Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Барсегян, О неравенствах типа Либа–Тирринга,
Матем. заметки, 2007, том 82, выпуск 4, 504–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 05:49:44

О неравенствах типа Либа–Тирринга

Д. С. Барсегян

В работе с использованием метода, предложенного Кашиным для доказательства неравенств типа Либа–Тирринга для ортонормированных систем, доказывается аналогичное неравенство в многомерном случае.

Библиография: 5 названий.

В работе Либа и Тирринга [1] была установлена следующая

ТЕОРЕМА А. *Для произвольной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ имеет место неравенство*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\Phi}^{p/(p-1)} dx \right)^{2(p-1)/d} \leq C_{p,d} \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad (1)$$

если $\max(1, d/2) < p \leq 1 + d/2$, где

$$\rho_{\Phi} := \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(x) \quad \text{и} \quad \nabla \varphi := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \right). \quad (2)$$

В дальнейшем неравенства типа (1) были получены различными авторами. В частности, Ильиным [2] была доказана

ТЕОРЕМА В. *Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1)$ – ортонормированная система функций, заданных на единичной окружности S^1 , причем $\varphi_j \perp 1$, $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{S^1} \rho_{\Phi}^2 d\mu \leq C \sum_{j=1}^N \|\varphi_j^{(1/2)}\|_{L^2(S^1)}^2,$$

где $f^{1/2}(z) = \sum |k|^{(1/2)} \hat{f}(k) z^k$ – производная от функции $f(z) = \sum \hat{f}(k) z^k \in L^2(S^1)$ порядка $1/2$, а μ – нормированная мера Лебега на S^1 .

В работе [3] Кашиным был предложен новый подход к неравенствам типа Либа–Тирринга, основанный на аппарате теории ортогональных рядов, и было получено обобщение теоремы В. В настоящей работе, применив метод Кашина, мы доказываем многомерные аналоги результатов Кашина и Ильина, а также показываем, как этим методом можно получить неравенства типа (1).

Для системы действительных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^d)$, заданных на d -мерном единичном торе S^d , определим оператор $P_\Phi: l_2^N \rightarrow L^2(S^d)$ следующим образом:

$$P_\Phi(\{c_j\}_{j=1}^N) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j.$$

Обозначим через $\delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}$ ортогональный проектор из $L^2(S^d)$ на пространство тригонометрических полиномов:

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_d} := \left\{ t : t(z) = \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} a_{m_1, \dots, m_d} z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d} \right\}$$

(здесь и ниже мы считаем, для краткости, что $2^{-1} = 0$), и пусть

$$\lambda_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\Phi) := \|\delta_{\nu_1, \dots, \nu_d} \cdot P_\Phi \rightarrow T_{\nu_1, \dots, \nu_d}\|.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^d)$, ортогональных единице, имеет место следующее неравенство:*

$$\int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d \leq C_d \sum_{\nu_1, \dots, \nu_d=0}^{\infty} \gamma_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2, \quad (3)$$

где постоянная C_d зависит только от d и

$$\gamma_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\Phi) := \sum_{\max\{\beta_i\} \leq \max\{\nu_i\}} 2^{\beta_1 + \dots + \beta_d} \lambda_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются два утверждения из теории ортогональных рядов.

Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\varphi_j \in L^p(S^d)$, $1 \leq j \leq N$. Тогда (см. [4; с. 52])

$$C_1(p) \|\rho_\Phi^{1/2}\|_{L^p(S^d)}^p \leq \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \varphi_j \right\|_{L^p(S^d)}^p dt \leq C_2(p) \|\rho_\Phi^{1/2}\|_{L^p(S^d)}^p, \quad (4)$$

где $\{r_j(t)\}$ – система Радемахера, $C_1(p) > 0$.

Если функция $f \in L^p(S^d)$, $1 < p < \infty$, и

$$\delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(f) := \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} \widehat{f}(m_1, \dots, m_d) z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d},$$

тогда (см. [5; с. 56])

$$C_3(p) \|f\|_{L^p(S^d)} \leq \left\| \left(\sum_{\nu_1, \dots, \nu_d=0}^{\infty} \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(f) \right)^{1/2} \right\|_{L^p(S^d)} \leq C_4(p) \|f\|_{L^p(S^d)}, \quad (5)$$

где $C_3(p) > 0$.

Сначала докажем следующую оценку:

$$A := \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j) \right\|_{L^\infty(S^d)} \leq 2^{\beta_1 + \dots + \beta_d} \lambda_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2, \quad \beta_m = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Выберем точку $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, \dots, z_{0d}) \in S^d$ такую, что

$$A = \sum_{j=1}^N \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j)(\mathbf{z}_0).$$

Положим $b_j = A^{-1/2} \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j)(\mathbf{z}_0)$, $1 \leq j \leq N$. Тогда $\sum_{j=1}^N b_j^2 = 1$ и для многочлена

$$Q(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^N b_j \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}(\varphi_j)(\mathbf{z}) =: \sum_{\substack{2^{\beta_1-1} \leq |m_1| < 2^{\beta_1} \\ \dots \\ 2^{\beta_d-1} \leq |m_d| < 2^{\beta_d}}} a_{m_1, \dots, m_d} z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d},$$

имеет место неравенство:

$$\|Q\|_{L^2(S^d)} = \|\pi_{\beta_1, \dots, \beta_d} \cdot P_\Phi(\{b_j\})\|_{L^2(S^d)} \leq \lambda_{\beta_1, \dots, \beta_d}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &\leq \|Q\|_{L^\infty(S^d)} \leq \sum_{\substack{2^{\beta_1-1} \leq |m_1| < 2^{\beta_1} \\ \dots \\ 2^{\beta_d-1} \leq |m_d| < 2^{\beta_d}}} |a_{m_1, \dots, m_d}| \\ &\leq 2^{(\beta_1 + \dots + \beta_d)/2} \left\{ \sum_{\substack{2^{\beta_1-1} \leq |m_1| < 2^{\beta_1} \\ \dots \\ 2^{\beta_d-1} \leq |m_d| < 2^{\beta_d}}} |a_{m_1, \dots, m_d}|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq 2^{(\beta_1 + \dots + \beta_d)/2} \lambda_{\beta_1, \dots, \beta_d}, \end{aligned}$$

откуда вытекает (6).

Перейдем к доказательству (3). Используя (4) и (5), будем иметь, что

$$\begin{aligned} \int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d &\leq C_5 \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \varphi_j \right\|_{L^4(S^d)}^4 dt \\ &\leq C_6 \int_0^1 \int_{S^d} \left\{ \sum_{\nu_1, \dots, \nu_d=0}^\infty \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(t, \mathbf{z}) \right\}^2 d\mu_d dt \\ &= C_6 \sum_{\nu_1, \beta_1, \dots, \nu_d, \beta_d=0}^\infty \int_0^1 \int_{S^d} \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(t, \mathbf{z}) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(t, \mathbf{z}) d\mu_d dt, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(t, \mathbf{z}) = \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d} \left(\sum_{j=1}^N r_j(t) \varphi_j(\mathbf{z}) \right) = \sum_{j=1}^N r_j(t) \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\varphi_j)(\mathbf{z}).$$

Учитывая, что интеграл $\int_0^1 r_j r_q r_h r_s dt = 0$, если хотя бы одно из чисел j, q, h, s отлично от остальных, и этот интеграл равен единице в противном случае, мы будем иметь, что

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_{S^d} \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(t, \mathbf{z}) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(t, \mathbf{z}) d\mu_d dt \\
 &= \sum_{j, q, h, s=1}^N \int_0^1 r_j(t) r_q(t) r_h(t) r_s(t) dt \\
 & \quad \times \int_{S^d} \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\varphi_j) \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\varphi_q) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}(\varphi_h) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}(\varphi_s) d\mu_d \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N \int_{S^d} \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(\varphi_j) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_h) d\mu_d \\
 & \quad + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N \int_{S^d} \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\varphi_j) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}(\varphi_j) \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\varphi_q) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}(\varphi_q) d\mu_d \\
 & \quad - 2 \sum_{j=1}^N \int_{S^d} \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(\varphi_j) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j) d\mu_d \\
 &\leq \int_{S^d} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(\varphi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j) d\mu_d \\
 & \quad + 2 \int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\varphi_j) \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}(\varphi_j) \right)^2 d\mu_d.
 \end{aligned}$$

Применив неравенство Коши, отсюда и из (7) получим, что

$$\int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d \leq 3C_6 \sum_{\nu_i, \beta_i=0}^\infty \int_{S^d} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(\varphi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j) d\mu_d \quad (8)$$

и с учетом оценки (6)

$$\begin{aligned}
 \int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d &\leq 6C_6 \sum_{\max\{\beta_i\} \leq \max\{\nu_i\}} \int_{S^d} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(\varphi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j) d\mu_d \\
 &\leq 6C_6 \sum_{\max\{\beta_i\} \leq \max\{\nu_i\}} 2^{\beta_1 + \dots + \beta_d} \lambda_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2 \int_{S^d} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(\varphi_j) d\mu_d \\
 &= C_d \sum_{\nu_i=0}^\infty \gamma_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \vdots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2.
 \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для произвольной ортонормированной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, ортогональных единице, имеет место следующее неравенство:

$$\int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu \leq C_d \sum_{j=1}^N \|\varphi_j^{(d/2)}\|_{L^2(S^d)}^2,$$

где вектор-функция $f^{(d/2)}$ определена равенством

$$f^{(d/2)}(z_1, \dots, z_d) = \left\{ \sum_{m_1^2 + \dots + m_d^2 \neq 0} |m_s|^{d/2} \widehat{f}(m_1, \dots, m_d) z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d} \right\}_{s=1}^d$$

для

$$f(z_1, \dots, z_d) = \sum_{m_1^2 + \dots + m_d^2 \neq 0} \widehat{f}(m_1, \dots, m_d) z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d} \in L^2(S^d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Φ – ортонормированная система, то $\lambda_{\nu_1, \dots, \nu_d} \leq 1$. Поэтому из теоремы 1 вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d &\leq C_d \sum_{\nu_i=0}^{\infty} \sum_{\max\{\beta_i\} \leq \max\{\nu_i\}} \sum_{j=1}^N 2^{\beta_1 + \dots + \beta_d} \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\ &\leq 2^d C_d \sum_{\nu_i=0}^{\infty} 2^{d \max\{\nu_i\}} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\ &\leq 2^d C_d \sum_{\nu_i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} (|m_1|^d + \dots + |m_d|^d) |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\ &= 2^d C_d \sum_{j=1}^N \|\varphi_j^{(d/2)}\|_{L^2(S^d)}^2. \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$, заданных на d -мерном единичном торе S^d , имеет место следующее неравенство:

$$\int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d \leq C_d \sum_{\nu_1, \dots, \nu_d=0}^{\infty} \widetilde{\gamma}_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2,$$

где

$$\widetilde{\gamma}_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\Phi) = \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_d \leq \nu_1 + \dots + \nu_d} 2^{\beta_1 + \dots + \beta_d} \lambda_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) следует, что

$$\begin{aligned}
 \int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d &\leq 6C_6 \sum_{\beta_1+\dots+\beta_d \leq \nu_1+\dots+\nu_d} \int_{S^d} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1, \dots, \nu_d}^2(\varphi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2(\varphi_j) d\mu_d \\
 &= C_7 \sum_{\beta_1+\dots+\beta_d \leq \nu_1+\dots+\nu_d} 2^{\beta_1+\dots+\beta_d} \lambda_{\beta_1, \dots, \beta_d}^2 \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\
 &= C_d \sum_{\nu_1, \dots, \nu_d=0}^{\infty} \widetilde{\gamma}_{\nu_1, \dots, \nu_d}(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для произвольной ортонормированной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^d)$, ортогональных единице, имеет место следующее неравенство:

$$\int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d \leq C_{d,\alpha} \sum_{j=1}^N \|\overline{D}^\alpha \varphi_j\|_{L^2(S^d)}^2, \quad \alpha > 1/2, \quad (9)$$

где $\overline{D}^\alpha \varphi(z)$ – смешанная производная порядка α от функции

$$\varphi(z) = \sum_{m_1^2+\dots+m_d^2 \neq 0} \widehat{\varphi}(m_1, \dots, m_d) z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d},$$

определенная следующим образом:

$$\overline{D}^\alpha \varphi(z) = \sum_{m_1^2+\dots+m_d^2 \neq 0} (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_d)^\alpha \widehat{\varphi}(m_1, \dots, m_d) z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d},$$

где $\overline{m} = |m|$, если $m \neq 0$, и $\overline{m} = 1$, если $m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы отметили, что если система функций Φ ортонормальна, то $\lambda_{\nu_1, \dots, \nu_d} \leq 1$. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что

$$\begin{aligned}
 \int_{S^d} \rho_\Phi^2 d\mu_d &\leq C_d \sum_{\nu_i \geq 0} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_d \leq \nu_1+\dots+\nu_d} 2^{\beta_1+\dots+\beta_d} \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\
 &\leq C_d \sum_{\nu_i \geq 0} 2^{\nu_1+\dots+\nu_d} (\nu_1 + \dots + \nu_d) \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\
 &\leq C_d \sum_{\nu_i \geq 0} 2^{\nu_1+\dots+\nu_d} \ln(2^{\nu_1} \dots 2^{\nu_d}) \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{d,\alpha} \sum_{\nu_i \geq 0} 2^{(\nu_1 + \dots + \nu_d)2\alpha} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\
&\leq C_{d,\alpha} \sum_{\nu_i \geq 0} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{2^{\nu_1-1} \leq |m_1| < 2^{\nu_1} \\ \dots \\ 2^{\nu_d-1} \leq |m_d| < 2^{\nu_d}}} (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_d)^{2\alpha} |\widehat{\varphi}_j(m_1, \dots, m_d)|^2 \\
&= C_{d,\alpha} \sum_{j=1}^N \|\overline{D}^\alpha \varphi_j\|_{L^2(S^d)}^2.
\end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из последней формулы видно, что оценка (8) останется верной, если в ее правой части величину $\overline{D}^\alpha \varphi(z)$ заменить на

$$\sum_{m_1^2 + \dots + m_d^2 \neq 0} (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_d)^{1/2} \ln^{(d-1)/2}(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_d) \widehat{\varphi}(m_1, \dots, m_d) z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d}.$$

Докажем вышеописанным методом обобщение теоремы Либа–Тирринга при $d = p = 2$. Для системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ определим оператор $P_\Phi: l_2^N \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ следующим образом:

$$P_\Phi(\{c_j\}_{j=1}^N) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\Delta_{\nu,\beta} &= \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 2^{\nu-1} \leq |\xi| < 2^\nu, 2^{\beta-1} \leq |\eta| < 2^\beta\}, \\
T_{\nu,\beta} &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : \text{supp } \widehat{f} \subset \Delta_{\nu,\beta}\}, \quad \nu, \beta = 0, 1, \dots,
\end{aligned}$$

где $\widehat{f}$ – преобразование Фурье функции f (напомним, что мы полагаем $2^{-1} = 0$). Пусть $\delta_{\nu,\beta}$ – ортогональный проектор на пространство $T_{\nu,\beta}$, определенный равенством

$$\delta_{\nu,\beta}(f) = g, \quad \text{где } \widehat{g} = \widehat{f} \cdot \chi_{\nu,\beta}, \quad \nu, \beta = 0, 1, \dots,$$

где $\chi_{\nu,\beta}$ – характеристическая функция множества $\Delta_{\nu,\beta}$. Положим

$$\lambda_{\nu,\beta} = \|\delta_{\nu,\beta} \cdot P_\Phi: l_2^N \rightarrow T_{\nu,\beta}\|.$$

ТЕОРЕМА 3. Для произвольной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 d\xi d\eta \leq C \sum_{\nu,\beta=0}^{\infty} \gamma_{\nu,\beta}(\Phi) \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu,\beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta, \quad (10)$$

где

$$\gamma_{\nu,\beta}(\Phi) = \sum_{\max\{\nu_1, \beta_1\} \leq \max\{\nu, \beta\}} 2^{\nu_1 + \beta_1} \lambda_{\nu_1, \beta_1}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы вместо (5) воспользуемся следующим утверждением (см. [5; с. 73]): если $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, то

$$C_1(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| \left\{ \sum_{\nu, \beta=0}^{\infty} \delta_{\nu, \beta}^2(f) \right\}^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_2(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (11)$$

Докажем, что

$$A := \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_j) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\nu+\beta} \lambda_{\nu, \beta}^2. \quad (12)$$

Выберем точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ такую, что $A = \sum_{j=1}^N \delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_j)(x_0, y_0)$. Положим $b_j = A^{-1/2} \delta_{\nu, \beta}(\varphi_j)(x_0, y_0)$, $1 \leq j \leq N$. Тогда $\sum_{j=1}^N b_j^2 = 1$ и

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &\leq \left\| \sum_{j=1}^N b_j \delta_{\nu, \beta}(\varphi_j) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N b_j \widehat{\varphi}_j \chi_{\nu, \beta} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq 2^{(\nu+\beta)/2} \left\| \delta_{\nu, \beta} \left(\sum_{j=1}^N b_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{(\nu+\beta)/2} \lambda_{\nu, \beta}, \end{aligned}$$

откуда следует (12). Согласно (4) и (11) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 d\xi d\eta \leq C_9 \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \varphi_j \right\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 dt \leq C_{10} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \sum_{\nu, \beta=0}^{\infty} \delta_{\nu, \beta}^2(t, \xi, \eta) \right\}^2 d\xi d\eta dt,$$

где

$$\delta_{\nu, \beta}(t, \xi, \eta) = \sum_{j=1}^t r_j(t) \delta_{\nu, \beta}(\varphi_j)(\xi, \eta).$$

Отсюда, как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы получим

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 d\xi d\eta \leq C_{11} \sum_{\nu, \nu_1, \beta, \beta_1=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1, \beta_1}^2(\varphi_j) d\xi d\eta \quad (13)$$

и, учитывая (12),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 d\xi d\eta &\leq 2C_{11} \sum_{\max\{\nu_1, \beta_1\} \leq \max\{\nu, \beta\}} 2^{\nu_1+\beta_1} \lambda_{\nu_1, \beta_1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_j) d\xi d\eta \\ &\leq C_{12} \sum_{\nu, \beta=0}^{\infty} \gamma_{\nu, \beta} \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu, \beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для произвольной ортонормированной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 d\xi d\eta \leq C \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что при замене системы Φ на ортонормированную систему $\psi_j(x, y) = a\varphi_j(ax, ay)$, $j = 1, 2, \dots, N$, $a > 1$, обе части неравенства (14) умножаются на a^2 . С другой стороны, ясно, что при достаточно большом a

$$\sum_{j=1}^N \int_{[-1,1]^2} |\widehat{\psi}_j|^2 d\xi d\eta = \sum_{j=1}^N \int_{[-1/a, 1/a]^2} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta \leq \sum_{j=1}^N \|\nabla \psi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Следовательно, без ограничения общности можем считать, что

$$\sum_{j=1}^N \int_{[-1,1]^2} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta \leq \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (15)$$

Ясно, что если Φ – ортонормированная система, то $\lambda_{\nu, \beta} \leq 1$. Поэтому из (10) имеем, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 d\xi d\eta &\leq C \sum_{\nu, \beta=0}^{\infty} 4^{\max\{\nu, \beta\}} \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu, \beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C \sum_{\nu^2 + \beta^2 \neq 0} 4^{\max\{\nu, \beta\}} \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu, \beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C \sum_{\nu^2 + \beta^2 \neq 0} \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu, \beta}} (\xi^2 + \eta^2) |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta \\ &= 2C \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства следствия 3 видно, что оценка (14) имеет место для произвольной системы функций Φ при условии, что числа $\lambda_{\nu, \beta}$ равномерно ограничены.

ТЕОРЕМА 4. Для произвольной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 d\xi d\eta \leq C \sum_{\nu, \beta=0}^{\infty} \widetilde{\gamma}_{\nu, \beta}(\Phi) \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu, \beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta,$$

где

$$\widetilde{\gamma}_{\nu, \beta}(\Phi) = \sum_{\nu_1 + \beta_1 \leq \nu + \beta} 2^{\nu_1 + \beta_1} \lambda_{\nu_1, \beta_1}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (13) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 d\xi d\eta &\leq 2C_{11} \sum_{\nu_1+\beta_1 \leq \nu+\beta} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_1,\beta_1}^2(\varphi_j) d\xi d\eta \\ &\leq C_{12} \sum_{\nu_1+\beta_1 \leq \nu+\beta} 2^{\nu_1+\beta_1} \lambda_{\nu_1,\beta_1}^2 \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu,\beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta \\ &= C_{12} \sum_{\nu,\beta=0}^{\infty} \widetilde{\gamma}_{\nu,\beta}(\Phi) \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu,\beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для произвольной ортонормированной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 d\xi d\eta \leq C \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi\eta|^{1+\alpha} + |\xi|^{1+\alpha} + |\eta|^{1+\alpha}) |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta, \quad (16)$$

где $\alpha \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим системы $\Phi' = \{\varphi'_j\}_{j=1}^N$ и $\Phi'' = \{\varphi''_j\}_{j=1}^N$, где

$$\varphi_j = \varphi'_j + \varphi''_j, \quad \text{где} \quad \widehat{\varphi}'_j = \widehat{\varphi}_j \cdot \chi_{0,0}, \quad \varphi''_j = \varphi_j - \varphi'_j,$$

и пусть числа $\lambda'_{\nu,\beta} \leq 1$ и $\lambda''_{\nu,\beta} \leq 1$ соответствуют системам Φ' и Φ'' . Легко видеть, что

$$\lambda'_{\nu,\beta} \leq \lambda_{\nu,\beta} \leq 1, \quad \lambda''_{\nu,\beta} \leq \lambda_{\nu,\beta} \leq 1. \quad (17)$$

Из следствия 3 с учетом замечания 2 получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi'}^2 d\xi d\eta &\leq C_1 \sum_{j=1}^N \int_{[0,1]^2} (|\xi|^2 + |\eta|^2) |\widehat{\varphi}'_j|^2 d\xi d\eta \\ &\leq C_2 \sum_{j=1}^N \int_{[0,1]^2} (\xi^{1+\alpha} + \eta^{1+\alpha}) |\widehat{\varphi}'_j|^2 d\xi d\eta \\ &\leq C_2 \sum_{j=1}^N \int_{[0,1]^2} (|\xi\eta|^{1+\alpha} + |\xi|^{1+\alpha} + |\eta|^{1+\alpha}) |\widehat{\varphi}'_j|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, учитывая, что $\lambda''_{\nu,\beta} \leq 1$ и $\widehat{\varphi}''_j(\xi, \eta) = 0$, если $(\xi, \eta) \in [-1, 1]^2$, из теоремы 4 получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi''}^2 d\xi d\eta &\leq C_3 \sum_{\nu,\beta=0}^{\infty} \sum_{\nu_1+\beta_1 \leq \nu+\beta} 2^{\nu_1+\beta_1} \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu,\beta}} |\widehat{\varphi}''_j|^2 d\xi d\eta \\ &\leq C_4 \sum_{\nu,\beta=0}^{\infty} 2^{\nu+\beta} (\nu + \beta) \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu,\beta}} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_5 \sum_{\nu, \beta=0}^{\infty} 2^{(\nu+\beta)(1+\alpha)} \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu, \beta}} |\widehat{\varphi}_j''|^2 d\xi d\eta \\
&= C_5 \sum_{\nu, \beta \geq 1} 2^{(\nu+\beta)(1+\alpha)} \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_{\nu, \beta}} |\widehat{\varphi}_j''|^2 d\xi d\eta \\
&\quad + C_5 \sum_{\nu \geq 1} 2^{\nu(1+\alpha)} \sum_{j=1}^N \int_{\{2^{\nu-1} \leq |\xi| < 2^\nu, |\eta| \leq 1\}} |\widehat{\varphi}_j''|^2 d\xi d\eta \\
&\quad + C_5 \sum_{\beta \geq 1} 2^{\beta(1+\alpha)} \sum_{j=1}^N \int_{\{|\xi| \leq 1, 2^{\beta-1} \leq |\eta| < 2^\beta\}} |\widehat{\varphi}_j''|^2 d\xi d\eta \\
&\leq C_6 \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi\eta|^{1+\alpha} + |\xi|^{1+\alpha} + |\eta|^{1+\alpha}) |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi d\eta. \tag{19}
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 d\xi d\eta \leq 8 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi'}^2 d\xi d\eta + \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi''}^2 d\xi d\eta \right),$$

из (18) и (19) получим (16). Следствие 4 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Lieb, W. Thirring, “Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities”, *Stud. Math. Phys.*, Essays in Honor of Valentine Bargmann, Princeton Univ. Press, Princeton, 1976, 269–303.
- [2] А. А. Ильин, “Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 33–66.
- [3] Б. С. Кашин, “Об одном классе неравенств для ортонормированных систем”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 204–208.
- [4] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.
- [5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

Д. С. Барсегян

Ереванский государственный университет

E-mail: sart@ysu.am

Поступило

29.01.2007

Исправленный вариант

30.05.2007