совпадает с системой Уолша, при $p_n = q$ она называется системой Крестенсона–Леви, а в общем случае такие системы рассматривались Прайсом (см. [2; глава 3, § 1]). Коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L[0, 1)$ по этой системе задаются формулой

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_n(t)} dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а частичная сумма Фурье есть

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \chi_k(x).$$

Если $x, y \in [0, 1)$ представлены в виде (1), то по определению

$$x \oplus y := z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}, \quad z_j \in \mathbb{Z}_j, \quad z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}.$$

Аналогично определяется $x \ominus y$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется *мультипликативной*, что связано со следующим свойством: $\chi_n(x \oplus y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $x \in [0, 1)$ при фиксированном $y \in [0, 1)$. Аналогичное свойство верно для $\chi_n(x \ominus y)$ (см. [1; гл. 1, § 1.5]). Для $f, g \in L[0, 1)$ свертка этих функций $f * g$ определяется формулой

$$f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t)g(t) dt.$$

Ясно, что

$$S_n(f)(x) = D_n * f(x), \quad \text{где} \quad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x).$$

Пусть

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1)} |f(x)|.$$

Пространство $L_p[0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из измеримых на $[0, 1)$ функций таких, что $\|f\|_p < \infty$, пространство $MC[0, 1)$ состоит из ограниченных функций $f(x)$, для которых $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_{\infty} = 0$. При $p = \infty$ вместо $L_{\infty}[0, 1)$ пишем $B[0, 1)$. Рассмотрим также классы

$$L_N[0, 1) = \{f \in L[0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_1 = 0\},$$

$$MC_N[0, 1) = \{f \in MC[0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_{\infty} = 0\}.$$

Класс $B_N[0, 1)$ состоит из $f \in B[0, 1)$, для которых $\|S_n(f)\|_{\infty}$ ограничены. Для $1 < p < \infty$ классы $L_{pN}[0, 1)$ совпадают с пространствами $L_p[0, 1)$ (см. [3]) и отдельно не изучаются.

Пусть $I_n(x)$ – полуинтервал вида $[k/m_n, (k+1)/m_n)$, $0 \leq k < m_n$, содержащий x . Введем для $f \in L[0, 1)$ $\mathbf{P}$ -ичную максимальную функцию равенством

$$f^*(x) = \sup_{n \geq 0} \left| \int_{I_n(x)} f(t) dt \right|.$$

Если $f^* \in L[0, 1)$, то f принадлежит пространству Харди $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ с нормой $\|f\|_H = \|f^*\|_1$. Известно, что если $X = L_p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $MC[0, 1)$, $H(\mathbf{P}, [0, 1)$, $f \in X$, $g \in L[0, 1)$, то $f * g \in X$ и при этом $\|f * g\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_1$ (в случае $p_n \equiv 2$ см. [4; п. 4.4, лемма 1], в общем случае доказательство аналогично). Пространство $H_N[0, 1)$ определяется так же, как $L_N[0, 1)$.

Пусть

$$W_n = \{f \in L[0, 1) : \widehat{f}(k) = 0, k \geq n\}, \quad E_n(f)_p = \inf\{\|f - w_n\|_p : w_n \in W_n\},$$

$$\omega_n(f)_p = \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогично определяются $E_n(f)_H$ и $\omega_n(f)_H$. Для убывающей к нулю последовательности $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ и $1 \leq p < \infty$ по определению

$$H_p^\omega = \{f \in L_p[0, 1) : \omega_n(f)_p \leq C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

При $p = \infty$ рассматриваем $MC[0, 1)$ вместо $B[0, 1)$ и пишем далее H^ω вместо H_∞^ω и $\omega_n(f)$ вместо $\omega_n(f)_\infty$. Наконец,

$$H_{h1}^\omega = \{f \in H(\mathbf{P}, [0, 1)) : \omega_n(f)_H \leq C\omega_n\}.$$

Пространства h_p^ω получаются из H_p^ω заменой условия $\omega_n(f)_p \leq C\omega_n$ на $\omega_n(f)_p = o(\omega_n)$, аналогично вводятся h^ω . Известно неравенство Ефимова (см. [1; гл. 10, § 10.5])

$$E_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega_n(f)_p \leq 2E_{m_n}(f)_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3)$$

Его аналог верен и в $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ (см. [5]). В частности, для $f \in X = L_p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $MC[0, 1)$, $H(\mathbf{P}, [0, 1))$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_{m_n}(f)\|_X = 0.$$

Пусть $X[0, 1)$ и $Y[0, 1)$ – банаховы пространства, вложенные в $L[0, 1)$. Будем писать $\{\lambda_n\} \in (X, Y)$, если для любой функции $f \in X[0, 1)$ ряд $\sum_{n=0}^\infty \lambda_n \widehat{f}(n) \chi_n(x)$ является рядом Фурье функции $g \in Y[0, 1)$. Основной целью работы является изучение пространств (X, Y) , где $X = H^\omega$, H_1^ω , H_{h1}^ω , h^ω , h_1^ω , а $Y = MC_N[0, 1)$ или $Y = L_N[0, 1)$. Чтобы получить критерий для $\{\lambda_n\} \in (X, Y)$, следуя ДеВору [6] и Теляковскому [7], [8], будем считать, что $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ берутся из некоторого достаточно известного класса. Так, в теоремах 1 и 1' это будут коэффициенты Фурье–Стилтьеса, в теоремах 2 и 2' будут рассматриваться коэффициенты Фурье ограниченных функций, а в теоремах 3 и 4 – квазивыпуклые коэффициенты. Отметим, что теоремы 1, 1', 2, 2' принадлежат первому из авторов, второму же принадлежит постановка задач и теоремы 3 и 4. Авторы выражают признательность рецензенту, замечания которого привели их к выводу, что теоремы 1 и 1' верны не только для ограниченных $\mathbf{P}$.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 (см. [1; глава 1, § 1.5]). Для любого $n \in \mathbb{N}$ верны соотношения

$$D_{m_n}(x) = m_n X_{[0, 1/m_n)} \quad \text{и} \quad |D_n(x)| \leq \min\left(n, \frac{C}{x}\right),$$

где X_E – характеристическая функция множества E . В частности, $\|D_{m_n}\|_1 = 1$.

ЛЕММА 2 (см. [1; глава 1, § 1.5]). Пусть $f(x) \in W_{m_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$; тогда $f(x)$ постоянна на всех $I_k^{(n)} := [(k-1)/m_n, k/m_n)$, $1 \leq k \leq m_n$. Обратно, если $f(x)$ постоянна на всех $I_k^{(n)}$, $1 \leq k \leq m_n$, при фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$, то $f(x) \in W_{m_n}$.

ЛЕММА 3 (см. [2; глава 4, § 10]). Пусть $\mathbf{P}$ – ограниченная последовательность и $K_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^n D_k(x)$. Тогда нормы $\|K_n\|_1$ ограничены.

3. Мультипликаторы равномерной сходимости. Для дальнейшего введем обозначения

$$\Lambda_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \chi_k(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_k = \omega_n, \quad m_n \leq k < m_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$S_{m_n}^{(\lambda)}(f)(t) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \lambda_k \hat{f}(k) \chi_k(t),$$

а также обозначим $\ominus t = 0 \ominus t$. Первый из результатов работы является аналогом теоремы Теляковского [7].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность коэффициентов Фурье–Стилтьеса борелевской меры $d\mu$ по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, т.е. $\lambda_n = \int_0^1 \overline{\chi_n(t)} d\mu(t)$. Тогда $\{\lambda_n\} \in (H^\omega, MC_N)$ в том и только том случае, когда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k \|\Lambda_k\|_1 = 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $f \in H^\omega$. По условию имеем

$$S_{m_n}^{(\lambda)}(f)(x) = \int_0^1 S_{m_n}(f)(x \ominus t) d\mu(t),$$

откуда

$$\|S_{m_n}^{(\lambda)}(f) - S_{m_k}^{(\lambda)}(f)\|_\infty \leq \|S_{m_n}(f) - S_{m_k}(f)\|_\infty \int_0^1 |d\mu(t)|, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из $f \in MC[0, 1)$ и сходимости $S_{m_n}(f)$ к f в $MC[0, 1)$ следует фундаментальность $S_{m_n}(f)$, а из полученного неравенства выводим фундаментальность $S_{m_n}^{(\lambda)}(f)$, т.е. $S_{m_n}^{(\lambda)}(f)$ равномерно сходится к некоторой $F \in MC[0, 1)$. Легко видеть, что

$$\hat{F}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_{m_n}^{(\lambda)}(f)(k) = \lambda_k \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Мы показали, что $\{\lambda_n\} \in (MC, MC)$. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - S_n(F)\|_\infty = 0.$$

Пусть $m_k \leq n < m_{k+1}$. Запишем

$$S_n(F) = S_{m_k}(F) + f * (D_n - D_{m_k}) * \Lambda_n = S_{m_k}(F) + (f - f * D_{m_k}) * \Lambda_n. \quad (5)$$

Согласно неравенству Ефимова (3)

$$\|F - S_n(F)\|_\infty \leq \|F - S_{m_k}(F)\|_\infty + \|f - S_{m_k}(f)\|_\infty \|\Lambda_n\|_1 \leq \omega_k(F) + C\varphi_n \|\Lambda_n\|_1.$$

В силу условия теоремы и $F \in MC[0, 1)$ последнее выражение стремится к нулю.

Необходимость. Пусть $\{\lambda_n\} \in (H^\omega, MC_N)$, но условие (4) не выполнено. Тогда существует подпоследовательность $j_k \in \mathbb{N}$ со свойствами

$$\begin{aligned} 1) \quad j_k &\geq N j_{k-1}, & 2) \quad \varphi_{j_k} &\leq \frac{\varphi_{j_{k-1}}}{2}, & 3) \quad \varphi_{j_k} \|\Lambda_{j_k}\|_1 &\geq \varepsilon, \\ 4) \quad \varphi_{j_k} (\|\Lambda_{m_{n(k)+1}}\|_1 + \|\Lambda_{j_{k-1}}\|_1) &\leq k^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $m_{n(k)} \leq j_k < m_{n(k)+1}$, $k \geq 2$, $\varepsilon > 0$. Из условия 1) в (6) следует, что разным j_k соответствуют разные $n(k)$. Положим по определению

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{j_k} D_{m_{n(k)+1}} * \text{sign}(\Lambda_{j_k})(\ominus x),$$

где $\text{sign}(z) = z/|z|$ при $z \neq 0$ и $\text{sign}(0) = 0$. В силу леммы 2 при $h \in [0, 1/m_{n(k)+1})$ имеем

$$\Phi_i(x \oplus h) - \Phi_i(x) \equiv 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Если $n(k) < n \leq n(k+1)$, то, используя свойство 2) из (6), имеем при $h \in [0, 1/m_n)$

$$\begin{aligned} |\Phi(x \oplus h) - \Phi(x)| &= \sum_{i=k+1}^{\infty} 2\|\Phi_i\|_\infty \\ &\leq 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_{j_i} \|D_{m_{n(i)+1}}\|_1 \|\text{sign}(\Lambda_{j_i})\|_\infty \\ &= 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_{j_i} \leq 4\varphi_{j_{k+1}} \leq 4\omega_{n(k+1)} \leq 4\omega_n. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi \in H^\omega$. Покажем, что $S_{j_k}(\Phi_\lambda)(0) - S_{m_{n(k-1)+1}}(\Phi_\lambda)(0)$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, где $\widehat{\Phi}_\lambda(k) = \widehat{\Phi}(k)\lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (выше показано, что $\Phi_\lambda \in MC[0, 1)$). В силу ортонормированности $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ получаем

$$\begin{aligned} &|S_{j_k}(\Phi_\lambda)(0) - S_{m_{n(k-1)+1}}(\Phi_\lambda)(0)| \\ &= \left| \int_0^1 \Phi(\ominus t)(\Lambda_{j_k}(t) - \Lambda_{m_{n(k-1)+1}}(t)) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \sum_{i=k}^{\infty} \Phi_i(\ominus t)(\Lambda_{j_k}(t) - \Lambda_{m_{n(k-1)+1}}(t)) dt \right| \\ &\geq \left| \int_0^1 \Phi_k(\ominus t)\Lambda_{j_k}(t) dt \right| \\ &\quad - \int_0^1 \sum_{i=k+1}^{\infty} |\Phi_i(\ominus t)| |\Lambda_{j_k}(t)| dt - \int_0^1 \sum_{i=k}^{\infty} |\Phi_i(\ominus t)| |\Lambda_{m_{n(k-1)+1}}(t)| dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Первый интеграл из правой части (7) оценим согласно свойству 3) из (6):

$$\varphi_{j_k} \int_0^1 (D_{m_{n(k)+1}} * \text{sign}(\Lambda_{j_k}))(t) \Lambda_{j_k}(t) dt = \varphi_{j_k} \int_0^1 \text{sign}(\Lambda_{j_k})(t) \Lambda_{j_k}(t) dt = \varphi_{j_k} \|\Lambda_{j_k}\|_1 \geq \varepsilon.$$

Здесь использовано то, что $\Lambda_{j_k} \in W_{m_{n(k)+1}}$, поэтому $\text{sign}(\Lambda_{j_k})$ постоянна на полуинтервалах $[(l-1)/m_{n(k)+1}, l/m_{n(k)+1}]$, $1 \leq l \leq m_{n(k)+1}$, и по лемме 2 $\text{sign}(\Lambda_{j_k}) \in W_{m_{n(k)+1}}$. Как отмечено выше, $\|\Phi_i\|_\infty \leq \varphi_{j_i}$, поэтому второе слагаемое из правой части (7) не превосходит по модулю

$$\int_0^1 \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_{j_i} |\Lambda_{j_k}(t)| dt \leq \|\Lambda_{j_k}\|_1 \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_{j_i} \leq 2\|\Lambda_{j_k}\|_1 \varphi_{j_{k+1}} \leq \frac{2}{k+1}$$

согласно свойствам 3) и 4) из (6). Наконец, третье слагаемое не превосходит по модулю

$$\int_0^1 \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_{j_i} |\Lambda_{m_{n(k-1)+1}}(t)| dt \leq 2\varphi_{j_k} \|\Lambda_{m_{n(k-1)+1}\|_1 \leq \frac{2}{k}.$$

Из этих соотношений видно, что $|S_{j_k}(\Phi_\lambda)(0) - S_{m_{n(k-1)+1}}(\Phi_\lambda)(0)|$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Противоречие с условием. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность коэффициентов Фурье–Стилтьеса борелевской меры $d\mu$ по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$. Тогда любое из трех условий

$$\{\lambda_n\} \in (h^\omega, MC_N), \quad \{\lambda_n\} \in (H^\omega, B_N), \quad \{\lambda_n\} \in (h^\omega, B_N)$$

равносильно условию

$$\varphi_k \|\Lambda_k\|_1 = O(1). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно доказательству теоремы 1 из условия на $\{\lambda_n\}$ и $f \in MC[0, 1)$ следует существование $F \in MC[0, 1)$ такой, что $\hat{F}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$. Другой подход к доказательству того, что $\{\lambda_n\} \in (B, B)$, см. в [9] при $p_n \equiv 2$. Затем с помощью (5) и неравенства

$$\|f * D_{m_n}\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|D_{m_n}\|_1 = \|f\|_\infty$$

доказываем достаточность условия (8) во всех трех случаях. Пусть теперь $\{\lambda_n\} \in (H^\omega, B_N)$ или $\{\lambda_n\} \in (h^\omega, B_N)$, но $\varphi_k \|\Lambda_k\|_1 \neq O(1)$. Тогда существует последовательность $j_k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая свойствам 1), 2) и 4) из (6), а также свойству

$$3') \quad \varphi_{j_k} \|\Lambda_{j_k}\|_1 \geq k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Определим $\Phi_k(x)$ так же, как в доказательстве теоремы 1. В случае $\{\lambda_n\} \in (H^\omega, B_N)$ рассмотрим $\Phi(x) = \sum_{k=1}^\infty \Phi_k(x)$, а в случае $\{\lambda_n\} \in (h^\omega, B_N)$ определим

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\Phi_k(x)}{k}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 при $h \in [0, 1/m_n)$, $n(k) < n \leq n(k+1)$, имеем

$$\begin{aligned} & |\Psi(x \oplus h) - \Psi(x)| \\ & \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} i^{-1} |\Phi_i(x \oplus h) - \Phi(x)| \\ & \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2 \|\Phi_i\|_{\infty} i^{-1} \leq 2(k+1)^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_{j_i} \|\text{sign}(\Lambda_{j_i})\|_{\infty} \leq \frac{4\varphi_{j_{k+1}}}{k+1} \leq \frac{4\omega_n}{k+1}, \end{aligned}$$

откуда $\Psi \in h^{\omega}$. Согласно доказательству теоремы 1 $\Phi \in H^{\omega}$. Далее, расходимость разности $S_{j_k}(\Phi_{\lambda})(0) - S_{m_{n(k-1)+1}}(\Phi_{\lambda})(0)$ к бесконечности следует из того, что второе и третье слагаемые в правой части (7) стремятся к нулю, а первое слагаемое равно $\varphi_{j_k} \|\Lambda_{j_k}\| \geq k^2$. Запишем аналогичное (7) неравенство для $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned} & |S_{j_k}(\Psi_{\lambda})(0) - S_{m_{n(k-1)+1}}(\Psi_{\lambda})(0)| \\ & \geq k^{-1} \left| \int_0^1 \Phi_k(\ominus t) \Lambda_{j_k}(t) dt \right| - \int_0^1 \sum_{i=k+1}^{\infty} i^{-1} |\Phi_i(\ominus t)| |\Lambda_{j_k}(t)| dt \\ & \quad - \int_0^1 \sum_{i=k}^{\infty} i^{-1} |\Phi_i(t)| |\Lambda_{m_{n(k-1)+1}}(t)| dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое слагаемое в правой части (9) равно $k^{-1} \varphi_{j_k} \|\Lambda_{j_k}\|_1 \geq k$, второе слагаемое не превосходит

$$\int_0^1 \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_{j_i} i^{-1} |\Lambda_{j_k}(t)| dt \leq 2(k+1)^{-1} \|\Lambda_{j_k}\|_1 \varphi_{j_{k+1}} \leq \frac{2}{(k+1)^2}.$$

Аналогично, третье слагаемое из правой части (9) стремится к нулю. Значит, $S_{j_k}(\Psi_{\lambda})(0) - S_{m_{n(k-1)+1}}(\Psi_{\lambda})(0)$ стремится к бесконечности и $\Psi_{\lambda} \notin B_N[0, 1)$. Противоречие, из которого следует справедливость (8). Наконец, поскольку из $\{\lambda_n\} \in (h^{\omega}, MC_N)$ следует $\{\lambda_n\} \in (h^{\omega}, B_N)$, то из $\{\lambda_n\} \in (h^{\omega}, MC_N)$ следует (8). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность коэффициентов Фурье функции $\Lambda(t) \in B[0, 1)$. Тогда $\{\lambda_n\} \in (H_1^{\omega}, MC_N)$ если и только если, $\varphi_k \|\Lambda_k\|_{\infty} = o(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* В условиях теоремы 2 из $f \in H_1^{\omega}$ и $\widehat{F}(k) = \lambda_k \widehat{f}(k)$ следует, что $F = f * \Lambda$, причем $\|F(x \oplus h) - F(x)\|_{\infty} \leq \|f(x \oplus h) - f(x)\|_1 \|\Lambda\|_{\infty}$, откуда $F \in MC[0, 1)$. Снова согласно (5) и (3) получаем при $m_k \leq n < m_{k+1}$

$$\|F - S_n(F)\|_{\infty} \leq \|F - S_{m_k}(F)\|_{\infty} + \|f - S_{m_k}(f)\|_1 \|\Lambda_n\|_{\infty} \leq \omega_k(F) + C\varphi_n \|\Lambda_n\|_{\infty},$$

и последнее выражение стремится к нулю по условию.

Необходимость. Пусть $\{\lambda_n\} \in (H_1^\omega, MC_N)$, но $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k \|\Lambda_k\|_\infty \neq 0$. Тогда существует последовательность $j_k \in \mathbb{N}$ и точки $x_k \in [0, 1]$ такие, что

$$\begin{aligned} 1) \quad j_{k+1} &\geq N j_k, & 2) \quad \varphi_{j_{k+1}} &\leq \frac{\varphi_{j_k}}{2}, & 3) \quad \varphi_{j_k} |\Lambda_{j_k}(x_k)| &\geq \varepsilon, \\ 4) \quad \varphi_{j_k} (\|\Lambda_{j_{k-1}}\|_\infty + \|\Lambda_{m_{n(k-1)+1}}\|_\infty) &\leq \frac{1}{k}, \end{aligned} \quad (10)$$

где снова $m_{n(k)} \leq j_k < m_{n(k)+1}$. В качестве $\Phi_k(x)$ берем $\varphi_{j_k} D_{m_{n(k)+1}}(x_k \oplus x)$, а $\Phi(x) = \sum_{i=1}^\infty \Phi_i(x)$. Пусть $n(k) < n \leq n(k+1)$, $h \in [0, 1/m_n]$, тогда

$$\begin{aligned} \|\Phi(x \oplus h) - \Phi(x)\|_1 &= \left\| \sum_{i=k+1}^\infty (\Phi_i(x \oplus h) - \Phi_i(x)) \right\|_1 \\ &\leq \sum_{i=k+1}^\infty 2\varphi_{j_i} \|D_{m_{n(i)+1}}\|_1 \leq 2 \sum_{i=k+1}^\infty \leq 4\omega_n \end{aligned}$$

(см. доказательство теоремы 1). Таким образом, $\Phi \in H_1^\omega$. Для $\Phi_\lambda = \Phi * \Lambda$ снова имеем неравенство (7). Теперь первое слагаемое из правой части (7) равно в силу 3) из (10)

$$\varphi_{j_k} \left| \int_0^1 D_{m_{n(k)+1}}(x_k \ominus t) \Lambda_{j_k}(t) dt \right| = \varphi_{j_k} |S_{m_{n(k)+1}}(\Lambda_{j_k})(x_k)| = |\Lambda_{j_k}(x_k)| \varphi_{j_k} \geq \varepsilon,$$

поскольку $j_k < m_{n(k)+1}$. Для второго слагаемого из правой части (7) в силу 4) и 2) из (10) имеем оценку

$$\int_0^1 \sum_{i=k+1}^\infty |\Phi_i(\ominus t)| |\Lambda_{j_k}(t)| dt \leq \sum_{i=k+1}^\infty \varphi_{j_i} \|\Lambda_{j_k}\|_\infty \|D_{m_{n(i)+1}}\|_1 \leq 2\|\Lambda_{j_k}\|_\infty \varphi_{j_{k+1}} \leq \frac{2}{k+1}.$$

Аналогично доказывается, что третье слагаемое из правой части (7) стремится к нулю. Таким образом, $S_{j_k}(\Phi_\lambda)(0) - S_{m_{n(k-1)+1}}(\Phi_\lambda)(0)$ не стремится к нулю и $S_n(\Phi_\lambda)(x)$ не сходится равномерно. Теорема доказана.

Аналогично теореме 1' доказывается

ТЕОРЕМА 2'. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность коэффициентов Фурье функции $\Lambda(t) \in B[0, 1]$. Тогда любое из трех условий

$$\{\lambda_n\} \in (h_1^\omega, MC_N), \quad \{\lambda_n\} \in (h_1^\omega, B_N), \quad \{\lambda_n\} \in (H_1^\omega, B_N),$$

равносильно тому, что $\varphi_k \|\Lambda_k\|_\infty = O(1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В тригонометрическом случае теоремы 1', 2 и 2' установлены Почуевым [10], а случай, аналогичный (h^ω, MC_N) в теореме 1', разобран ДеВором [6]. Доказательства в данной работе используют специфику систем $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ и поэтому несколько проще.

4. Мультипликаторы сходимости в $L[0, 1]$. Напомним, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ называется *квазивыпуклой*, если $\sum_{n=0}^\infty (n+1)|\Delta^2 \lambda_n| < \infty$, где $\Delta^2 \lambda_n = \lambda_n - 2\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2}$. Согласно [1; § 7.2] из этого условия следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta \lambda_n = 0$, где $\Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$. Как показал Томич [11], квазивыпуклая последовательность имеет вид

$$\lambda_n = An + B + \mu_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0.$$

Поэтому из ее ограниченности следует ее сходимость. Пусть также $L_n = \int_0^1 |D_n(t)| dt$, $n \in \mathbb{N}$. Наконец, последовательность $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условию Бари ($\omega \in B$), если для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $\sum_{k=n}^\infty \omega_k = O(\omega_n)$. Следующие две теоремы являются в определенном смысле аналогами теоремы Теляковского из [8], в которой рассматривались равномерная сходимость и обычный модуль непрерывности. Это связано с тем, что аналог известной теоремы Осколкова [12] для систем $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ и $MC[0, 1]$ неверен (см. [5]), зато верен для $L[0, 1]$ (также см. [4]). Вопрос о справедливости аналога теоремы из [8] для $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ и $MC[0, 1]$ остается открытым.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\omega \in B$, $\mathbf{P}$ ограничена. Ограниченная квазивыпуклая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ принадлежит (H_1^ω, L_N) тогда и только тогда, когда

$$\lambda_n \varphi_n L_n = o(1). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Хорошо известно, что если $\{\mu_n\}$ квазивыпукла и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$, то ряд $\sum_{n=0}^\infty \mu_n \chi_n(x)$ является рядом Фурье функции из $L[0, 1]$ (при $p_n \equiv 2$ см. [1; § 7.2], в случае произвольной ограниченной последовательности $\mathbf{P}$ доказательство аналогично). По условию $\lambda_n = B + \mu_n$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$ и $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ тоже квазивыпукла. Значит, ряд $\sum_{n=0}^\infty \lambda_n \hat{f}(n) \chi_n(x)$ является рядом Фурье функции

$$f_\lambda(x) = Bf(x) + f * M(x), \quad \text{где} \quad M(x) = \sum_{k=0}^\infty \mu_k \chi_k(x).$$

Положим

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \chi_k(x).$$

Тогда

$$S_n(f_\lambda)(x) = BS_n(f)(x) + f * M_n(x).$$

С помощью двукратного преобразования Абеля, соотношений

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k\Delta \lambda_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$$

и леммы 1 получаем

$$\sum_{i=n}^\infty \mu_i \chi_i(x) = \sum_{i=n}^\infty \Delta^2 \mu_i (i+1) K_{i+1}(x) - n\Delta \mu_n K_n(x) - \mu_n D_n(x).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 f_\lambda(x) - S_n(f_\lambda)(x) &= B(f(x) - S_n(f)(x)) - \mu_n S_n(f)(x) \\
 &\quad - n\Delta\mu_n\sigma_n(f)(x) + \sum_{i=n}^{\infty} \Delta^2\mu_i(i+1)\sigma_{i+1}(f)(x) \\
 &= \lambda_n(f(x) - S_n(f)(x)) - \mu_n f(x) \\
 &\quad - n\Delta\lambda_n\sigma_n(f)(x) + \sum_{i=n}^{\infty} \Delta^2\lambda_i(i+1)\sigma_{i+1}(f)(x). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Согласно лемме 3 нормы $\|K_n\|_1$ ограничены. Из отмеченных ранее свойств квазивыпуклой последовательности выводим, что

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 = |\lambda_n| \|f - S_n(f)\|_1 + \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \quad (13)$$

В силу леммы 2 при $m_k \leq n < m_{k+1}$ верно

$$L_n \geq \int_0^{1/m_{k+1}} |D_n(t)| dt = \frac{n}{m_{k+1}} \geq \frac{1}{N},$$

откуда стандартным приемом получаем согласно (3)

$$\|f - S_n(f)\|_1 \leq (1 + L_n)E_n(f)_1 \leq C_1 L_n E_{m_k}(f)_1 \leq C_1 L_n \varphi_n,$$

что показывает достаточность условия (11).

Необходимость. Пусть $\omega \in B$ и $\{\lambda_n\} \in (H_1^\omega, L_N)$. Рассмотрим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{i-1} (D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x)).$$

Тогда

$$\|f - S_{m_k}(f)\|_1 \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \omega_{i-1} (\|D_{m_i}\|_1 + \|D_{m_{i-1}}\|_1) \leq C\omega_k$$

согласно лемме 1, откуда $f \in H_1^\omega$. Фридли [5] доказал, что для

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} A_i (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}),$$

$A_i \downarrow 0$, $m_k \leq n < m_{k+1}$ верно неравенство

$$\|g - S_n(g)\|_1 \geq 2^{-1} A_{k+1} L_n.$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (13) не меньше $2^{-1} |\lambda_n| \varphi_n L_n$ и из сходимости к нулю левой части (13) следует (11). Теорема доказана.

Аналогом теоремы 3 в пространстве $H(\mathbf{P}, [0, 1])$ является

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\omega \in B$, $\mathbf{P}$ ограничена. Ограниченная квазивыпуклая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ принадлежит (H_{h1}^ω, H_N) тогда и только тогда, когда выполнено условие (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Снова имеем равенство (12), откуда получаем в силу неравенства $\|h * g\|_H \leq \|h\|_H \|g\|_1$

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_H = |\lambda_n| \|f - S_n(f)\|_H + \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \quad (14)$$

Далее, пусть $t_n \in W_n$, $m_k \leq n < m_{k+1}$, — полином наилучшего приближения для f в $H(\mathbf{P}, [0, 1])$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_H &\leq \|f - S_n(t_n)\|_H + \|S_n(t_n - f)\|_H \\ &= E_n(f)_H + \|D_n * (t_n - f)\|_H \\ &\leq E_n(f)_H (1 + \|D_n\|_1) \leq C_1 E_n(f)_H L_n \leq C_1 E_{m_k}(f)_H L_n \leq C_2 \varphi_n L_n. \end{aligned}$$

Подставляя это неравенство в (14), доказываем достаточность условия (11).

Необходимость. Поскольку $\|g\|_H \geq \|g\|_1$, для функции f , введенной при доказательстве теоремы 3, имеем оценку

$$\|f - S_n(f)\|_H \geq \|f - S_n(f)\|_1 \geq 2^{-1} \varphi_n L_n.$$

Далее, легко видеть, что

$$(D_{m_{n+1}} - D_{m_n})^* = |D_{m_{n+1}} - D_{m_n}|,$$

поэтому доказательство того, что $f \in H_{h1}^\omega$, проходит так же, как в теореме 3. Снова из сходимости левой части (14) следует (11). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша*, Теория и применения, Наука, М., 1987.
- [2] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, Элм, Баку, 1981.
- [3] C. Watari, "On generalized Walsh-Fourier series", *Tohoku Math. J.* (2), **10**:3 (1958), 211–241.
- [4] F. Schipp, W. Wade, P. Simon, *Walsh Series*, An introduction to dyadic harmonic analysis, Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
- [5] S. Fridli, "Approximation by Vilenkin–Fourier sums", *Acta Math. Hungar.*, **47**:1–2 (1986), 33–44.
- [6] R. DeVore, "Multipliers of uniform convergence", *Enseign. Math.* (2), **14**:2 (1969), 175–188.
- [7] С. А. Теляковский, "О множителях равномерной сходимости рядов Фурье функций с заданным модулем непрерывности", *Матем. заметки*, **10**:1 (1971), 33–40.

- [8] С. А. Теляковский, “Квазивыпуклые множители равномерной сходимости рядов Фурье с заданным модулем непрерывности”, *Матем. заметки*, **8**:5 (1970), 619–623.
- [9] G. Morgenthaler, “Walsh–Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1957), 472–507.
- [10] В. Р. Почуев, “О множителях равномерной сходимости и множителях равномерной ограниченности частных сумм рядов Фурье”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1977, № 1, 74–81.
- [11] M. Tomic, “Sur les facteurs de convergence des series de Fourier des fonctions continues”, *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, **8** (1955), 23–32.
- [12] К. И. Осколков, “Неусиляемость оценки Лебега для приближения функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье”, *Сборник статей*. 1, Посв. акад. И. М. Виноградову к его 80-летию, Тр. МИАН, **112**, Наука, М., 1971, 337–345.

Н. Ю. Агафонова

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: AgafonovaNU@info.sgu.ru

Поступило

04.07.2006

Исправленный вариант

22.11.2006

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru